

Marius Perianu
Cătălin Stănică
Ștefan Smărândoiu
Ioan Balica

Matematică

Clasa a V-a

II



Algebră

I. Frații ordinare

I.1.	Frații ordinare. Noțiuni introductive	8
I.2.	Clasificarea fracțiilor ordinare	12
I.3.	Fracții echivalente	17
I.4.	Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Frații ireductibile	20
	Teste de evaluare	27
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	29
I.5.	Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor	31
I.6.	Compararea și ordonarea fracțiilor ordinare	34
I.7.	Adunarea fracțiilor ordinare	37
I.8.	Scăderea fracțiilor ordinare	41
	Teste de evaluare	45
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	47
I.9.	Înmulțirea fracțiilor ordinare	49
I.10.	Împărțirea fracțiilor ordinare	52
I.11.	Ridicarea la putere a unei fracții ordinare. Reguli de calcul cu puteri	54
	Teste de evaluare	57
	Fișă pentru portofoliul individual (A3)	59
I.12.	Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară	61
	Teste de evaluare	65
	Fișă pentru portofoliul individual (A4)	67
	Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a.	69

II. Frații zecimale

II.1.	Scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă zecimală. Transformarea unei fracții zecimale, cu un număr finit de zecimale nenule, într-o fracție ordinară	74
II.2.	Compararea, ordonarea, reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor zecimale. Aproximări	78
II.3.	Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule	83
	Teste de evaluare	89
	Fișă pentru portofoliul individual (A5)	91
II.4.	Înmulțirea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule	93
II.5.	Ridicarea la putere cu exponent natural a unei fracții zecimale care are un număr finit de zecimale nenule	97
	Teste de evaluare	100
	Fișă pentru portofoliul individual (A6)	101
II.6.	Împărțirea numerelor naturale cu rezultat fracție zecimală. Periodicitate	103
II.7.	Împărțirea a două fracții zecimale	108
II.8.	Ordinea efectuării operațiilor. Aproximări	113
	Teste de evaluare	118
	Fișă pentru portofoliul individual (A7)	119

II.9.	Media aritmetică a două sau mai multe fracții zecimale finite	121
II.10.	Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură	124
	Teste de evaluare	126
	Fișă pentru portofoliul individual (A8)	127
	Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a	129
II.11.	Probleme cu caracter aplicativ	131
II.12.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	135

Geometrie

III. Elemente de geometrie

III.1.	Punctul. Dreapta. Planul	140
III.2.	Semidreapta. Semiplanul	145
III.3.	Segmentul de dreaptă	149
III.4.	Pozițiile relative a două drepte	151
III.5.	Lungimea unui segment	154
	Teste de evaluare	159
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	161
	Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a	163
III.6.	Unghiul	165
III.7.	Clasificarea unghiurilor	170
III.8.	Probleme cu caracter aplicativ	172
III.9.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	175

IV. Unități de măsură

IV.1.	Unități de măsură pentru lungime. Perimetre. Transformări	178
IV.2.	Unități de măsură pentru arie. Aria pătratului și a dreptunghiului. Transformări	181
IV.3.	Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic. Transformări	185
	Teste de evaluare	189
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	193
	Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a	195
IV.4.	Probleme cu caracter aplicativ	197
IV.5.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	200

V. Subiecte pentru evaluările finale

	Variante de subiecte pentru teză	206
	Variante de subiecte pentru evaluarea finală	211
	Teste-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a	215

Soluții		221
---------	--	-----

Competențe generale și specifice

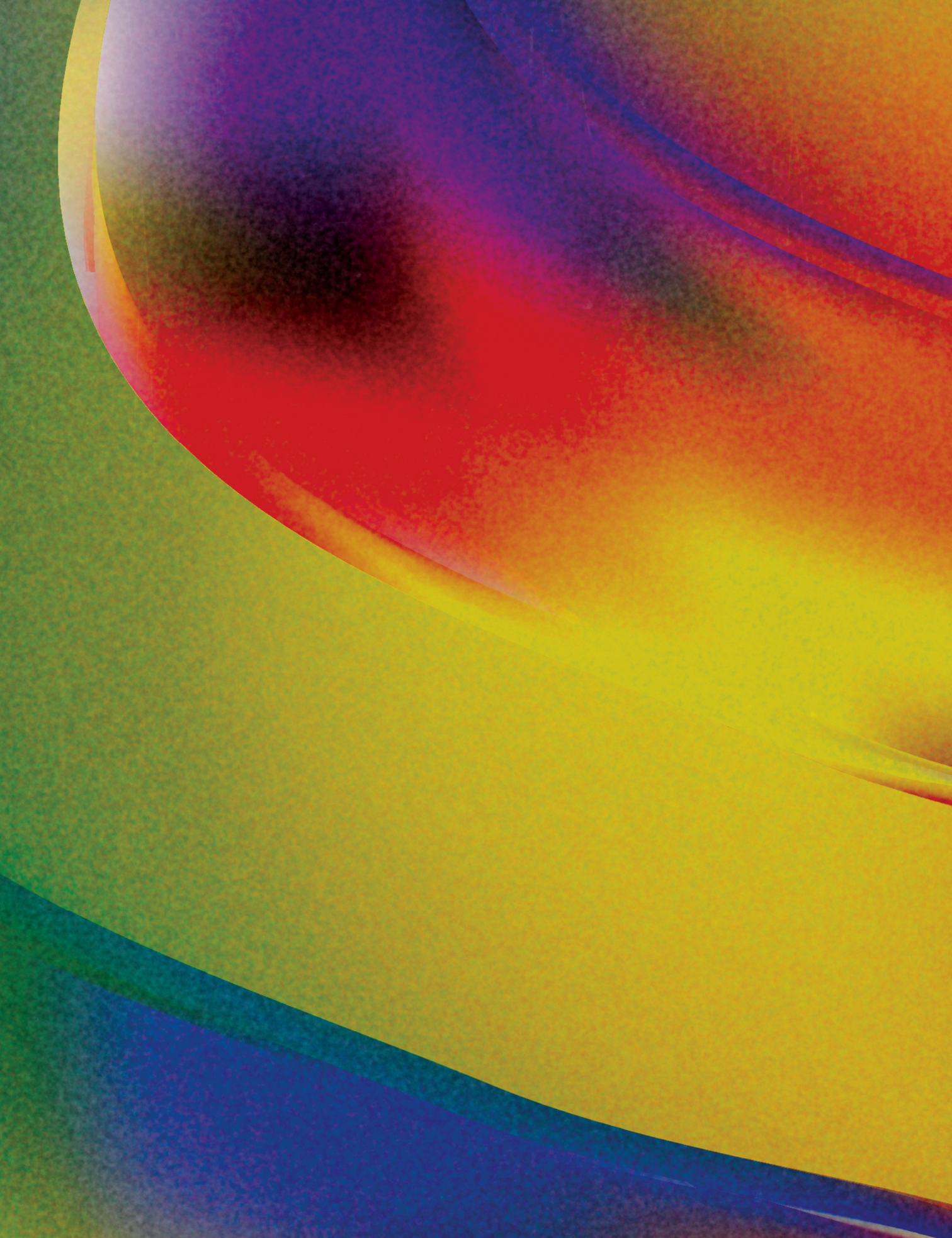
- 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
 - 1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate
 - 1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate
 - 1.3. Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte
- 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
 - 2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora
 - 2.2. Efectuarea de calcule cu fracții folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice
 - 2.3. Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice
- 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
 - 3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate
 - 3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale
 - 3.3. Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare
- 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
 - 4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparații, aproximări, estimări și ale operațiilor cu numere naturale
 - 4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date
 - 4.3. Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură
- 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**
 - 5.1. Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
 - 5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
 - 5.3. Interpretarea prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată
- 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**
 - 6.1. Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului
 - 6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)
 - 6.3. Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unități de măsură și la interpretarea rezultatelor

Algebră

8	I.1	Fracții ordinare. Noțiuni introductive
12	I.2	Clasificarea fracțiilor ordinare
17	I.3	Fracții echivalente
20	I.4	Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile
27		Teste de evaluare
29		Fișă pentru portofoliul individual (A1)
31	I.5	Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor
34	I.6	Compararea și ordonarea fracțiilor ordinare
37	I.7	Adunarea fracțiilor ordinare
41	I.8	Scăderea fracțiilor ordinare
45		Teste de evaluare
47		Fișă pentru portofoliul individual (A2)
49	I.9	Înmulțirea fracțiilor ordinare
52	I.10	Împărțirea fracțiilor ordinare
54	I.11	Ridicarea la putere a unei fracții ordinare. Reguli de calcul cu puteri
57		Teste de evaluare
59		Fișă pentru portofoliul individual (A3)
61	I.12	Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară
65		Teste de evaluare
67		Fișă pentru portofoliul individual (A4)
69		Test-model pentru Evaluarea Națională de la finalul clasei a VI-a

I

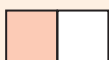
Fracții ordinare



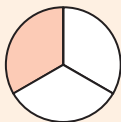
I.1. Frații ordinare. Noțiuni introductive

O parte dintr-un întreg, împărțit în părți egale, se numește *unitate fracționară*.

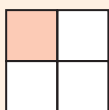
Exemple: Partea colorată din următoarele figuri reprezintă:



o doime sau o jumătate sau unu pe doi; se scrie $\frac{1}{2}$.



o treime sau unu pe trei; se scrie $\frac{1}{3}$.



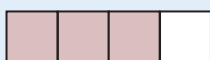
o pătrime sau un sfert sau unu pe patru; se scrie $\frac{1}{4}$.

Una sau mai multe unități fracționare se numește *fracție*. Forma generală a fracției este $\frac{a}{b}$, unde a, b sunt numere naturale și $b \neq 0$.

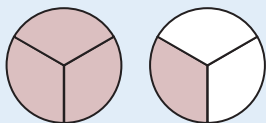
Numărul a se numește *numărător* și arată câte unități fracționare s-au luat; numărul b se numește *numitor* și arată în câte părți egale a fost împărțit întregul; linia orizontală (sau oblică) se numește *linie de fracție*.

Fracția este o pereche de numere naturale, a și b , scrisă sub forma $\frac{a}{b}$ sau a/b , $b \neq 0$.

Exemple: Partea colorată din următoarele figuri reprezintă:



$\frac{3}{4}$; citim *trei pătrimi* sau *trei supra patru* sau *trei pe patru*.



$\frac{4}{3}$; citim *patru treimi* sau *patru supra trei* sau *patru pe trei*.

Exersare



1 Scrieți sub formă de fracție:

a o pătrime;

d o treime;

g o miime;

b o șesime;

e o sutime;

h o milionime;

c o zecime;

f trei optimi;

i două cincimi.

2 Citiți următoarele fracții:

a $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{40}, \frac{1}{19}, \frac{1}{17}, \frac{1}{1000000}$;

b $\frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{9}, \frac{3}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}, \frac{10}{15}, \frac{16}{23}, \frac{24}{10}, \frac{15}{8}, \frac{13}{8}, \frac{12}{7}$.

3 Reprezentați prin desene următoarele fracții: $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$.

4 Scrieți sub formă de fracție:

a trei noimi;

d opt zecimi;

g cinci cincimi;

b cinci șesimi;

e patru cincimi;

h treizeci și șapte de sutimi;

c șapte pătrimi;

f șase pătrimi;

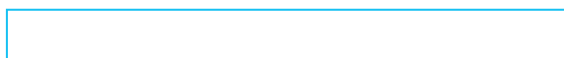
i patru optimi.

Rezolvare: a Trei noimi se scrie $\frac{3}{9}$.

Rezolvă problema chiar aici:



5 Reprezentați, în desene diferite, fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{2}{8}, \frac{6}{8}, \frac{8}{8}$ din întregul următor:



6 Desenați un pătrat cu latura de 3 cm. Colorați cu roșu $\frac{2}{3}$ din el și cu verde $\frac{1}{3}$ din el.

7 Desenați un dreptunghi cu dimensiunile de 6 cm și 4 cm. Colorați din acest dreptunghi fracțiile $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{24}, \frac{3}{12}, \frac{1}{2}$.

8 Scrieți în tabelul de mai jos fracția reprezentată de partea hașurată din desen, ca în exemplul de la d:

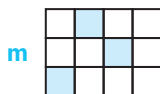
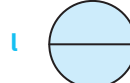
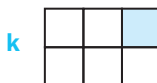
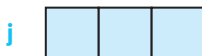
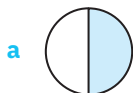


figura	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
fracția				$\frac{2}{8}$									



- 9 Citiți următoarele fracții: $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{9}{12}, \frac{8}{7}, \frac{30}{42}, \frac{9}{16}, \frac{48}{50}, \frac{103}{207}, \frac{83}{96}, \frac{a}{b}, \frac{2x}{5y}$.
- 10 Folosind câte două dintre numerele 3, 5, 7, scrieți toate fracțiile posibile.
- 11 Folosind câte două dintre numerele 6, 4, 10, scrieți toate fracțiile posibile.
- 12 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale mai mici decât 6 și mai mari decât 3.
- 13 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime distincte cuprinse între 10 și 20.
- Rezolvare:** Numerele prime cuprinse între 10 și 20 sunt: 11, 13, 17 și 19. Frațiile care se pot scrie cu aceste numere sunt: $\frac{11}{13}, \frac{11}{17}, \frac{11}{19}, \frac{13}{11}, \frac{13}{17}, \frac{13}{19}, \frac{17}{11}, \frac{17}{13}, \frac{17}{19}, \frac{19}{11}, \frac{19}{13}, \frac{19}{17}$.
- 14 Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale prime diferite, cuprinse între 20 și 40.
- 15 Scrieți în tabelul de mai jos fracția reprezentată de partea hașurată din desen, ca în exemplul **h**:

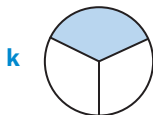
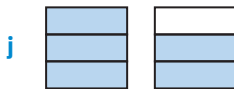
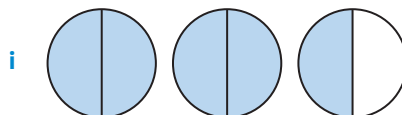
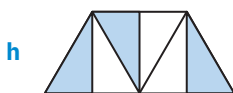
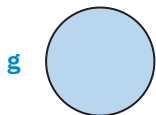
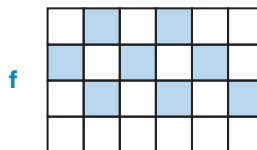
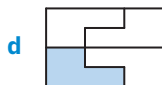
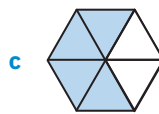


figura	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
fracția								$\frac{3}{6}$			

- 16 Scrieți toate fracțiile care îndeplinesc, simultan, condițiile:
- numărătorul este o cifră pară, nenulă;
 - numitorul este o cifră cu cel puțin 3 mai mare decât numărătorul.

- 17** Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a este divizor al lui 12 și b este divizor al lui 35.
- 18** Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere prime cuprinse între 25 și 45, iar $a < b$.

Aprofundare

- 19** Fie fracția $\frac{23}{2x+1}$. Determinați numărul natural x , pătrat perfect, pentru care fracția are numitorul mai mic decât numărătorul.

Rezolvare: Avem $2x + 1 < 23 \Leftrightarrow 2x < 23 - 1 \Leftrightarrow 2x < 22 \mid : 2 \Leftrightarrow x < 11$. Cum x este pătrat perfect și $x < 11$, rezultă că x poate fi 0, 1, 4, 9.

- 20** Fie fracția $\frac{3x+2}{98}$. Determinați numărul natural x , pătrat perfect, pentru care fracția are numitorul mai mare decât numărătorul.

- 21** Scrieți toate fracțiile $\frac{a}{b}$, unde a este pătratul unui număr natural, b este cubul unui număr natural și $0 < a < 37$, $0 < b < 38$.

- 22** Scrieti toate fractiile care îndeplinesc, simultan, conditiile:

- numărătorul este o cifră impară;
- numitorul este o cifră pară nenulă mai mare decât numărătorul cu cel mult 5.

Rezolvă problema chiar aici:

- 23** Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{\overline{ab+5}}{\overline{ba+6}}$, care au proprietatea că suma dintre numărător și numitor este pătrat perfect.

Probleme de şapte stele

- 24** Determinați numărul perechilor de fracții $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ astfel încât $a \cdot a = b \cdot c = 6$.

- 25** Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{1}{ab+bc+ca}$.

- 26 a** Determinați numărul fracțiilor de forma $\frac{128}{ab}$.

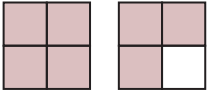
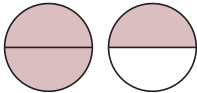
- b** Dintre fracțiile găsite la punctul anterior, aflați-le pe cele care au proprietatea că numărătorul și numitorul au cel puțin un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

I.2 Clasificarea fracțiilor ordinare

Fie a și b două numere naturale, cu $b \neq 0$. Frația $\frac{a}{b}$ se numește:

- *echiunitară*, dacă $a = b$ (numărătorul este egal cu numitorul);
- *subunitară*, dacă $a < b$ (numărătorul este mai mic decât numitorul);
- *supraunitară*, dacă $a > b$ (numărătorul este mai mare decât numitorul).

Exemple:

Fracții echiunitare	Fracții subunitare	Fracții supraunitare
 $\frac{4}{4}$ (patru pătrimi)	 $\frac{1}{4}$ (o pătrime)	 $\frac{7}{4}$ (șapte pătrimi)
 $\frac{3}{3}$ (trei treimi)	 $\frac{3}{5}$ (trei cincimi)	 $\frac{3}{2}$ (trei doimi)
$\frac{8}{8}, \frac{11}{11}, \frac{23}{23}, \frac{100}{100}, \frac{205}{205}$	$\frac{7}{10}, \frac{1}{13}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{307}{3008}$	$\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{8}{6}, \frac{8}{7}, \frac{100}{25}$

Exersare



- 1 Completați numărătorul sau numitorul lipsă, astfel încât să obțineți fracții echiunitare:

$$\frac{6}{\square}, \frac{11}{\square}, \frac{\square}{13}, \frac{10}{\square}, \frac{13}{\square}, \frac{\square}{25}, \frac{\square}{103}$$

- 2 Dați câte trei exemple de:

- fracții echiunitare;
- fracții subunitare cu numărătorul 7;
- fracții subunitare cu numitorul 12;
- fracții supraunitare cu numitorul 10;
- fracții supraunitare cu numărătorul 20.

- 3 Scrieți fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare din șirul de fracții:

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{4}, \frac{3}{5}, \frac{11}{12}, \frac{9}{8}, \frac{9}{10}, \frac{14}{20}, \frac{31}{30}, \frac{90}{91}, \frac{103}{33}, \frac{405}{504}$$

4 În următorul șir de fracții, subliniați-le pe cele supraunitare:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{17}{16}, \frac{23}{20}, \frac{41}{43}, \frac{70}{60}, \frac{51}{41}, \frac{83}{15}, \frac{99}{103}, \frac{86}{68}, \frac{15}{105}.$$

5 În următoarea secvență de fracții, subliniați cu o linie fracțiile subunitare și cu două linii pe cele supraunitare:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, -, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{4}, \frac{3}{6}, \frac{6}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{10}, \frac{9}{10}, \frac{23}{15}, \frac{54}{27}, \frac{18}{41}, \frac{43}{43}, \frac{72}{71}, \frac{86}{86}, \frac{97}{79}.$$

6 Aflați, în fiecare caz, numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt echiunitare:

a $\frac{x}{4}$;

b $\frac{x+1}{7}$;

c $\frac{x-2}{10}$;

d $\frac{6}{2x}$;

e $\frac{14}{x+2}$;

f $\frac{23}{x-1}$;

g $\frac{104}{20x+4}$;

h $\frac{3x+2}{2x+3}$.

7 Determinați, în fiecare caz, valorile numărului natural x pentru care fracțiile următoare sunt supraunitare:

a $\frac{4}{x}$;

b $\frac{x+1}{7}$;

c $\frac{x-2}{10}$;

d $\frac{6}{2x}$.

8 Aflați numărul natural x pentru care fracțiile următoare sunt subunitare:

a $\frac{x}{3}$;

b $\frac{x+12}{17}$;

c $\frac{11}{x-2}$;

d $\frac{13}{4x}$.

9 Indicați patru numere naturale care, puse în locul lui x în fracția $\frac{x}{13}$, determină o fracție subunitară.

Rezolvare: Frația este subunitară dacă numărătorul este mai mic decât numitorul, adică $x < 13$. Prin urmare x poate fi unul dintre numerele 0, 1, 2, ..., 12. Putem lua oricare patru dintre aceste valori; spre exemplu, pentru $x = 2$, $x = 5$, $x = 8$ și $x = 11$ se obțin fracțiile subunitare $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{8}{13}$

și $\frac{11}{13}$.

10 Arătați că fracția $\frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}}{\overline{ac} + \overline{cb} + \overline{ba}}$ este echiunitară.

11 Pentru câte numere naturale n fracția $\frac{8}{n+1}$ este supraunitară?

12 Se consideră fracțiile:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{3}{7}, \frac{8}{6}, \frac{7}{3}, \frac{6}{6}, \frac{9}{8}, \frac{8}{10}, \frac{8}{12}, \frac{9}{9}, \frac{11}{13}, \frac{14}{14}, \frac{15}{12}, \frac{23}{14}, \frac{39}{93}, \frac{74}{47}, \frac{103}{81}, \frac{205}{502}.$$

Selectați dintre acestea:

a fracțiile subunitare; b fracțiile echiunitare; c fracțiile supraunitare.

Consolidare



13 Care dintre următoarele fracții sunt subunitare: $\frac{1}{7}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{4}{6}, \frac{9}{8}, \frac{7}{8}, \frac{20}{3}, \frac{31}{15}$?

14 Care dintre următoarele fracții sunt supraunitare: $\frac{2}{5}, \frac{6}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{5}, \frac{3}{12}, \frac{13}{10}, \frac{71}{59}, \frac{60}{90}$?

- 15** La câte dintre fracțiile $\frac{3}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{6}, \frac{18}{13}, \frac{24}{53}, \frac{60}{60}, \frac{35}{104}, \frac{8}{8}, \frac{19}{14}$ trebuie să modificăm numărătorii pentru ca toate să devină, după modificare, fracții echiunitare?
- 16** Pentru câte numere naturale n fracția $\frac{n+3}{27}$ este subunitară?
- 17** Determinați numerele naturale n care verifică simultan condițiile:
- a** $\frac{n+1}{5}$ este fracție supraunitară; **b** $\frac{n+7}{20}$ este fracție subunitară.
- Rezolvare:** Fracția $\frac{n+1}{5}$ este supraunitară dacă $n+1 > 5$, adică $n > 4$. Fracția $\frac{n+7}{20}$ este subunitară dacă $n+7 < 20$, adică $n < 13$. Obținem $4 < n < 13$, deci n poate lua valorile 5, 6, 7, ..., 11, 12.
- 18** Determinați numerele naturale n care verifică simultan condițiile:
- a** $\frac{n+2}{15}$ este fracție subunitară; **b** $\frac{n+1}{7}$ este fracție supraunitară.
- 19** Folosind ca numitori și numărători oricare două dintre numerele 3, 5, 6 și 9, scrieți toate fracțiile:
- a** subunitare; **b** supraunitare.
- 20** Subliniați fracțiile subunitare:
- $$\frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{8}{18}, \frac{23}{21}, \frac{6}{4}, \frac{8}{10}, \frac{3}{13}, \frac{50}{25}, \frac{16}{32}, \frac{8}{40}, \frac{47}{47}, \frac{302}{120}, \frac{a}{5a}.$$
- 21** Câte numere naturale n există astfel încât fracția $\frac{17}{2n+3}$ să fie supraunitară?
- 22** Dați exemplu de o fracție echiunitară care să aibă la numărător cubul unui număr natural, iar la numitor pătratul unui număr natural.

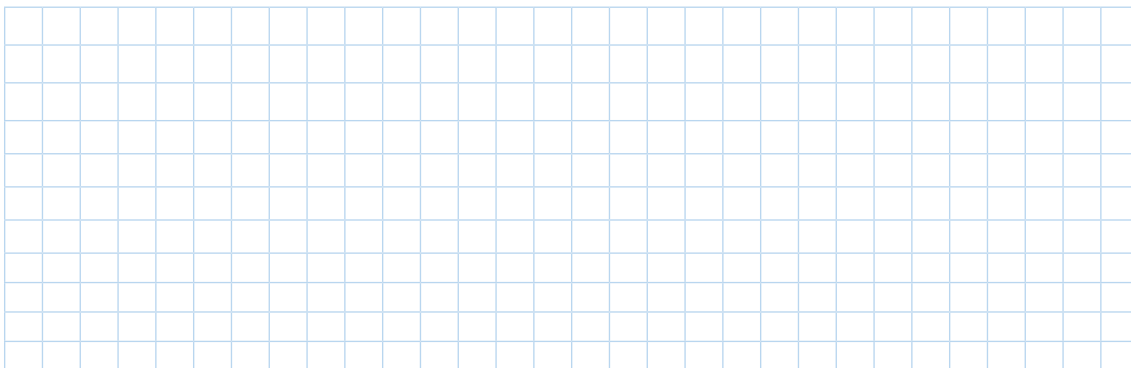
Rezolvă problema chiar aici:

- 23** Determinați numerele naturale nenule a și b astfel încât $\frac{a+b}{6}$ să fie echiunitară.
- 24** Determinați numerele naturale a și b pentru care fracția $\frac{2a+3b}{12}$ este:
- a** echiunitară; **b** subunitară.
- 25** Determinați numerele naturale a și b , nu ambele nule, astfel încât fracția $\frac{35}{2a+7b}$ să fie echiunitară, iar suma $a+b$ să fie minimă.
- Rezolvare:** Frația $\frac{35}{2a+7b}$ este echiunitară dacă $2a+7b=35$. Atunci b este număr impar (dacă b ar fi par, suma $2a+7b$ ar fi și ea număr par, deci nu poate fi egală cu 35).

- Dacă $b=1 \Rightarrow 2a+7=35 \Rightarrow a=14 \Rightarrow a+b=15$.
 - Dacă $b=3 \Rightarrow 2a+21=35 \Rightarrow a=7 \Rightarrow a+b=10$.
 - Dacă $b=5 \Rightarrow 2a+35=35 \Rightarrow a=0 \Rightarrow a+b=5$.
 - Dacă $b>5$, atunci fracția nu mai este echiunitară.
- Numerele cerute sunt $a=0$ și $b=5$.

- 26** Determinați numerele naturale a și b , nu ambele nule, astfel încât fracția $\frac{53}{4a+3b}$ să fie echiunitară și suma $a+b$ să fie maximă.

Rezolvă problema chiar aici:



Aprofundare



- 27 a** Determinați numerele naturale a, b, c astfel încât fracția $\frac{4}{a^2+b^2+c^2}$ să fie supraunitară.
- b** Determinați numerele naturale a, b, c , astfel încât fracția $\frac{5}{a^2+b^2+c^2}$ să fie echiunitară.
- c** Determinați numerele naturale a și b pentru care fracția $\frac{9}{a^2+b^2+4}$ este echiunitară.

Rezolvare: **a** Frația dată este supraunitară dacă $4 > a^2 + b^2 + c^2$. Numerele a, b, c pot fi cel mult egale cu 1, dar nu pot fi toate egale cu 0. Cazurile se pot organiza în tabelul:

a	b	c	Discuție
1	1	1	toate sunt egale cu 1
1	1	0	două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 1 și al treilea este egal cu 0
1	0	1	
0	1	1	
1	0	0	două dintre numerele a, b, c sunt egale cu 0 și al treilea este egal cu 1
0	1	0	
0	0	1	

- 28 a** Determinați fracțiile subunitare de forma $\frac{\overline{x6}}{3\overline{y}}$ știind că numărătorul $\overline{x6}$ este pătrat perfect, iar numitorul $3\overline{y}$ este număr prim.
- b** Determinați fracțiile supraunitare de forma $\frac{\overline{6x}}{y\overline{7}}$, știind că numărătorul $\overline{6x}$ este pătrat perfect, iar numitorul $y\overline{7}$ este număr prim.

Rezolvare: a Frația $\frac{\overline{x6}}{3y}$ este subunitară dacă $\overline{x6} < \overline{3y}$, de unde $x = 1$ sau $x = 2$. Pentru $x = 1$, rezultă $\overline{x6} = 16 = 4^2$, iar pentru $x = 2$, numărul $\overline{x6} = 26$ nu este pătrat perfect. Numerele prime de forma $\overline{3y}$ sunt 31 și 37. Frațiile căutate sunt $\frac{16}{31}$ și $\frac{16}{37}$.

- 29** Andrei scrie pe tablă toate fracțiile de forma $\frac{a}{8}$, cu proprietatea că $a \mid 8$. Bianca scrie toate fracțiile de forma $\frac{8}{b}$, cu proprietatea că $b \mid 8$. Corina scrie toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, unde $a \mid 4$ și $b \mid 6$. Determinați fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare scrise de fiecare dintre cei trei copii.

- 30** Fie șirul de fracții ordinare:

$$\frac{1}{2017}, \frac{2}{2016}, \frac{3}{2015}, \frac{4}{2014}, \dots, \frac{2015}{3}, \frac{2016}{2}, \frac{2017}{1}.$$

Scrieți fracțiile echiunitare, fracțiile subunitare și fracțiile supraunitare din acest șir.

Probleme de șapte stele



- 31 a** Știind că fracția $\frac{\overline{ab5} + 12}{2ab + 123}$ este echiunitară, determinați $a + b$.
- b** Știind că fracția $\frac{\overline{ab5} + 12}{2ab + 123}$ este subunitară, determinați valoarea maximă a sumei $a + b$.
- 32** Arătați că fracția $\frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{2010}}{(32^{1608})^{251}}$ este supraunitară.
- 33** Fie secvența de fracții $\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{20}{24}$.
- a** Determinați numărul termenilor secvenței date.
- b** Determinați numărul fracțiilor subunitare din secvența dată.
- c** Determinați numărul fracțiilor supraunitare din secvența dată.