Nicolae Muşuroia **Dana Heuberger** **Gheorghe Boroica**

Cristian Heuberger **Florin Bojor**

ARGUMENTE ESENŢIALE

Articole şi probleme din revista de matematică

Argument

EDITURA
ART

20 de ani de argumente esențiale

Uneori ne întrebăm care ar fi fost drumul catedrei de matematică a colegiului Gheorghe Șincai din Baia Mare fără revista *Argument*. Ne e greu să ni-l imaginăm, însă suntem convinși că ar fi fost mai sărac fără îndelungile ore de căutări (a cât mai multor idei noi și incitante și a cât mai multor colaboratori valoroși), de încercări (unele pline de succes, altele pe care acum le-am finaliza altfel, dar care ne reprezentau, în perioada în care le-am dat credit), fără discuțiile despre frumusețea sau inutilitatea vreunui material, fără tehnoredactare și corectură, fără erată și fără nelipsitele polemici legate de culoarea copertei (care s-a metamorfozat în fiecare an, odată cu noi și cu vremurile).

Ținem minte și acum momentele de ezitare de dinaintea apariției primului număr al revistei. Ni se spusese că n-are niciun rost să încercăm să îl imprimăm, căci neavând la vremea aceea ISSN (l-am obținut începând cu numărul al treilea), nimeni nu îi va da importanța cuvenită și va fi o simplă fițuică printre multe altele. Poate că unora li s-a părut o simplă fițuică – avea doar 45 de pagini, era tehnoredactată de doi elevi (Daniel Dinescu și Tudor Manole), coperta era realizată în Microsoft Paint de un alt elev (Sorin Michnea), era scoasă la imprimantă, în doar 50 de exemplare (capsate manual, de domnul administrator Ioan Pop) –, însă credem că a fost esențială pentru dezvoltarea noastră, a membrilor catedrei, ca problemiști și chiar ca matematicieni. Cine știe ce s-ar fi întâmplat dacă am fi pierdut momentul acela? Poate că am fi renunțat. Așa, ne-am străduit în fiecare an să fim credibili, să ne perfecționăm. Și pentru că o revistă e cu atât mai bună cu cât are mai mulți colaboratori valoroși, am încercat să îi atragem. Suntem de părere că am și reușit să o facem, deoarece dintre cei 95 de profesori, elevi și matematicieni care au publicat probleme sau articole în *Argument*, 84 nu au predat nicio oră de matematică în colegiul nostru. Avem colaboratori valoroși din întreaga țară, de la licee și școli generale și chiar de la universități de prestigiu din Stuttgart, București, Timișoara, Cluj-Napoca, Pitești, Târgoviște și Baia Mare. Iar calitatea materialelor publicate face ca revista noastră să fie căutată și apreciată ca una dintre cele mai bune reviste de matematică din învățământul preuniversitar românesc. Datele statistice pe care le vom prezenta în continuare pot părea seci, însă ele sunt esențiale pentru a ne putea argumenta în mod pertinent afirmațiile despre valoarea *Argumentului* nostru matematic.

Statistica spune că avem, până acum:

– 21 de numere ale revistei, în 20 de ani (numărul 11 a fost dublu)
– 1950 de pagini – de la 45 (ale primului număr), la 130 (ale numărului 11/1)
– 73 de autori a 1208 de probleme originale
– 148 articole de specialitate
– 65 de subiecte ale unor concursuri și olimpiade

Au publicat articole (singuri, sau în colaborare): Nicolae Mușuroia (23), Dana Heuberger (21), Vasile Pop (20), Gheorghe Boroica (15), Costel Chiteș (11), Daniela Chiteș (8), Cristian Heuberger (8), D.M. Bătinețu-Giurgiu (7), Florin Bojor (5), Dan Bărbosu (4), Leonard Giugiuc (4), Daniel Sitaru (4), Gabriela Boroica (3), Florian Fornwald (3), Dorel Miheț (3), Ion Savu (3), Meda Bojor (2), Marian Cucoaneș (2), Marius Drăgan (2), Dan-Ștefan Marinescu (2), Liviu Ornea (2), Crina Petruțiu (2), Gavril Temian (2), Marin Bancoș (1), Constantin Bărăscu (1), Vasile Berinde (1), Nicolae Bișboacă (1), Hortensia Bolat (1), Nicolae Bolchiș (1), Petru Braica (1), Tudor Caba (1), Ioan Câmpean (1), Ömer Cerrahoğlu (1), Costel Cioclu (1), Laurențiu Deaconu (1), Marian Dincă (1), Andrei Eckstein (1), Gheorghe Fătu (1), Lăcrimioara Iancu (1), Daniel Jinga (1), Dorin Mărghidanu (1), Dragoș Michnea (1), Radu-Ioan Mihai (1), Cristinel Mortici (1), Claudia Nănuți (1), Dorian Popa (1), Maria Popescu (1), Cristina Lavinia Savu (1), Teodor Ștefanca (1), Radu Tîrsu (1), Dan Teodor Toma (1), Diana Trăilescu (1), Sorin Ulmeanu (1), Rică Zamfir (1), Horia Zlampareț (1).

Au publicat probleme (singuri, sau în colaborare): Nicolae Mușuroia (205), Gheorghe Boroica (191), Dana Heuberger (158), Ludovic Longaver (106), Florin Bojor (77), D.M. Bătinețu-Giurgiu (55), Vasile Pop (31), Cristian Heuberger (30), Meda Bojor (27), Traian Covaciu (23), Daniel Sitaru (20), Dan Bărbosu (19), Mihai Vijdeluc (18), Crina Petruțiu (16), Cristinel Mortici (15), Horia Zlampareț (15), Adrian Pop (13), Gheorghe Râmbu (13), Costel Chiteș (11), Ionel Tudor (11), Ion Savu (9), Gabriela Boroica (8), Güntter Gotha (8), Delia Nechita (8), Dorin Mărghidanu (8), Sever Pop (8), Vasile Ienuțaș (7), Lucian Dragomir (6), Vasile Giurgi (6), Teodor Lucuș (6), Gheorghe Gherasin (5), Leonard Giugiuc (5), Dorian Popa (5), Costel Cioclu (4), Natalia Fărcaș (4), Ovidiu Pop (4), Marian Cârstea (3), Gheorghe Fătu (3), Radu Pop (3), Marin Bancoș (2), Petru Braica (2), Ioan Briciu (2), Marian Cucoaneș (2), Marian Dincă, Cristina Dragomir (2), Dorel Miheț (2), Marius Perianu (2), Gavril Temian (2), Margareta Trif (2), Mihaela Zlampareț (2), Adela Baciu (1), Gheorghe Berinde (1), Nicolae Bișboacă (1), Viorica Brisc (1), Paul Cotan (1), Erika Darolți (1), Laurențiu Deaconu (1), Adriana Dragomir (1), Andrei Eckstein (1), Andrei Horvat-Marc (1), Eliza Mastan (1), Adrian Mesaroș (1), Nicușor Minculete (1), Mirela Mortici (1), Oana Nițulescu (1), Maria Pop (1), Ioan Rașa (1), Sergiu Seling (1), Ioan Șerdean (1), Marcel Țena (1), Sorin Ulmeanu (1), Magda Vișovan (1).

Cartea aceasta conține o selecție a celor mai reprezentative articole și probleme dintre cele publicate în revistă de-a lungul anilor. E lesne de înțeles că a fost extrem de greu să facem o astfel de alegere. Făcând-o, nu înseamnă că nu le dăm credit articolelor și problemelor rămase, din motive tehnice, neselecționate.

Bilanțul acestor 20 de ani rodnici ne bucură și ne îndreptățește să ne dorim cât mai multe alte *Argumente*, iar acestea să devină esențiale pentru viitorii cititori.

Autorii

CUPRINS

1. ALGEBRĂ *9*

1.1. Ecuaţii diofantice având o infinitate de soluţii
în mulţimea numerelor naturale (Gheorghe Boroica, Argument 3).................................. *9*
1.2. Proprietăţi ale unor grupuri finite (Dana Heuberger, Argument 7) *13*
1.3. Generalizări ale unor probleme de numărare
date la olimpiadele internaţionale (Vasile Pop, Argument 7).. *17*
1.4. Combinatorica - „ştiinţa" care ne învaţă să numărăm (Vasile Pop, Argument 9) *22*
1.5. Identităţi combinatorice deduse prin numărare (Vasile Pop, Argument 9) *28*
1.6. Despre o teoremă majoră a matematicii moderne
(Lăcrimioara Iancu, Argument 10) *34*
1.7. Partiţii ale unor mulţimi de numere naturale (Gheorghe Boroica, Argument 10) *39*
1.8. Rezolvarea unor ecuaţii funcţionale
cu ajutorul şirurilor recurente (Cristinel Mortici, Argument 11 / 1) *46*
1.9. Inegalităţi condiţionate verificate de coeficienţii
polinoamelor (Dan Ştefan Marinescu, Ion Savu, Argument 11 / 2) *48*
1.10. Aplicaţii ale inegalităţii Hardy-Littlewood-Polya-Karamata
(Gheorghe Boroica, Argument 11 / 2) *54*
1.11. Aplicaţii ale numerelor complexe în probleme de numărare
(Gheorghe Boroica, Argument 12) *58*
1.12. Sisteme maximale de elemente ale unor grupuri finite
(Dana Heuberger, Argument 12) *61*
1.13. Despre o teoremă a lui Frobenius
(Dana Heuberger, Sorin Ulmeanu, Argument 13) *66*
1.14. Teorema Cantor-Bernstein şi aplicaţii (Liviu Ornea, Argument 13) *70*
1.15. O clasă de ecuaţii funcţionale elementare (Vasile Berinde, Argument 13) *76*
1.16. Aritmetică la casierie (Vasile Pop, Argument 14) *85*
1.17. Utilizarea identităţilor pentru obţinerea de inegalităţi
(Gheorghe Boroica, Argument 14) *89*
1.18. O lemă de teoria grupurilor (Ömer Cerrahoğlu, Argument 15) *94*
1.19. Asupra unor inegalităţi (Andrei Eckstein, Argument 18) *101*

2. GEOMETRIE *106*

2.1. Relaţii între elementele unui poligon regulat
(Nicolae Muşuroia, Argument 2) *106*
2.2. Probleme de geometrie sintetică rezolvate prin metode nesintetice
(Cristian Heuberger, Argument 4) *108*
2.3. Asupra unei probleme de geometrie în spaţiu
(Maria S. Pop, Dana Heuberger, Nicolae Muşuroia, Argument 5) *111*
2.4. Asupra unor probleme de extrem în planul complex
(Nicolae Muşuroia, Argument 5) *115*
2.5. Asupra unor proprietăţi de medie pentru arii
(Vasile Pop, Nicolae Muşuroia, Argument 5) *118*

2.6. Utilizarea identităţilor în rezolvarea unor probleme
(Gheorghe Boroica, Argument 7) 124
2.7. Asupra unor triunghiuri cu acelaşi centru de greutate
(Dana Heuberger, Argument 8) 133
2.8. Geometrie şi probabilităţi (Dana Heuberger, Argument 10) 137
2.9. O aplicaţie a unei probleme a lui Torricelli
(Dana Heuberger, Dan Ştefan Marinescu, Argument 17) 144
2.10. Unde este greşeala în calculul volumului unui cort?
(Vasile Pop, Argument 17 şi Argument 18) 149
2.11. O concurenţă remarcabilă în plan (Dana Heuberger, Argument 19) 153
2.12. Proprietăţi interesante ale numerelor complexe de acelaşi modul
(Dana Heuberger, Argument 20) 156

3. ANALIZĂ MATEMATICĂ 165

3.1. Un criteriu pentru determinarea unor limite de şiruri
(Gheorghe Boroica, Nicolae Muşuroia, Argument 1) 165
3.2. Exemple şi contraexemple în calculul integral
(Gheorghe Boroica, Argument 1) 168
3.3. Câteva aplicaţii ale teoremei lui Fermat
(Gabriela Boroica, Argument 3) 174
3.4. Funcţia Riemann (Cristian Heuberger, Argument 3) 178
3.5. Asupra limitelor unor şiruri de integrale (Nicolae Muşuroia, Argument 4) 183
3.6. Şiruri recurente de ordinul I şi gradul al II-lea (Florin Bojor, Argument 6) 187
3.7. Consideraţii geometrice asupra inegalităţii lui Jordan. Aplicaţii
(Gheorghe Boroica, Argument 8) 192
3.8. Euler şi numărul π (Dorel Miheţ, Argument 9) 196
3.9. Clase de şiruri pentru care termenul general nu se poate reprezenta sub
formă raţională (Nicolae Muşuroia, Ion Savu Argument 9 şi Argument 11 / 1) 198
3.10. Asupra unor funcţii mărginite (Dana Heuberger, Argument 11 / 1) 205
3.11. Probleme alese cu funcţii periodice (Vasile Pop, Argument 11 / 1) 209
3.12. Ecuaţii funcţionale pătratice
(Meda Bojor, Florin Bojor, Argument 11 / 1) 215
3.13. Câteva consideraţii asupra şirului lui Euler
(Cristian Heuberger, Argument 11 / 2) 220
3.14. Câteva proprietăţi relative la seria armonică (Costel Chiteş, Argument 12) 224
3.15. O inegalitate propusă pentru pregătirea lotului olimpic al Spaniei
(Cristian Heuberger, Argument 13) 230
3.16. Şiruri definite prin recurenţe alternative (Vasile Pop, Argument 16) 233
3.17. Asupra calculului primitivelor şi integralelor unei funcţii periodice
(Dan Bărbosu, Nicolae Muşuroia, Argument 20) 236

4. PROBLEME ALESE 244

4.1. Enunţuri 244
4.2. Soluţii 285

1. ALGEBRĂ

1.1. Ecuaţii diofantice având o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale

Gheorghe Boroica,
Argument 3

În prezentul articol se pun în evidenţă câteva ecuaţii diofantice care au o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*$.

Problema 1. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia diofantică*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y^2 \tag{1}$$

are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale.

O soluţie la această problemă e dată de către *W. Sierpinski* în lucrarea [3]. Metoda utilizată este inducţia matematică. Aceeaşi idee se regăseşte şi în lucrarea [2].

Mai precis, fie x_1 un număr natural impar, $x_1 \geq 3$. Arătăm că putem genera numerele naturale $x_2, x_3, \ldots, x_n$, astfel încât $s_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ să fie pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 1$, avem $s_1 = x_1^2$, care este pătrat perfect.

Determinăm $x_2 \in \mathbb{N}$, astfel încât $s_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_2+1)^2 \Leftrightarrow x_1^2 = 2 \cdot x_2 + 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{(x_1-1)(x_2+1)}{2}$, de unde x_2 se determină în mod unic, şi este un număr par. Deoarece $x_1^2 + x_2^2 = (x_2+1)^2$, cu $x_2 + 1$ impar, obţinem:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = (x_3+1)^2 \Leftrightarrow (x_2+1)^2 = 2 \cdot x_3 + 1 \Leftrightarrow x_3 = \frac{x_2(x_2+2)}{2}.$$

De aici rezultă că x_3 se determină în mod unic şi este tot un număr par. Prin inducţie, continuând procedeul, se obţine acum uşor faptul că $s_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, luând x_1 orice număr natural impar mai mare sau egal cu 3, putem genera numerele $s_k = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 = (x_k+1)^2$, $\forall\, k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că ecuaţia (1) are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*$.

Observaţia 1. *Numerele $x_1 = 3k, x_2 = 4k, x_i = 0,\ i \in \{3, \ldots, n\}, y = 5k$, cu $k \in \mathbb{N}$ arbitrar, generează o infinitate de soluţii pentru problema (1).*

Utilizând identitatea $4p=(p+1)^2-(p-1)^2$, *Dumitru Acu* dă o demonstraţie constructivă problemei de mai înainte. Mai precis, numerele:

$x_i=2a_i, i=\overline{1,n-1}$, unde a_i sunt numere naturale alese arbitrar, $x_n=-1+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2$,

$y_n=1+\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2$, generează o infinitate de soluţii pentru (1).

Problema 2. *Ecuaţia diofantică* $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2y^3$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Deoarece $3^2+4^2+15^2=250=2\cdot 5^3$, rezultă că $x_1=3k^3$, $x_2=4k^3$, $x_3=15k^3$, $y=5k^2$, cu $k\in\mathbb{N}^*$ arbitrar, generează o infinitate de soluţii pentru problema propusă.

Problema 3. *Ecuaţia* $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_8^2=2y^7$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Deoarece $13^2+17^2+19^2+23^2+29^2+30^2+31^2+18^2=2\cdot 3^7$, numerele $x_1=13k^7$, $x_2=17k^7$, $x_3=18k^7$, $x_4=19k^7$, $x_5=23k^7$, $x_6=29k^7$, $x_7=30k^7$, $x_8=31k^7$, $y=3k^2$, cu $k\in\mathbb{N}^*$ arbitrar, sunt soluţii ale problemei propuse.

Problema 4. *Ecuaţia* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=3y^2$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Numerele $x_1=2k$, $x_2=6k$, $x_3=8k$, $x_4=14k$, $y=10k$, cu $k\in\mathbb{N}^*$ arbitrar, sunt soluţii pentru problema propusă.

Problema 5. *Ecuaţia* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=2y^6$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Numerele $x_1=x_2=k^3$, $x_3=3k^3$, $x_4=6k^3$, $x_5=9k^3$, $y=2k$, cu $k\in\mathbb{N}^*$ arbitrar, sunt soluţii ale ecuaţiei.

Problema 6. *Pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, *ecuaţia diofantică*

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=2y^2 \tag{2}$$

are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Distingem două cazuri:

Cazul I. $n=2k, k\in\mathbb{N}^*$. Ecuaţia se scrie: $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2k}^2=2y^2$.

Alegem $x_{2k}=x_1, x_{2k-1}=x_2,\ldots,x_{k+1}=x_k$. Ecuaţia devine:

$$2\cdot\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2\right)=2y^2 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2=y^2.$$

Deoarece această ecuaţie, conform problemei 1, are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*$, rezultă că ecuaţia dată are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*$.

Cazul II. $n=2k+1, k\in\mathbb{N}^*$. Ecuaţia se scrie: $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{2k+1}^2=2y^2$.

Fie x_1 un număr impar arbitrar din $\mathbb{N}^*$, $x_1\geq 3$. Pe x_2 îl determinăm din condiţia

$x_1^2+x_2^2=\left(x_2+1\right)^2 \Leftrightarrow x_2=\frac{\left(x_1-1\right)\left(x_1+1\right)}{2}$, de unde rezultă că x_2 se determină în mod unic (în funcţie de x_1) şi x_2 este un număr natural par şi nenul. Ecuaţia devine:

$$\left(x_2+1\right)^2+x_3^2+\ldots+x_{2k+1}^2=2y^2.$$

Alegem $x_{2k+1}=x_2+1, x_{2k}=x_3,\ldots,x_{k+2}=x_{k+1}$ şi ecuaţia se scrie:

$$\left(x_2+1\right)^2+x_3^2+\ldots+x_{k+1}^2=y^2.$$

Deoarece x_2+1 este impar, din rezolvarea *problemei 1* rezultă că această ecuaţie are soluţie în $\mathbb{N}^*$. Deoarece $x_1\in\mathbb{N}^*$, $x_1\geq 3$ a fost ales arbitrar, rezultă că ecuaţia dată are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N}^*$.

Problema 7. *Pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, *ecuaţia* $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=y^2$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Fie numerele $x_i=k\cdot i,\ i=\overline{1,n}$ şi $k\in\mathbb{N}^*$ arbitrar. Avem: $\sum_{i=1}^{n}x_i^3=k^3\cdot S_1^2$, unde $S_1=\frac{n\left(n+1\right)}{2}\in\mathbb{N}^*$. Luăm $k=v^2\cdot S_1^{2u}$, unde $u,v\in\mathbb{N}^*$ sunt arbitrare.

Rezultă că $\sum_{i=1}^{n}x_i^3=v^6\cdot S_1^{6u+2}=\left(v^3\cdot S_1^{3u+1}\right)^2$, de unde obţinem că numerele $x_i=i\cdot v^2\cdot\left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)^{2u}$ şi $y=v^3\cdot\left(\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)^{3u+1}$, cu $i=\overline{1,n}$ şi $u,v\in\mathbb{N}^*$ arbitrare, generează o infinitate de soluţii pentru problema considerată.

Problema 8. *Pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$ *şi orice* $p\in\mathbb{N}^*$, *ecuaţia* $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y^{2p+1}$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Fie numerele $x_i=k\cdot i,\ i=\overline{1,n}$ şi $k\in\mathbb{N}^*$arbitrar. Avem: $\sum_{i=1}^{n}x_i^3=k^2\cdot S_2$, unde $S_2=\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}\in\mathbb{N}^*$. Luăm $k=m^{2p+1}\cdot S_2^p$, unde $m\in\mathbb{N}^*$ e arbitrar.

Se obţine $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=m^{2(2p+1)}\cdot S_2^{2p}\cdot S_2=\left(S_2\cdot m^2\right)^{2p+1}$, de unde rezultă că numerele $x_i=\left(\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}\right)^p\cdot m^{2p+1}\cdot i$, $i=\overline{1,n}$ şi $y=m^2\cdot\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$, cu $m\in\mathbb{N}^*$ arbitrar, generează o infinitate de soluţii pentru problema considerată.

Problema 9. *Ecuaţia diofantică* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=4y^5$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Cum $1^2+1^2+3^2+6^2+9^2=4\cdot 2^5$, rezultă că $x_1=x_2=k^5$, $x_3=3k^5$, $x_4=6k^5$, $x_5=9k^5$ și $y=2k^2$, cu $k\in\mathbb{N}^*$ arbitrar, sunt soluţii pentru ecuaţia propusă.

Problema 10. *Pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$, *ecuaţia* $x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4=y^5$ *are o infinitate de soluţii în* $\mathbb{N}^*$.

Soluţie. Fie $x_i=k\cdot a_i$, $i=\overline{1,n}$, unde $k\in\mathbb{N}^*$ şi $a_i\in\mathbb{N}^*$ sunt arbitrare, $\forall\ i=\overline{1,n}$.

Avem: $\sum_{i=1}^{n}x_i^4=k^4\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^4=k^4\cdot u_n$, unde $u_n=\sum_{i=1}^{n}a_i^4$. Alegem $k=u_n\cdot m^5$, cu $m\in\mathbb{N}^*$ arbitrar. Obţinem: $\sum_{i=1}^{n}x_i^4=u_n^4\cdot m^{20}\cdot u_n=\left(u_n\cdot m^4\right)^5$. Deci numerele $x_i=m^5\cdot i\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^4$, $i=\overline{1,n}$, $y=m^4\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^4$, cu $m\in\mathbb{N}^*$ arbitrar şi $a_i\in\mathbb{N}^*$ arbitrare, $\forall\ i=\overline{1,n}$, generează o infinitate de soluţii pentru problemă.

Probleme propuse

Arătaţi că următoarele ecuaţii diofantice au o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule:

1) $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=9y^4$

2) $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3=2y^3$

3) $x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6+x_5^6+x_6^6=y^7$

4) $x^5+y^7=2z^2$

5) $x^5+y^7=2z^4$

BIBLIOGRAFIE

[1] Andrei Gh. și colab., *Probleme de algebră pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare*, E.D.P., Bucureşti, 1993

[2] Radovici-Mărculescu P., *Probleme de teoria elementară a numerelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986

[3] Sierpinski W., *Elementary theory of numbers*, Warszawa, 1964

[4] Revista „Astra Matematică” vol 1, nr. 3, 1990

profesor, Colegiul Național „Gheorghe Șincai” Baia Mare