Mircea Fianu
Marius Perianu
Ioan Balica

Matematică

Clasa a VIII-a

II

art
educațional

Cuprins

Algebră

Geometrie

Competențe generale

1 Identificarea unor date şi relații matematice şi corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite

- **1.1** Identificarea în exemple, în exerciții sau în probleme a numerelor reale şi a formulelor de calcul prescurtat
- **1.2** Recunoaşterea unor corespondențe care sunt funcții
- **1.3** Recunoaşterea şi descrierea unor proprietăți ale unor figuri geometrice plane în configurații date în spațiu sau pe desfăşurări ale acestora
- **1.4** Identificarea unor elemente ale figurilor geometrice plane în configurații geometrice spațiale date

2 Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice

- **2.1** Utilizarea în exerciții a definiției intervalelor de numere reale şi reprezentarea acestora pe axa numerelor
- **2.2** Utilizarea valorilor unor funcții în rezolvarea unor ecuații şi a unor inecuații
- **2.3** Folosirea instrumentelor geometrice adecvate pentru reprezentarea, prin desen, în plan, a corpurilor geometrice
- **2.4** Calcularea ariilor şi volumelor corpurilor geometrice studiate

3 Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete

- **3.1** Alegerea formei de reprezentare a unui număr real şi utilizarea de algoritmi pentru optimizarea calculului cu numere reale
- **3.2** Reprezentarea în diverse moduri a unor corespondențe şi/ sau a unor funcții în scopul caracterizării acestora
- **3.3** Utilizarea proprietăților referitoare la drepte şi unghiuri în spațiu pentru analizarea pozițiilor relative ale acestora
- **3.4** Clasificarea corpurilor geometrice după anumite criterii date sau alese

4 Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora

- **4.1** Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers, parte întreagă, parte fracționară) în contexte variate
- **4.2** Exprimarea prin reprezentări grafice a unor noțiuni de geometrie plană
- **4.3** Exprimarea prin reprezentări geometrice a noțiunilor legate de drepte şi unghiuri în plan şi în spațiu
- **4.4** Exprimarea proprietăților figurilor şi corpurilor geometrice în limbaj matematic (axiomă, teoremă directă, teoremă reciprocă, ipoteză, concluzie, demonstrație)

5 Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă

- **5.1** Deducerea şi aplicarea formulelor de calcul prescurtat pentru optimizarea unor calcule
- **5.2** Determinarea soluțiilor unor ecuații, inecuații sau sisteme de ecuații
- **5.3** Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării descrierii configurațiilor spațiale şi în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente şi de măsuri de unghiuri
- **5.4** Analizarea şi interpretarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică să verifice anumite cerințe

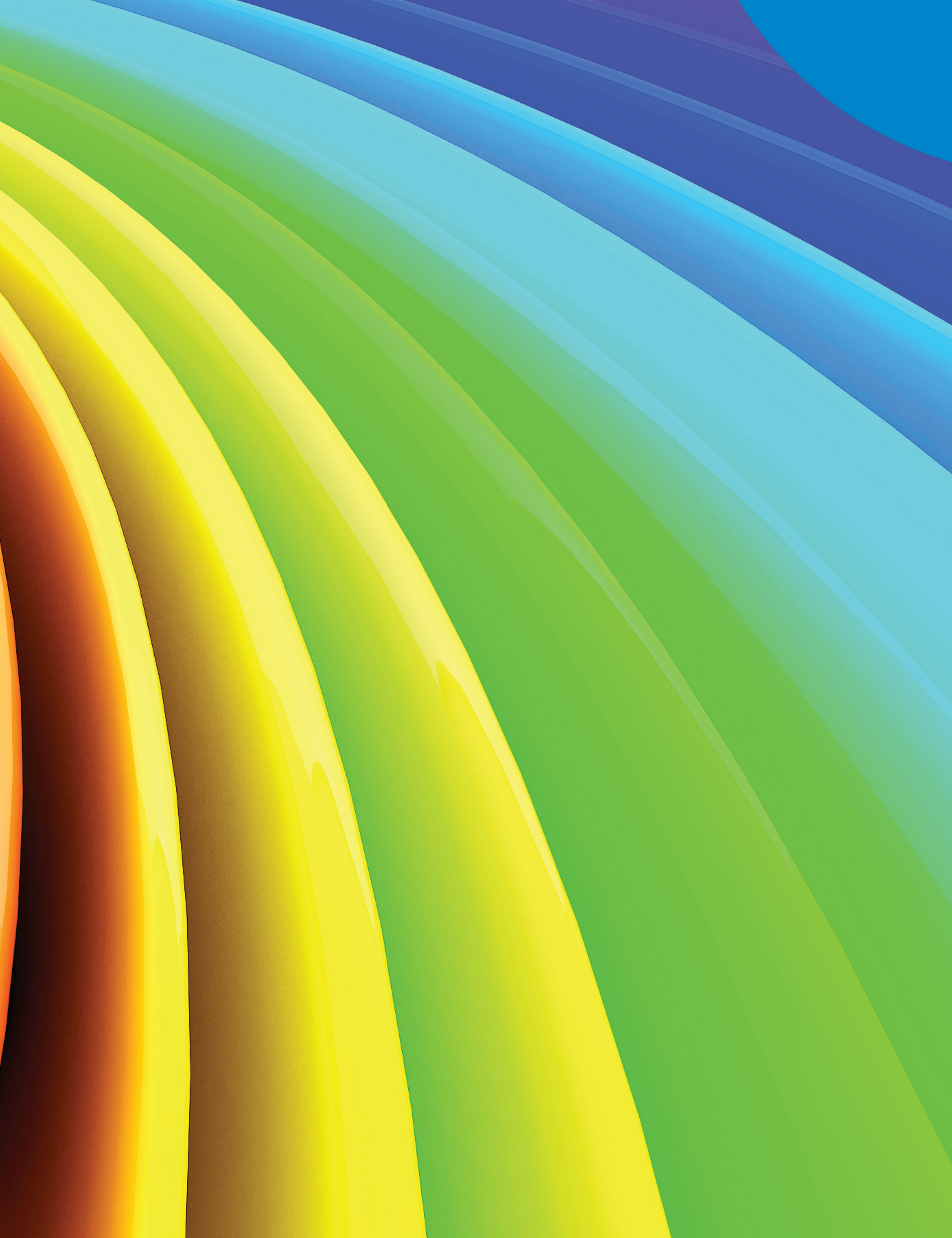
6 Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoştințelor din diferite domenii

- **6.1** Rezolvarea unor situații problemă utilizând rapoarte de numere reale reprezentate prin litere; interpretarea rezultatului
- **6.2** Identificarea unor probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, inecuațiilor sau a sistemelor de ecuații, rezolvarea acestora şi interpretarea rezultatului obținut
- **6.3** Interpretarea reprezentărilor geometrice şi a unor informații deduse din acestea, în corelație cu determinarea unor lungimi de segmente şi a unor măsuri de unghiuri
- **6.4** Transpunerea unor situații-problemă în limbaj geometric, rezolvarea problemei obținute şi interpretarea rezultatului

Algebră

I

Funcții



I.1. Noțiunea de funcție

Definiție. Fie A şi B două mulțimi nevide. Prin *funcție f definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B* se înțelege orice lege (regulă, procedeu, convenție) prin care fiecărui element $x \in A$ i se asociază un singur element $y = f(x) \in B$.

Prin $f : A \to B$ vom nota o funcție definită pe A cu valori în B. Mulțimea A se numeşte *domeniul de definiție* al funcției f, mulțimea B se numeşte *domeniul de valori* sau *codomeniul* funcției f, iar procedeul (regula) $y = f(x)$ se numeşte *legea de corespondență* a funcției f. Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numeşte *imaginea* lui x prin funcția f sau *valoarea funcției f* în punctul x.

Imaginea funcției. Fie $f : A \to B$ o funcție. *Imaginea* (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea: $\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\mathrm{Im}\, f \subset B$.

Putem scrie şi astfel: $\mathrm{Im}\, f = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\}$.

Graficul funcției. Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ se numeşte *graficul funcției f*. Avem şi $G_f = \{(x,y) \mid x \in A, y = f(x)\} \subset A \times B$.

Funcția numerică este o funcție ale *cărei domeniu de definiție şi domeniu de valori sunt submulțimi ale lui* $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere).

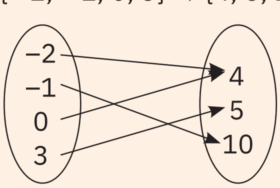
Reprezentarea geometrică a graficului. Dacă $f : A \to B$ este o funcție numerică, fiecărui element $(x,y) \in G$, îi putem asocia un punct $M(x,y)$ într-un reper cartezian. Submulțimea planului formată din toate punctele $M(x,y)$, cu $(x,y) \in G$ se numeşte *reprezentarea geometrică* a graficului funcției f.

Funcții egale. Două funcții $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sunt *egale* dacă $A = C$, $B = D$ şi $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Notăm: $f = g$.

Moduri de definire a unei funcții. Funcțiile pot fi descrise în diverse moduri:

1 Printr-o ***diagramă***.

$f : \{-2; -1; 0; 3\} \to \{4; 5; 10\}$,



2 Printr-un ***tabel***.

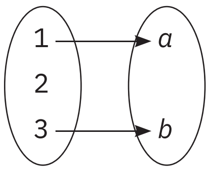
$g : \{-1; 0; 2; 5\} \to \{1; 2; 3\}$.

x	−1	0	2	5
$f(x)$	1	2	3	1

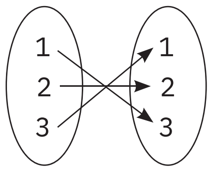
3 Prin una sau mai multe formule analitice:

$h : \{0,2,4\} \to \{0,4,16\},\ h(x) = x^2$; $\quad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(x) = \begin{cases} 3x - 5, \text{ dacă } x \le 1 \\ 2x + 3, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$.

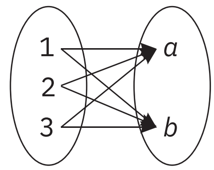
1 Precizați care dintre următoarele diagrame definesc funcții:



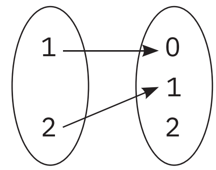
a



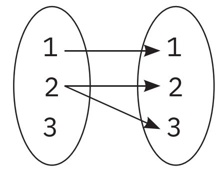
b



c



d



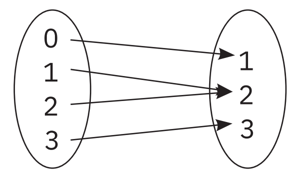
e

2 Explicați de ce tabelul alăturat **nu** descrie o funcție.

x	–1	0	1	2	1
$f(x)$	0	3	4	5	6

3 Precizați dacă scrierea $f:\{-1;0;1;2\}\to\{0;1;2;3;4\}$, $f(x)=x+1$, reprezintă o funcție.

4 În imaginea alăturată este descrisă funcția $f:A\to B$.



a Precizați elementele mulțimilor A și B.
b Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} f$.
c Scrieți elementele mulțimii G_f.

5 Tabloul alăturat descrie o funcție $f:A\to B$.

x	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–4	0	4	8	12

a Determinați mulțimea A.
b Scrieți mulțimea $\operatorname{Im} f$.
c Descrieți corespondența $x\to f(x)$ printr-o formulă.

6 Explicați dacă mulțimea indicată reprezintă graficul unei funcții definite pe mulțimea $\{-2;-1;0;1;2\}$ cu valori în $\mathbb{R}$. În caz afirmativ, descrieți funcția printr-o diagramă.

a $G_f=\{(-2;0);(-1;0);(0;1);(1;1);(2;2)\}$;
b $G_g=\{(-2;-1);(-2;0);(-1;-1);(0;-1);(1;2)\}$;
c $G_h=\{(-2;1);(-1;-1);(0;-1);(1;1);(1;2);(2;1)\}$.

7 **a** Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $S=\{f;b\}$.
b Descrieți trei funcții definite pe mulțimea E a elevilor din clasa voastră cu valori în mulțimea $\mathbb{N}$.

Indicație: $f:E\to\mathbb{N}$, $f(e)=$ numărul curent din catalog al elevului e.

8 Descrieți trei funcții definite pe mulțimea $N=\{23;157;4;2000;145\}$ cu valori în mulțimea $C=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$;

Indicație: Ultima cifră a numărului 23 este 3. Definim $u(23)=3$.

9 Descrieți trei funcții s definite pe mulțimea $N=\{157;59;1002;8\}$ cu valori în mulțimea $S=\{3;4;8;9;13;14\}$.

Indicație: Suma cifrelor numărului 157 este egală cu 13. Definim $s(157)=13$.

10 Descrieți, în mod natural, o funcție f definită pe mulțimea $F=\left\{\frac{15}{24};\frac{34}{51};\frac{108}{56};\frac{225}{125}\right\}$ cu valori în mulțimea $I=\left\{\frac{9}{5};\frac{2}{3};\frac{5}{8};\frac{27}{14}\right\}$.

Indicație: $\frac{15^{(3}}{24}=\frac{5}{8}$.

11 Stabiliți pentru care din următoarele funcții are loc relația $-2 \in \operatorname{Im} f$:

a $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-11$; **b** $f:\{-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$.

c $f:[-3,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-3$; **d** $f:\left(-\frac{5}{4},+\infty\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+3$.

Indicație: **a** Dacă $-2\in\operatorname{Im} f$, atunci există $x\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x)=-2$, adică $x^2-11=-2$, de unde $x=3$. Aşadar, deoarece $f(3)=-2$, rezultă $-2\in\operatorname{Im} f$.

Consolidare

12 Fie mulțimile $R=\left\{3{,}14;\frac{7}{3};4;-1;-2\frac{1}{10};\sqrt{10}\right\}$ şi $I=\{-3;-1;1;2;3;4\}$.

a Descrieți prin tabel şi precizați imaginea funcției $i:R\to I$, $i(x)=[x]$.
b Scrieți elementele mulțimii G_i.

13 Fie mulțimile $R=\left\{7{,}2;3\frac{1}{2};5;-1{,}4;-\frac{1}{3}\right\}$ şi $F=\{0;0{,}2;0{,}5;0{,}6;0{,}(6)\}$.

a Descrieți prin tabel şi precizați imaginea funcției $z:R\to F$, $z(x)=\{x\}$.
b Scrieți elementele mulțimii G_z.

14 Se consideră mulțimile $M=\{28;55;27;39\}$ şi $N=\{9;17;13;4;5\}$. Verificați dacă asocierea: „oricare $x\in M$, $x\to y=f(x)\in N$, unde $f(x)$ este divizor al lui x“, reprezintă o funcție definită pe mulțimea M cu valori în mulțimea N.

15 Se consideră mulțimile $A=\left\{-2;\frac{7}{5};-\pi;0;\sqrt{3}\right\}$ şi $S=\{-1;0;1\}$.

a Descrieți printr-un tabel funcția $\sigma:A\to S$, $\sigma(x)=\begin{cases}-1,\ \text{pentru } x<0\\ 0,\text{pentru } x=0\\ 1,\ \text{pentru } x>0\end{cases}$.

b Precizați imaginea funcției σ şi scrieți elementele mulțimii G_σ.

16 Se consideră mulțimile $A=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ şi $M=\{0;1;2;3\}$.

a Descrieți prin tabel şi precizați imaginea funcției $m:A\to M$, $m(x)=|x|$.
b Scrieți elementele mulțimii G_m.
c Reprezentați geometric mulțimea G_m.

17 Se consideră mulțimea $A=\left\{0;1;\frac{4}{9};1\frac{9}{25};10{,}24;11\right\}$ şi funcția $r:A\to\mathbb{R}$, $r(x)=\sqrt{x}$.

a Scrieți elementele mulțimii $\operatorname{Im} r$ şi efectuați $\mathbb{Q}\cap\operatorname{Im} r$.
b Descrieți printr-o formulă o funcție $p:\operatorname{Im} r\to A$.

18 Se consideră mulțimea $U=\{30°,45°,60°\}$. Determinați imaginile funcțiilor:

a $s:U\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sin x$; **b** $t:U\to\mathbb{R}$, $t(x)=\operatorname{tg} x$.

19 Fie $I=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a\in\mathbb{N}^*,b\in\mathbb{N}^*,(a;b)=1\right\}$ şi funcția $f:I\to\mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{y}\right)=x+y$.

a Determinați imaginea mulțimii $A=\left\{\frac{1}{9};\frac{99}{1};\frac{153}{152}\right\}$.

b Arătați că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}, n>1$, există $t\in I$ astfel încât $f(t)=n$.

20 Se consideră funcția $s:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ s(x;y)=x+y$. Calculați:

a $s(0;-3)$; **b** $s(3;-3)$; **c** $s(-8;-7)$;

d $s\left(0{,}5;\frac{-3}{2}\right)$; **e** $s\left(1-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$; **f** $s\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

21 Se consideră funcția $p:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p(x;y)=x\cdot y$. Calculați:

a $p(7;-1)$; **b** $p(-2;-2)$; **c** $p\left(1\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$;

d $p\left(\sqrt{7};-\sqrt{28}\right)$; **e** $p\left(\sqrt{2}-\sqrt{3};\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; **f** $p\left(2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

22 Arătați că următoarele funcții sunt egale:

a $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$ şi $g(x)=(x-|x|)(x+|x|)$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a;

b $f,g:(-1,0)\cup(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$ şi $g(x)=\frac{|x|-x}{2x}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a;

c $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|1-x|+|1+x|$ şi $g(x)=\max(2,x+1)$;

d $f,g:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|2-x|-|2+x|$ şi $g(x)=\min(-2x,4)$.

e $f,g:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min(x,x^2)$ şi $g(x)=\max(x^2,x^3)$.

f $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2|x|$ şi $g(x)=\left(\sqrt{x^2}+1\right)^2-\sqrt{(x^2+1)^2}$;

23 Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=$ ultima cifră a numărului natural x.

a Determinați mulțimea $\operatorname{Im} f$.

b Calculați suma $S=f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(105)$.

24 Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=$ ultima cifră a numărului natural 2^n.

a Determinați mulțimea $\operatorname{Im} f$.

b Calculați suma $S=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2012)$.

25 **a** Descrieți trei funcții definite pe mulțimea T a triunghiurilor din planul α cu valori în mulțimea C a cercurilor din planul α.

b Descrieți trei funcții definite pe mulțimea triunghiurilor T din planul α cu valori în mulțimea P a punctelor din planul α.

c Fie A un punct dat în planul α. Se consideră mulțimea C_A a cercurilor din planul α care conțin punctul A şi mulțimea T a triunghiurilor din planul α. Descrieți trei funcții definite pe mulțimea C_A cu valori în mulțimea T.

Exemple: **a** $o:T\to C$, $o(t)=$ cercul circumscris triunghiului t, oricare ar fi $t\in T$.

b $h:T\to P$, $h(t)=$ ortocentrul triunghiului t, oricare ar fi $t\in T$.

c $e:C_A\to T$, unde $e(c)=$ triunghiul echilateral AXY înscris în cercul c.

Aprofundare

26 **a** Descrieți prin diagrame toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea $A=\{a;b;c\}$ cu valori în mulțimea $B=\{0;1\}$.

b Descrieți prin diagrame toate funcțiile care pot fi definite pe mulțimea $A=\{a;b\}$ cu valori în mulțimea $B=\{-1;0;1\}$.

27 Determinați imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^{[x]}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

28 Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(2x+1)=-2x+5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, determinați valoarea numărului $f(2011)$.

29 Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(x^2)=2x+5$, pentru orice $x>0$. Determinați valoarea numărului $f(1)+f(2)+f(4)+f(8)$.

30 Stabiliți care dintre următoarele funcții sunt egale:

a $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ *și* $g(x)=x(x-1)(x-2)+1$;

b $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(4^n)$ și $g(n)=5+(-1)^n$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

c $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(9^n)$ și $g(n)=5+4\cdot(-1)^{n+1}$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

d $f,g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$, $f(n)=u(6^n)-u(5^n)$ și $g(n)=1$, unde $u(a)$ reprezintă ultima cifră a numărului natural a.

31 Determinați numerele *a*, *b*, *c*, *d*, pentru care funcțiile *f* și *g* să fie egale, unde:

a $f:[-3;a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3c-2)x-5$, $g:[b;11]\to\mathbb{R}$, $g(x)=7x+d-4$;

b $f:[2a-5;13]\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-4c-17$, $g:[3;2b+1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=dx-1$;

c $f:[a-1,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=bx-1$, $g:[c-3,2a+1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x+d-5$.

Probleme de șapte stele

32 Demonstrați că, pentru orice funcție $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=ax+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$, este adevărată relația $a-b \mid f(a)-f(b)$.

33 Funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ are proprietățile:

a $f(0)=1$;

b $f\left(f(n)\right)=f(n)+1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Determinați $f(2020)$.

34 **a** Se consideră mulțimile $A=\{0;1;2;...;12\}$ și $B=\{-1;0;1\}$. Determinați numărul de funcții ce pot fi definite pe mulțimea *A* cu valori în mulțimea *B*.

b Arătați că, dacă mulțimea *A* are *n* elemente, $n\geq 1$, iar mulțimea *B* are *m* elemente, $m\geq 1$, atunci numărul de funcții care se pot defini pe mulțimea *A* cu valori în mulțimea *B* este egal cu m^n.

c Se consideră mulțimile finite și nevide *A* și *B*. Dacă numărul de funcții care pot fi definite pe mulțimea *A* cu valori în mulțimea *B* este 4^5, determinați $\text{card}A$ și $\text{card}B$. Analizați variantele posibile.

35 Pentru fiecare funcție $f:\{0;1;2;...;12\}\to\{-1;0;1\}$, notăm :

$$S_f=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(12).$$

a Descrieți două funcții $o:\{0;1;2;...;12\}\to\{-1;0;1\}$ pentru care $S_o=0$;

b Descrieți o funcție $m:\{0;1;2;...;12\}\to\{-1;0;1\}$ pentru care S_m are valoarea maximă.

c Arătați că, dacă o funcție $f:\{0;1;2;...;12\}\to\{-1;0;1\}$ are proprietatea că $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot...\cdot f(12)\neq 0$, atunci $S_f\neq 0$.

I.2 Funcții definite pe mulțimi finite

Exersare

1 Determinați mulțimea valorilor funcției f (notată Im f):

a $f:\{-2,-1,0,3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1$;
b $f:\{0,1,4,5,11\}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x+7$;
c $f:\{-1,0,3,5,8\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=-x+6$;
d $f:\{0,1,2,3,4,5\}\to\mathbb{R},\ f(x)=10x-13$;
e $f:\{1,5,4,3,6\}\to\mathbb{N},\ f(x)=\overline{x2}$;
f $f:\{4,8,12,16,20\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x:4-5$.
g $f:\{-1,2,3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2$.

Rezolvare: **g** Avem: $f(-1)=1$, $f(2)=4$ şi $f(3)=5$. Rezultă $\mathrm{Im}f=\{1,4,5\}$.

2 Se consideră mulțimea $A=\{-2;-1;0;1;2\}$. Scrieți mulțimea $\mathrm{Im}f$ şi reprezentați în plan G_f dacă:

a $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=x$;
b $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=-x$;
c $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$;
d $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=-|x|$;
e $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$;
f $f:A\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2$.

3 Reprezentați grafic funcțiile:

a $f:\{0;1;2\}\to\{3;4;5\},\ f(x)=x+3$;
b $f:\{3;4;5\}\to\{0;1;2\},\ f(x)=x-3$;
c $f:\{1;3;5;7\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-8$;
d $f:\{-2;-1;0;4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1$;
e $h:\{-4;-2;0;2;4;\}\to\{0;2;4\},\ h(x)=|x|$;
f $f:\{-3;-2;0;1;4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2$.

4 Stabiliți pentru care din următoarele funcții are loc relația $-2\in\mathrm{Im}f$:

a $f:\{-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+2$;
b $f:\{-4-2,0,2,4,6\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2}x-1$;
c $f:\{-3\sqrt{2},-\sqrt{8},0,\sqrt{2}\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=-x\sqrt{2}$;
d $f:\left\{\dfrac{1}{2^1};\dfrac{3}{2^2};\dfrac{5}{2^3};\dfrac{7}{2^4};\dfrac{9}{2^5}\right\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=32x-11$;

5 Reprezentați grafic, în acelaşi sistem de coordonate xOy, graficele funcțiilor $f,g:\{-3;0;3\}\to\mathbb{R}$, dacă:

a $f(x)=x$ şi $g(x)=x+1$;
b $f(x)=-x$ şi $g(x)=-x+1$;
c $f(x)=2x$ şi $g(x)=2x+2$;
d $f(x)=-2x$ şi $g(x)=-2x-1$;
e $f(x)=|x|$ şi $g(x)=|x|+1$;
f $f(x)=|x|-1$ şi $g(x)=|x-1|$.

6 Verificați dacă următoarele funcții sunt egale:

a $f,g:\{-1,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ *şi* $g(x)=x^2$;
b $f,g:\{-2,0,2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-4x$ *şi* $g(x)=x(2-|x|)$;
c $f,g:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2021}-x+1$ *şi* $g(x)=x^2-|x|+1$;
d $f,g:\{0,1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ *şi* $g(x)=x^{2021}-x+1$;

7 Se consideră funcția $f:\{-2;0;4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax$. Arătați că reprezentarea grafică a funcției f este formată din puncte coliniare dacă:

a $a=3$;
b $a=1$;
c $a=-\sqrt{2}$;
d $a=\dfrac{1}{2}$.

8 Se consideră funcțiile $f, g: \{-4;0;2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ și $g(x) = 2x + 3$.

a Reprezentați, în același sistem de coordonate, graficele funcțiilor *f* și *g*;
b Demonstrați că punctele care formează reprezentarea grafică a funcției *g* sunt coliniare.

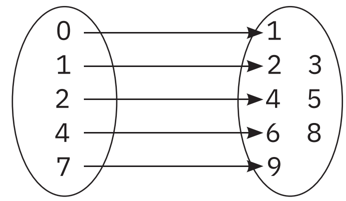
9 Reprezentați grafic funcția $f: \left\{-\frac{5}{2}, -\sqrt{2}, -1, 0, 1\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right\} \to \mathbb{R}$ dacă:

a $f(x) = [x]$; **b** $f(x) = \begin{cases} -1, \text{pentru } x < 0 \\ 1, \text{pentru } x \geq 0 \end{cases}$; **c** $f(x) = \begin{cases} 1, \text{pentru } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{pentru } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

10 Se consideră funcția $f: \{-1,0,1,2,3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, \text{dacă } x \in \{-1, 0\} \\ 2^x \quad, \text{dacă } x \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$.

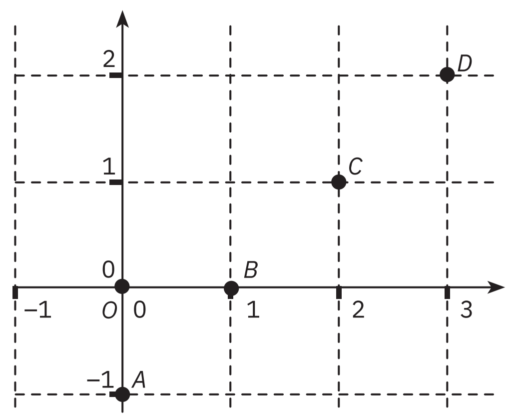
Calculați suma $S = f(-1) + 2f(0) + 3f(1) + 4f(2) + 5f(3)$.

11 Diagrama alăturată descrie o funcție $f: A \to B$.



a Scrieți elementele domeniului de definiție;
b Scrieți elementele codomeniului funcției;
c Reprezentați aceeași funcție printr-un tabel;
d Calculați: $f(0) + f(1) \cdot f(7) - f(2) : 2 + f(4) : 3$.

12 În figura alăturată, punctele *A*, *B*, *C* și *D* sunt reprezentarea grafică a unei funcții numerice $f: X \to Y$.



a Scrieți elementele mulțimii *X*.
b Scrieți elementele mulțimii Im *f*.
c Descrieți aceeași funcție printr-un tabel.
d Descrieți aceeași funcție printr-o formulă.

Consolidare

13 Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, funcțiile $f, g: \{-1;0;1\} \to \mathbb{R}$ sunt egale, unde:

a $f(x) = x$ și $g(x) = x^{2n+1}$; **b** $f(x) = |x|$ și $g(x) = x^{2n}$.

14 Determinați mulțimile *A* și *B* și numerele *m* și *n* astfel încât funcțiile următoare să fie egale:

a $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m - 3$ și $g: \{-1, 3, 7, 10\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (1-n)x + 11$;
b $f: \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3m-5)x - 7$ și $g: A \to B$, $g(x) = 10x - n$;
c $f: A \to B$, $f(x) = 2mx - 4 + n$ și $g: \{2,4,6,8\} \to \{1,5,9,13\}$, $g(x) = 2x - 3$.

15 Se consideră $a \in \mathbb{R}, a > 0$, și funcțiile $f, g: \{-a;0;a\} \to \mathbb{R}$. Determinați valoarea lui *a*, astfel încât $f = g$, dacă:

a $f(x) = |2x|$ și $g(x) = x^2$; **b** $f(x) = 3x$ și $g(x) = x^3$.

16 Determinați numărul real *m* și reprezentați grafic funcția $f: \{0;1;2;3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - m$, știind că punctul $A(1,5)$ aparține graficului funcției *f*.

17 Determinați numărul real m şi reprezentați grafic funcția $f:\{1;3;5;7\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2mx+5$, ştiind că punctul $A(m+1,2m+13)$ aparține graficului funcției.

18 Determinați numerele reale a şi b şi apoi reprezentați grafic funcția $f:\{0;1;2;3;4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, ştiind că punctele $A(0;-3)$ şi $B(3;3)$ aparțin graficului funcției f.

19 **a** Descrieți, printr-o formulă, o funcție definită pe mulțimea $\{-1,1\}$ cu valori în mulțimea $\{1\}$.
b Descrieți, printr-o formulă, o funcție definită pe mulțimea $\{-1,0,1\}$ cu valori în mulțimea $\{0\}$.

20 **a** Dați exemplu de o funcție $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, care să aibă proprietatea $f(x^2)=f(x)$, pentru orice $x\in\{-1,0,1\}$.

b Arătați că orice funcție $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(x^3)=f(x)$, pentru orice $x\in\{-1,0,1\}$.

c Arătați că există o singură funcție $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(x^3)=-f(x)$, pentru orice $x\in\{-1,0,1\}$.

Aprofundare

21 Pentru fiecare din funcțiile următoare, determinați domeniul minim de valori:
a $f:\{-2;0;2;5\}\to B$, $f(x)=2x-1$;
b $f:\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}\to B$, $f(x)=3x^2-2$;
c $f:A\to B$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+4}$, unde $A=[-2,3]\cap\mathbb{Z}$.
d $f:\{n\in\mathbb{N}\mid 3^n<100\}\to B$, $f(n)=n(n+1)$.

22 Pentru fiecare din funcțiile următoare, determinați domeniul maxim de definiție:
a $g:A\to\{-5;-2;4;7\}$, $g(x)=3x+1$;
b $g:A\to\{-3;-1;1;3;5;7\}$, $g(x)=2x-1$;
c $g:A\to\{0;1;2;3;5;11\}$, $g(x)=\dfrac{12-x}{x}$;
d $g:A\to\{1;2;5;10\}$, $g(x)=x^2+1$.

23 Se consideră funcția $f:\{-2;-1;0;1;2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3-x, \text{pentru } x<0\\ 3+x, \text{pentru } x\geq 0\end{cases}$.

a Descrieți corespondența $x\to f(x)$ printr-o singură formulă.

b Reprezentați grafic mulțimea G_f.

c Calculați $S=(-2)\cdot f(-2)+(-1)\cdot f(-1)+0\cdot f(0)+1\cdot f(1)+2\cdot f(2)$.

Probleme de șapte stele

24 Determinați numărul de funcții $f:\{a;b;c\}\to\{0;2;5\}$ care au proprietatea că:

a $f(a)+f(b)+f(c)=0$;
b $f(a)+f(b)+f(c)=2$;
c $f(a)+f(b)+f(c)=7$;
d $f(a)+f(b)+f(c)>5$.

25 Se consideră $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, şi funcțiile $f,g:\{-a;a\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x$ şi $g(x)=mx$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a Determinați valorile lui m astfel încât $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} g$;

b Fie A şi B două mulțimi nevide. Dacă funcțiile $h,j:A\to B$ au proprietatea că $\operatorname{Im} h=\operatorname{Im} j$, rezultă că $h=j$?

26 Stabiliți care dintre următoarele funcții sunt egale:
a $f:\{n\in\mathbb{N}\mid 2^n<10\}\to\mathbb{Z}$, $f(n)=n^4-6n^3+11n^2-6n+1$;
$g:\{n\in\mathbb{N}\mid 5n-16\leq 0\}\to\mathbb{Z}$, $g(n)=n^3-3n^2+2n+1$;
b $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|\cdot(|x|-1)$,
$g:\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<2\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^4-x^2$.