Marius PERIANU • Dinu ȘERBĂNESCU • Marian ANDRONACHE
Cătălin CIUPALĂ • Emil CIOLAN • George MIHAI

Matematică

pentru Bacalaureat

M 2

Filiera teoretică, profilul real,
specializarea Științe ale naturii

art educațional

Cuprins

Algebră / Geometrie

Clasele IX–X

Tema 1.1

Mulțimi de numere.
Mulțimi și elemente de logică matematică

Modulul unui număr real

Definiție. *Modulul* numărului real x este numărul $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

3. $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Definiție. Fie $x \in \mathbb{R}$. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x se numește *partea întreagă* a lui x. Se notează: $[x] = \max\{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x\}$.

Numărul real $\{x\} = x - [x]$ se numește *partea fracționară* a lui x.

Proprietăți

1a. $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

2a. $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

3a. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

4a. $[x + n] = [x] + n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$;

1b. $\{x\} \in [0,1), \forall x \in \mathbb{R}$;

2b. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

3b. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$,

4b. $\{x + n\} = \{x\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$.

Identitatea lui Hermite

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx], \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Probleme propuse

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) p : „$[x] + [y] = [x + y]$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$“, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) q : „$\{3x\} = 3\{x\}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$“, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

c) r : „$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + y^2 = 2018$“.

2. Determinați valoarea de adevăr a afirmației: „Suma oricăror două numere iraționale este un număr irațional.“

3. Calculați:

a) $\left[\sqrt{2019}\right] + \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot \left\{-\sqrt{2}\right\}$;

b) $\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2018 \cdot 2019}\right]$;

c) $\left[\sqrt{2019}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; *d)* $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\ldots+[\sqrt{100}]$; *e)* $\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2\right]$.

4. ***a)*** Determinați mulțimea $A=\{x\in[0,2]\mid[2x]=2[x]\}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) Determinați mulțimea $B=\{x\in[-1,2]\mid 3\{x\}=1\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a.

5. Arătați că $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

6. Fie $x\in\mathbb{R}^*$. Arătați că $\left[\frac{1}{x}\right]=1$ dacă și numai dacă $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$.

7. ***a)*** Arătați că $\{\{x\}+y\}=\{x+\{y\}\}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\{\{x+y\}+z\}=\{x+\{y+z\}\}$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.

8. ***a)*** Arătați că $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că dacă $[x+a]=[x+b]$,pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci $a=b$.

9. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\{x\in\mathbb{R}\mid(m^2-1)x+2>0\}=\mathbb{R}$.

10. Determinați cel mai mic element al mulțimii $\{x\in\mathbb{R}\mid(x+2)(x^2-4)\geq 0\}$.

11. Se consideră $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid(x-1)\left(x-\frac{10}{3}\right)\leq 0\right\}$. Determinați cel mai mare element al mulțimii $B=\{|a-b|\mid a,b\in\mathbb{Z},\ a<b,\ [a,b]\subset A\}$.

12. Determinați numerele naturale din mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}<x\leq 2\right\}$.

13. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|<2\}$ și $B=[-3,0)$. Determinați $A\cap B\cap\mathbb{Z}$.

14. Se consideră mulțimile $A=\{0,2,4,6,\ldots,50\}$ și $B=\{0,3,6,9,\ldots,48\}$. Aflați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile A, B, $A\cap B$ și $A\cup B$.

15. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{1}{7}=0,a_1a_2\ldots$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$.

16. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{4}{11}=a_0,a_1a_2\ldots$. Determinați suma elementelor mulțimii $A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$.

17. Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{10}{17}=0,a_1a_2a_3\ldots$. Calculați $a_1+a_2+\ldots+a_{2012}$.

18. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\{1;2\}\subseteq\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+4=0\}$.

19. Determinați perechile $(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $\{1; 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + n = 0\}$.

20. Determinați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - ax + 4 = 0\} \cap \{0, 1, 2, \ldots, 2011\} \neq \varnothing$.

21. Se consideră mulțimea $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Arătați că numerele $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ și $\{\sqrt{3}\}$ aparțin mulțimii A.

b) Arătați că $x \cdot y \in A$, pentru orice $x, y \in A$.

c) Arătați că mulțimea $B = \{x \in A \mid [x] = 0\}$ are cel puțin 2012 elemente.

22. Arătați că $\sqrt{5} \notin \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

23. Determinați $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + 2xy + 2y^2 = 0$.

24. Arătați că $x^2 + 3xy + 5y^2 \geq 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

25. Determinați $x + y + z$ știind că $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 14 = 0$.

26. ***a)*** Arătați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \ \forall a, b > 0$.

b) Arătați că $(a + b)(b + c)(c + a \geq 8abc, \ \forall a, b, c \geq 0$.

27. Se consideră numerele $x, y \geq 1$.

a) Arătați că $\frac{\sqrt{x - 1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

b) Arătați că $x\sqrt{y - 1} + y\sqrt{x - 1} \leq xy$.

28. Determinați mulțimea $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \sqrt{a} + \sqrt[4]{b} = 2\}$.

29. Dați un exemplu de două numere iraționale a și b care îndeplinesc condițiile $a + b \in \mathbb{N}^*$ și $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

30. Ordonați crescător numerele:

a) $\sqrt{2}, \ \sqrt[3]{3}, \ \ln 2$;

b) $\sqrt{2}, \ \sqrt[3]{3}, \ \sqrt[6]{6}$;

c) $\frac{1}{2}, \ \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \ \sqrt{5}$;

d) $\frac{1}{2}, \ \log_3 2, \ \ln 2, \ \sqrt{3}, \ 1$.

Tema 1.2

Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șiruri)

1. Șiruri

Definiție. Șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este:

- *monoton crescător*, dacă $x_n \leq x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *monoton descrescător*, dacă $x_n \geq x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *strict crescător*, dacă $x_n < x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *strict descrescător*, dacă $x_n > x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;

Definiție. Șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ este:

- *mărginit inferior*, dacă există un număr real m astfel încât $x_n \geq m$, $\forall n \geq 1$;
- *mărginit superior*, dacă există un număr real M astfel încât $x_n \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ mărginit atât inferior cât și superior se numește *șir mărginit*.

2. Progresii aritmetice

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie aritmetică de rație* r, dacă $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall n \geq 1$ (adică diferența oricăror doi termeni consecutivi este constantă).

Proprietăți ale progresiilor aritmetice

1. $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, $\forall n \geq 1$.

2. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$.

3. $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + r\dfrac{n(n-1)}{2}$, $\forall n \geq 1$, unde $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

4. $n = \dfrac{a_n - a_1}{r} + 1$, $\forall n \geq 1$, $r \neq 0$.

3. Progresii geometrice

Definiție. Șirul de numere reale nenule $(b_n)_{n\geq 1}$ este o *progresie geometrică de rație* q, dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (adică raportul oricăror doi termeni consecutivi este constant).

Proprietăți ale progresiilor geometrice

1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

2. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 2$.

3. $S_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$, unde $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Probleme propuse

1. Determinați al unsprezecelea termen al șirului 1, 6, 11, 16,… .

2. Calculați sumele:
a) 1 + 4 + 7 + 10 +…+ 31;   *b)* 1 + 3 + 5 +…+ 31;
c) 1 + 11 + 21 + 31 +…+ 131.

3. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $a_3 = 5$ și $a_6 = 11$. Calculați a_{11}.

4. Se consideră progresia aritmetica $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație 2, cu $a_3 + a_4 = 10$.
Să se determine a_1.

5. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_5 = 17$ și $a_{13} = 41$.
a) Determinați a_3.
b) Stabiliți dacă numărul 2018 este termen al progresiei.
c) Calculați suma $T = a_2 + a_5 + a_8 + \ldots + a_{2018}$.

6. Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_4 - a_2 = 6$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 37$.

7. Determinați în fiecare caz $x \in \mathbb{R}$, știind că următoarele numere sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice:
a) $x,\ (x-1)^2,\ x+2$;   *b)* $x,\ 2x-5,\ x-4$;
c) $x-1,\ x+1,\ 2x-1$;   *d)* $x+1,\ 1-x,\ 4$.

8. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 = -6$ și $r = 2$.
Calculați produsul primilor zece termeni.

9. Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $2^a,\ 2^{-a+1}+1,\ 2^{a+2}+1$ sunt în progresie aritmetică.

10. Calculați sumele:
a) $1+4+7+\ldots+100$;   *b)* $2+6+10+\ldots+2018$;
c) $1+3+5+\ldots+(2n+3),\ n \in \mathbb{N}^*$;   *d)* $1+5+9+\ldots+(4n-3),\ n \in \mathbb{N}^*$.

11. Aflați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_{10} - a_3 = 14$.

12. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 = 3$ și $a_3 = 7$. Aflați suma primilor zece termeni.

13. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$. Știind că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 + n$, demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

14. Determinați numărul natural x din egalitățile:
a) $1+5+9+\ldots+x = 780$;   *b)* $1+3+5+\ldots+x = 625$;
c) $x+(x+1)+\ldots+(x+x) = 165$;   *d)* $2+5+8+\ldots+x = 155$.

15. Determinați al zecelea termen al șirului $x_1, x_2, 7, 10, 13, \ldots$.

16. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 + a_{19} = 10$, calculați S_{21}.

17. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ astfel încât $a_2+a_3+a_{19}+a_{20}=8$. Calculați.

a) $a_1+a_2+\ldots+a_{21}$; ***b)*** $a_2+a_4+\ldots+a_{20}$.

18. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$, în care $a_1=1$, $S_{10}=145$. Calculați a_{11}.

19. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$, în care $r=3$, $S_{11}=176$. Calculați a_{11}.

20. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_4+a_{18}=10$, calculați a_6+a_{16}.

21. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică și $2,4,a$ sunt în progresie aritmetică.

22. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că numerele a, b, 12 sunt în progresie geometrică și 1, a, 5 sunt în progresie aritmetică.

23. Determinați al cincilea termen al progresiei geometrice în care $b_1=32$ și $q=\frac{1}{2}$.

24. Determinați $x>0$, știind că numerele $1, x-1, x+5$ sunt în progresie geometrică.

25. Fie ecuația $x^2-4x+a=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $a\in\mathbb{R}^*$ știind că $x_1, x_2, 3x_2$ sunt în progresie geometrică.

26. Fie ecuația $x^2+ax+2=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că $x_1,\ x_2,\ x_2^2$ sunt în progresie geometrică.

27. Determinați primul termen al șirului $a_1, a_2, 4, 8, 16, 32, \ldots$.

28. Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 54, \ldots$.

29. Se consideră numărul real $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{2018}}$. Arătați că $s\in(1;2)$.

30. Arătați că $s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}>\frac{2}{3}$.

31. Fie $a=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}$ și $b=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{5^5}$. Calculați $[a]+[b]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

32. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\ge1}$. Aflați b_1 și rația q, dacă:

a) $\begin{cases} b_2-b_1=2 \\ b_3-b_1=8 \end{cases}$; ***b)*** $\begin{cases} b_4-b_1=7 \\ b_3+b_2+b_1=7 \end{cases}$; ***c)*** $\begin{cases} b_4+b_1=28 \\ b_3-b_2+b_1=7 \end{cases}$.

33. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$ cu termeni pozitivi, dacă $b_1+b_2=4$ și $b_3+b_4=36$.

34. Numerele reale pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Știind că $d-a=13$ și $c-b=3$, să se afle rația progresiei.

35. Se consideră progresia geometrică cu termeni pozitivi $(b_n)_{n\ge0}$ și $S_n=b_0+b_1+\ldots+b_n$, astfel încât $b_4-b_0=15$ și $b_2+b_0=5$.

a) Determinați b_2. ***b)*** Calculați S_8.

36. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\ge1}$, în care $b_4=8$ și $b_6=2$. Aflați b_2.

37. Să se calculeze suma primilor zece termeni ai unei progresii geometrice, știind că rația este egală cu 2, iar suma primilor patru termeni este egală cu 15.

38. Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 6$ și $b_5 = 54$, determinați termenul b_7.

39. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$. Calculați $f(2)+f(2^2)+\ldots+f(2^9)$.

40. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$. Calculați sumele:

$S_1 = f\left((-3)^0\right)+f\left((-3)^1\right)+f\left((-3)^2\right)+...+f\left((-3)^{10}\right)$;

$S_2 = f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(11)$.

41. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x-1$. Calculați sumele:

a) $S_1 = f(0)-f(1)+f(2)-f(3)+\ldots+f(50)$;

b) $S_2 = f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(50)$;

c) $S_3 = f(2^0)-f(2^1)+f(2^2)-f(2^3)+\ldots+f(2^9)$.

42. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 + a_{19} = 10$, calculați $a_6 + a_{16}$.