Marius **PERIANU** • Cătălin **STĂNICĂ**
Ioan **BALICA** • Cătălin **MÎINESCU** • Cristian **LAZĂR**

Matematică

pentru

Evaluarea Naţională

Teme, probleme şi teste de verificare

Clasa a VIII-a

art
educaţional

Cuprins

Aritmetică / Algebră

Clasele V - VIII

1

Tema 1.1

Numere naturale. Operaţii cu numere naturale

(clasa a V-a)

Mulţimea $\{0,1,2,3,4,...\}$ a numerelor naturale se notează cu $\mathbb{N}$.

Mulţimea $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ este mulţimea numerelor naturale nenule; ea se notează cu $\mathbb{N}^*$.

Cu numerele naturale putem efectua următoarele operaţii:

- operaţii de ordinul I: adunarea şi scăderea;
- operaţii de ordinul II: înmulţirea şi împărţirea;
- operaţii de ordinul III: ridicarea la putere.

Proprietăţile adunării şi înmulţirii numerelor naturale

a. Comutativitatea: pentru orice numere naturale a şi b avem: $\begin{cases} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{cases}$.

b. Asociativitatea: pentru orice numere naturale a, b, c avem: $\begin{cases} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{cases}$.

c. 0 este element neutru la adunare: $a+0=0+a=a$, pentru orice număr natural a.
1 este element neutru la înmulţire: $a\cdot 1=1\cdot a=a$, pentru orice număr natural a.

d. Înmulţirea este distributivă faţă de adunare şi faţă de scădere: $\begin{cases} a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \\ a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c \end{cases}$.

Operaţiile cu numere naturale şi relaţiile de egalitate/inegalitate

1. Fiind dată o egalitate $a=b$ între două numere naturale, egalitatea se păstrează dacă:

a. în ambii membri se adună acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a+c=b+c$;

b. din ambii membri se scade acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a-c=b-c$;

c. ambii membri se înmulţesc cu acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$;

d. ambii membri se împart la acelaşi număr natural nenul: $a=b\Rightarrow a:c=b:c$.

2. Adunând sau înmulţind membru cu membru două egalităţi, egalitatea se păstrează:

dacă $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ atunci $\begin{cases} a+c=b+d \\ a\cdot c=b\cdot d \end{cases}$.

3. Fiind dată o inegalitate $a\le b$ între două numere naturale, inegalitatea se păstrează dacă:

a. în ambii membri se adună acelaşi număr natural: $a\le b\Rightarrow a+c\le b+c$;

b. din ambii membri se scade acelaşi număr natural: $a\le b\Rightarrow a-c\le b-c$;

c. ambii membri se înmulţesc cu acelaşi număr natural nenul: $a\le b\Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c$;

d. ambii membri se împart la acelaşi număr natural nenul: $a\le b\Rightarrow a:c\le b:c$.

Teorema împărţirii cu rest. Oricare ar fi numerele naturale a şi b, cu $b \neq 0$, există numerele naturale q şi r, unic determinate, astfel încât: $a = b\cdot q + r$ şi $0\le r<b$.

Numărul q se numeşte *câtul împărţirii*, iar numărul r se numeşte *rest*.

Exemplu. Fiind date numerele 23 şi 5, există şi sunt unice numerele naturale 4 şi 3 astfel încât să avem: $23 = 4\cdot 5 + 3$ şi $3 < 5$. Deci $23 : 5 = 4$ rest 3.

Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Fie a şi n două numere naturale, cu $n \geq 2$. Produsul a n factori egali cu a se numeşte puterea a n-a a numărului natural a şi se notează a^n.

Scrierea a^n se citeşte „a la puterea n" sau „puterea a n-a a numărului a". În această scriere, a se numeşte *baza* puterii, iar n se numeşte *exponentul* puterii.

Aşadar: $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, şi, în general, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ factori}} = a^n$, pentru $n \geq 2$.

Prin convenţie, $a^1 = a$ şi $a^0 = 1$, pentru orice număr natural $a \neq 0$. Nu are sens 0^0.

Pătrate perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a doua a unui număr natural se numesc *pătrate perfecte.*

Exemple. 81 şi 225 sunt pătrate perfecte, pentru că $81 = 9^2$ şi $225 = 15^2$.

Cuburi perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a treia a unui număr natural se numesc *cuburi perfecte*.

Exemple. 27, 125 şi 64 sunt cuburi perfecte, întrucât $27 = 3^3$; $125 = 5^3$; $64 = 4^3$.

Ultima cifră a puterii unui număr natural. Deoarece ultima cifră a unui produs de numere este ultima cifră a produsului ultimelor cifre ale numerelor date, avem:

1. Numerele care se termină cu cifrele 0, 1, 5, 6, ridicate la orice putere nenulă, se vor termina cu aceleaşi cifre.

2. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 4 sau 9 se repetă din 2 în 2:
- **a.** puterile impare ale numerelor terminate în 4 se termină în 4, iar puterile pare nenule se termină în 6;
- **b.** puterile impare ale numerelor terminate în 9 se termină în 9, iar puterile pare nenule se termină în 1.

3. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 2, 3, 7 sau 8, se repetă din 4 în 4.

Reguli de calcul cu puteri. Fie a, b, m, n numere naturale, cu $a, b \neq 0$.

1. Înmulţirea puterilor cu aceeaşi bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. Împărţirea puterilor cu aceeaşi bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$, pentru orice $m \geq n$

3. Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4. Puterea unui produs: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. Puterea unui cât: $(a : b)^n = a^n : b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \,\vdots\, b$.

Observaţie. Sunt situaţii în care identităţile de mai sus se folosesc şi sub forma:

1. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ **2.** $a^{m-n} = a^m : a^n$ **3.** $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ - regula de înmulţire a puterilor cu acelaşi exponent

5. $a^n : b^n = (a : b)^n$ - regula de împărţire a puterilor cu acelaşi exponent

Ordinea efectuării operaţiilor

1. Dacă într-un exerciţiu sunt operaţii de acelaşi ordin acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta. Pentru a uşura calculul, putem folosi proprietăţile de comutativitate şi asociativitate ale adunării şi înmulţirii:

Exemple. **a.** $27 + 15 - 32 = 42 - 32 = 10$. **b.** $32 \cdot 5 : 8 \cdot 2 = 160 : 8 \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$.

c. $137 + 455 + 63 + 45 = (137 + 63) + (455 + 45) = 200 + 500 = 700$.

d. $4 \cdot 231 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 231 = 100 \cdot 231 = 23\,100$.

2. Dacă într-un exerciţiu sunt operaţii de ordine diferite se efectuează, dacă există, mai întâi operaţiile de ordinul trei, apoi operaţiile de ordinul doi şi, în final, operaţiile de ordinul întâi, respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. **a.** $24 : 2^3 \cdot 5 = 24 : 8 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$.

b. $340 : 17 + (5^4)^3 : 5^{10} - 700 : 35 = 340 : 17 + 5^{12} : 5^{10} - 700 : 35 =$
$= 340 : 17 + 5^2 - 700 : 35 = 340 : 17 + 25 - 700 : 35 = 20 + 25 - 20 = 25$.

3. Dacă într-un exerciţiu există şi paranteze, se efectuează mai întâi toate operaţiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte (dacă există) şi în final din acolade (dacă există) şi în final ce avem în afara acoladelor (dacă există), respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. **a.** $(38 + 275 : 25) \cdot 10 - 34 \cdot 11 = (38 + 11) \cdot 10 - 374 = 49 \cdot 10 - 374 = 116$.

b. $40 \cdot \left[100 : 4 + 5 \cdot \left(3^2 + 48048 : 24\right)\right] + 2011 =$

Calculăm paranteza rotundă: $3^2 + 48048 : 24 = 9 + 2002 = 2011$.

Calculăm paranteza dreaptă: $100 : 4 + 5 \cdot 2011 = 25 + 10055 = 10080$.

Reconstituim exerciţiul: $40 \cdot 10080 + 2011 = 403200 + 2011 = 405211$.

Factoriale. Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$ şi se citeşte „*n factorial*". Prin convenţie, $0! = 1$.

Exemple. $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $7! = 5040$.

Suma primelor *n* numere naturale nenule. Sume Gauss

Teoremă. Pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc egalitatea:

$$\boxed{1 + 2 + \ldots + n = n(n+1) : 2.}$$

Într-adevăr, notând cu S suma primelor n numere naturale nenule, avem:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

Adunând membru cu membru cele două relaţii, obţinem:

$$2S = (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \ldots + (n - 1 + 2) + (n + 1),$$

adică $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ paranteze}} = n(n+1)$, de unde rezultă $S = n(n+1) : 2$.

La fel putem proceda pentru a calcula suma unor numere care se obţin numărând din r în r începând de la primul termen al sumei, unde $r \neq 0$ este un număr natural dat.

Exemplu. Calculaţi suma $S = 20 + 23 + 26 + \ldots + 254 + 257$.

Mai întâi aflăm numărul de termeni ai sumei (cu ***metoda contorului***). Termenii sumei sunt din 3 în 3 şi, observând că $20 = 3 \cdot \mathbf{6} + 2$, $23 = 3 \cdot \mathbf{7} + 2 \ldots$, $257 = 3 \cdot \mathbf{85} + 2$, rezultă că numărul termenilor sumei este egal cu numărul de numere naturale de la 6 la 85, adică $85 - 6 + 1 = 80$.

Scriem suma cu termenii aşezaţi în ordine crescătoare, apoi, sub ea, aceeaşi sumă, cu termenii aşezaţi în ordine descrescătoare, după care adunăm termen cu termen.

$$S = 20 + 23 + 26 + \ldots + 254 + 257$$
$$S = 257 + 254 + 251 + \ldots + 23 + 20$$

$$2S = \underbrace{277 + 277 + 277 + \ldots + 277 + 277}_{80 \text{ termeni (numărul termenilor sumei } S)} = 80 \cdot 277 = 22160, \text{ deci } S = 22160 : 2 = 11080.$$

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Scrierea numărului trei sute de mii opt este egală cu … .

2. Cel mai mic număr natural de trei cifre cu cifra zecilor 7 este egal cu … .

3. Aproximarea lui 345672 prin lipsă, la mii este egală cu … .

4. Dintre numerele $a = 102030$, $b = 123450$ şi $c = 102100$ mai mare este … .

5. Cel mai mic număr natural cu produsul cifrelor 12 este egal cu … .

6. Secvenţa 3, 6, 9, 12, ..., 33 conţine un număr de … numere naturale.

7. Numărul numerelor naturale impare de forma $\overline{a2b}$ este egal cu … .

8. Dacă pe axa numerelor sunt reprezentate punctele $O(0), A(11), B(7)$ şi $C(23)$, atunci ordinea punctelor O, A, B, C pe axă este … .

9. Rezultatul calculului $19027 + 9278$ este egal cu … .

10. Rezultatul calculului $1006 - 297$ este egal cu … .

11. Rezultatul calculului $208 \cdot 17$ este egal cu … .

12. Rezultatul calculului $12 - 4 \cdot 2 + 3$ este egal cu … .

13. Dacă $ab + ac = 15$ şi $b + c = 5$, atunci valoarea numărului a este egală cu … .

14. Rezultatul calculului $5 + 10 + 15 + ... + 40$ este egal cu … .

15. Suma a trei numere naturale consecutive este 21. Produsul numerelor este egal cu … .

16. Numărul zerourilor în care se termină produsul primelor 21 de numere naturale nenule este egal cu … .

17. Rezultatul calculului $1^4 + 2^0$ este egal cu … .

18. Numărul pătratelor perfecte din secvenţa 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 este egal cu … .

19. Ultima cifră a numărului 2^{2013} este egală cu … .

20. Dacă $1 + 3 + 5 + ... + 13 = x^2$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu … .

21. Numărul pătratelor perfecte de două cifre este egal cu … .

22. Dintre numerele $a = 2^{33}$ şi $b = 3^{22}$, mai mic este numărul … .

23. Dintre numerele $x = 2^{55}$, $y = 2^{33}$ şi $z = 2^{44}$, cub perfect este numărul … ..

24. Dacă $2^6 \cdot 4^7 \cdot 8^8 = 2^x$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu … .

25. Numărul natural care împărţit la 17 dă câtul 9 şi restul 15 este egal cu … .

26. Suma resturilor posibile ale împărţirii unui număr natural la 5 este egală cu … .

27. Suma a două numere naturale este 32. Împărţind numărul mai mare la cel mai mic obţinem câtul 5 şi restul 2. Numărul mai mic este egal cu … .

28. Numărul numerelor naturale care împărţite la 4 dau câtul 3 este egal cu … .

29. Un număr natural n dă restul 3 la împărţirea cu 4. Restul împărţirii numărului n la 2 este egal cu … .

30. Numărul care împărţit la 7 dă câtul 9 şi restul 5 este egal cu … .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

31. Se ştie că $a + b + c = 7$. Calculaţi:
a) $2a+2b+2c$; ***b)*** $10a+10b+10c$; ***c)*** $a \cdot 13+b \cdot 13+c \cdot 13+21$.

32. Se ştie că $a = 11$ şi $b + c = 8$. Calculaţi:
a) $ab + ac$; ***b)*** $2a + 3b + 3c$; ***c)*** $10a + 9b + 9c$;
d) $ab + ac + 25$; ***e)*** $ab + ac - 34$; ***f)*** $7b + 7c + 9a$;

33. Se ştie că $a + b + c = 23$ şi $x = 9$. Calculaţi:
a) $14a + 14b + 14c + 14x$; ***b)*** $2013 - (53a + 53b + 53c + 10x)$;
c) $349+6a + 6b + 6c - 12x$; ***d)*** $424 - 21x +3a + 3b + 3c$;

34. Calculaţi, scoţând factor comun:
a) $13 \cdot 5 + 13 \cdot 21 + 13 \cdot 40$; ***b)*** $437 \cdot 109 - 437 \cdot 54 + 437 \cdot 203$;
c) $49 \cdot 135 - 49 \cdot 27 + 49 \cdot 11$; ***d)*** $2011 \cdot 5 + 2011 \cdot 7 + 2011 \cdot 49 + 2011 \cdot 39$;

35. Dacă $x = 5$ şi $a + b = 13$, calculaţi:
a) $3 \cdot x + 7 \cdot a + 7 \cdot b$; ***b)*** $xa + xb - 50$;
c) $10 \cdot x - (4 \cdot a + 4 \cdot \mathrm{b})$; ***d)*** $(4a + 4b - 2x)\cdot(2a + 2b + x)$.

36. Calculaţi numărul x ştiind că $a - b = 6$ şi:
a) $x + 3 \cdot a - 3 \cdot b = 20$; ***b)*** $x \cdot a - x \cdot b + 9a - 9b = 654$;
c) $7 \cdot a - 7 \cdot b + x = 55$; ***d)*** $13 + x - (5 \cdot a - 5 \cdot \mathrm{b}) = 2011$.

37. Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $a + b + c = 57$ şi $2a+b+2c=73$, calculaţi $(a + c) \cdot (5 \cdot a + 2 \cdot b + 5 \cdot c)$.

38. ***a)*** Dacă $a+b=20$ şi $b+c=30$, calculaţi $3a+7b+4c$.
b) Dacă $a+b=33$ şi $a+c=11$, calculaţi $5a+3b+2c$.

39. Ştiind că $x+3y=2y+z=14$, calculaţi:
a) $x+5y+z$; ***b)*** $3x+15y+3z$; ***c)*** $5x+11y-2z$; ***d)*** $5x+19y+2z$.

40. Produsul a două numere este 672. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 992. Determinaţi cele două numere.

41. Produsul a două numere este 1530. Micşorând unul dintre ele cu 20, produsul devine 850. Determinaţi cele două numere.

42. Produsul a trei numere consecutive este cu 48 mai mare decât produsul primelor două. Determinaţi cele trei numere naturale.

43. Efectuaţi:
a) $11+8\cdot\{45+4\cdot[3+8\cdot(12\cdot13-8\cdot14)-37]\}+1234$;
b) $(32\cdot15-32\cdot5)+11\cdot12+7\cdot\{124-5\cdot[210-2\cdot(23\cdot17-24\cdot12)]\}$;
c) $12+12\cdot\{12+12\cdot[12+12\cdot(12\cdot12-122)]\}+12\cdot12$;
d) $[100-3\cdot(13\cdot19-12\cdot18)]\cdot\{1+2\cdot[3+4\cdot(5+6\cdot7)]\}$;
e) $2483-23\cdot[15+5\cdot(127-119)]+32\cdot[178-5\cdot(345-328)]$;
f) $\{[19\cdot6-107+12\cdot8]\cdot2-176\}+[5467-16\cdot(324-319)]$.

44. ***a)*** Determinaţi numerele naturale n, pentru care $8^n + 8^{n+1} = 18 \cdot 2^{2003}$.
b) Determinaţi numerele naturale n, pentru care $9^n + 9^{n+1} = 10 \cdot 3^{2012}$.

c) Determinaţi numerele naturale n, pentru care $6^n + 6^{n+3} = 217 \cdot 6^{55}$.
d) Determinaţi numerele naturale n, pentru care $7^{n+1} + 7^{n+2} = 8 \cdot 7^{11}$.

45. *a)* Arătaţi că numărul $a = 2003 + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2002)$ este pătrat perfect.
b) Arătaţi că numărul $b= 1 + 3 + 5 + ... + 2011$ este pătrat perfect.
c) Arătaţi că numărul $a = 81 + 2 \cdot 81 + 3 \cdot 81 + \ldots + 49 \cdot 81$ este pătrat perfect.

46. *a)* Câte pătrate perfecte se găsesc între numerele 100 şi 1000 ?
b) Câte numere naturale pătrate perfecte se află între 2000 şi 3000?

47. Arătaţi că numerele naturale, de forma $5 \cdot (n + 1) + 6^{n+2} + 1001^{n+3} + 5$, nu pot fi pătrate perfecte, pentru orice valoare a numărului natural n.

48. Un număr natural este de 7 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, ştiind că cel mare este mai mare decât 86 şi mai mic decât 94?

49. Un număr natural este de 9 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, ştiind că cel mare este mai mare decât 140 şi mai mic decât 149?

50. Un număr natural este de 13 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, ştiind că cel mare este mai mare decât 140 şi mai mic decât 155?

51. *a)* Determinaţi toate numerele naturale care împărţite la 6 dau câtul 13.
b) Determinaţi toate numerele naturale care împărţite la 9 dau câtul 103.
c) Determinaţi toate numerele naturale care împărţite la 7 dau câtul 32.

52. Suma a trei numere naturale este 121. Împărţind primul număr la al treilea obţinem câtul 10 şi restul 5, iar împărţind al doilea număr la al treilea obţinem câtul 5 şi restul 4. Determinaţi cele trei numere.

53. Suma a trei numere naturale este 135. Împărţind primele două numere la al treilea obţinem câturile 12 şi 31, iar resturile 1 şi respectiv 2. Determinaţi numerele.

54. Un număr este cu 72 mai mare decât alt număr. Împărţind suma lor la diferenţa lor obţinem câtul 5 şi restul 2. Determinaţi cele două numere.

55. *a)* Aflaţi toate numerele naturale nenule care împărţite la 7 dau restul egal cu câtul.
b) Aflaţi numerele naturale nenule care împărţite la 15 dau restul egal cu dublul câtului.
c) Calculaţi suma numerelor naturale care împărţite la 8 dau câtul 5.

56. Suma a trei numere naturale a, b, c este 232. Împărţind a la b obţinem câtul 14 şi restul 5, iar împărţind pe b la c obţinem câtul 7 şi restul 1. Determinaţi numerele.

57. Suma a trei numere naturale este 297. Împărţind primul număr la al doilea obţinem câtul 2 şi restul 25, iar împărţind primul număr la al treilea obţinem câtul 11 şi restul 8. Determinaţi cele trei numere.

58. Diferenţa a două numere naturale este 139. Împărţind numărul mai mare la dublul numărului mai mic obţinem restul 6 şi câtul 10. Determinaţi numerele.

59. Suma a două numere naturale este 334. Împărţind numărul mai mare la triplul numărului mai mic obţinem câtul 36 şi restul 7. Determinaţi numerele.

60. Diferenţa a două numere naturale este 149. Împărţind numărul mai mare la jumătatea numărului mai mic obţinem câtul 16 şi restul 9. Determinaţi numerele.