

Marius PERIANU • Dinu ȘERBĂNESCU • Marian ANDRONACHE
Cătălin CIUPALĂ • Emil CIOLAN • George MIHAI

Matematică

pentru Bacalaureat

M 1

Filiera teoretică, profilul real,
specializarea Matematică – informatică

Filiera vocațională, profilul militar,
specializarea Matematică – informatică



Cuprins

Capitolul 1. ALGEBRĂ/GEOMETRIE (clasele IX–X) Soluții

1.1. Mulțimi de numere. Mulțimi și elemente de logică matematică	7	206
1.2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șiruri)	10	207
1.3. Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice	14	209
1.4. Funcția de gradul I. Funcția de gradul al II-lea	19	211
1.5. Puteri și radicali. Ecuatii iraționale	25	213
1.6. Funcția exponențială și funcția logaritmică. Ecuatii și inecuații exponențiale și logaritmice	29	216
1.7. Numere complexe	33	217
1.8. Metode de numărare. Elemente de combinatorică. Matematici financiare	38	218
1.9. Vectori în plan. Geometrie vectorială. Geometrie analitică	43	219
1.10. Trigonometrie. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar în geometria plană	48	222

Capitolul 2. ALGEBRĂ (clasele XI–XII)

2.1. Permutări. Matrice. Determinanți	57	225
2.2. Sisteme de ecuații liniare	66	228
2.3. Structuri algebrice	75	235
2.4. Polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$)	86	244

Capitolul 3. ANALIZĂ MATEMATICĂ (clasele XI–XII)

3.1. Limite de șiruri. Limite de funcții. Funcții continue. Funcții derivabile	97	248
3.2. Primitive	115	263
3.3. Funcții integrabile	121	267

Capitolul 4. TESTE PENTRU PREGĂTIREA BACALAUREATULUI

4.1. Modele de teste similare testelor date la Bacalaureat	139	288
4.2. Teste de antrenament pentru pregătirea Bacalaureatului	155	313

Algebră/Geometrie

Clasele IX–X



- Tema 1.1.** Mulțimi de numere. Mulțimi și elemente de logică matematică
(clasa a IX-a)
- Tema 1.2.** Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șiruri)
(clasa a IX-a)
- Tema 1.3.** Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice
(clasele IX–X)
- Tema 1.4.** Funcția de gradul I. Funcția de gradul al II-lea
(clasa a IX-a)
- Tema 1.5.** Puteri și radicali. Ecuații iraționale
(clasa a X-a)
- Tema 1.6.** Funcția exponențială și funcția logaritmică.
Ecuații și inecuații exponențiale și logaritmice
(clasa a X-a)
- Tema 1.7.** Numere complexe
(clasa a X-a)
- Tema 1.8.** Metode de numărare. Elemente de combinatorică.
Matematici financiare
(clasa a X-a)
- Tema 1.9.** Vectori în plan. Geometrie vectorială. Geometrie analitică
(clasele IX–X)
- Tema 1.10.** Trigonometrie. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar
în geometria plană
(clasa a X-a)

Tema 1.1

Mulțimi de numere.

Mulțimi și elemente de logică matematică

Modulul unui număr real

Definiție. Modulul numărului real x este numărul $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R};$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Definiție. Fie $x \in \mathbb{R}$. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x se numește *partea întreagă* a lui x . Se notează: $[x] = \max \{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x\}$.

Numărul real $\{x\} = x - [x]$ se numește *partea fracționară* a lui x .

Proprietăți

- | | |
|---|---|
| 1a. $[x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R};$ | 1b. $\{x\} \in [0, 1), \forall x \in \mathbb{R};$ |
| 2a. $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R};$ | 2b. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$ |
| 3a. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$ | 3b. $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z};$ |
| 4a. $[x + n] = [x] + n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z};$ | 4b. $\{x + n\} = \{x\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}.$ |

Identitatea lui Hermite

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx], \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Probleme propuse

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
 - a) p : „ $[x] + [y] = [x + y]$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ “, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .
 - b) q : „ $\{3x\} = 3\{x\}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ “, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .
 - c) r : „ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + y^2 = 2018$ “.
2. Determinați valoarea de adevăr a afirmației: „Suma oricăror două numere iraționale este un număr irațional.“
3. Calculați:

a) $\left[\sqrt{2019}\right] + (2 + \sqrt{2}) \cdot \left\{-\sqrt{2}\right\};$	b) $\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019}\right];$
c) $\left[\sqrt{2019}\right] + 3 \cdot \left\{-\frac{1}{3}\right\};$	d) $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \dots + \left[\sqrt{100}\right];$

- 4. a)** Determinați mulțimea $A = \{x \in [0, 2] \mid [2x] = 2[x]\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .
- b)** Determinați mulțimea $B = \{x \in [-1, 2] \mid 3\{x\} = 1\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a .
- 5.** Arătați că $\lceil \sqrt{n^2 + n} \rceil = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
- 6.** Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Arătați că $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ dacă și numai dacă $x > 1$.
- 7. a)** Arătați că $\{\{x\} + y\} = \{x + \{y\}\}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- b)** Arătați că $\{\{x + y\} + z\} = \{x + \{y + z\}\}$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 8. a)** Arătați că $[x] + \left\lceil x + \frac{1}{2} \right\rceil = [2x]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- b)** Arătați că dacă $[x + a] = [x + b]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci $a = b$.
- 9.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\{x \in \mathbb{R} \mid (m^2 - 1)x + 2 > 0\} = \mathbb{R}$.
- 10.** Determinați cel mai mic element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x + 2)(x^2 - 4) \geq 0\}$.
- 11.** Se consideră $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)\left(x - \frac{10}{3}\right) \leq 0\right\}$. Determinați cel mai mare element al mulțimii $B = \{|a - b| \mid a, b \in \mathbb{Z}, a < b, [a, b] \subset A\}$.
- 12.** Determinați numerele naturale din mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} < x \leq 2\right\}$.
- 13.** Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}$ și $B = [-3, 0)$. Determinați $A \cap B \cap \mathbb{Z}$.
- 14.** Se consideră mulțimile $A = \{0, 2, 4, 6, \dots, 50\}$ și $B = \{0, 3, 6, 9, \dots, 48\}$. Aflați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile $A, B, A \cap B$ și $A \cup B$.
- 15.** Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{1}{7} = 0, a_1 a_2 \dots$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.
- 16.** Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{4}{11} = a_0, a_1 a_2 \dots$. Determinați suma elementelor mulțimii $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$.
- 17.** Se consideră fracția zecimală infinită $\frac{10}{13} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$. Calculați $a_1 + a_2 + \dots + a_{2012}$.
- 18.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\{1, 2\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 4 = 0\}$.
- 19.** Determinați perechile $(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $\{1, 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + n = 0\}$.

- 20.** Determinați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - ax + 4 = 0\} \cap \{0, 1, 2, \dots, 2011\} \neq \emptyset$.
- 21.** Se consideră mulțimea $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- a) Arătați că numerele $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ și $\{\sqrt{3}\}$ aparțin mulțimii A .
- b) Arătați că $x \cdot y \in A$, pentru orice $x, y \in A$.
- c) Arătați că mulțimea $B = \{x \in A \mid [x] = 0\}$ are cel puțin 2019 elemente.
- 22.** Arătați că $\sqrt{3} \notin \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- 23.** Determinați $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + 2xy + 2y^2 = 0$.
- 24.** Arătați că $x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 25.** Determinați $x + y + z$ știind că $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z + 14 = 0$.
- 26.** a) Arătați că, dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$, atunci $x = y = z$.
- b) Determinați mulțimea $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 + 4 = ab + 2a + 2b\}$.
- 27.** a) Arătați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, pentru orice numere reale $a, b > 0$.
- b) Arătați că $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$, pentru orice numere reale $a, b, c \geq 0$.
- 28.** Se consideră numerele reale $x, y \geq 1$. Arătați că:
- a) $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$; b) $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy$.
- 29.** Determinați mulțimea $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \sqrt{a} + \sqrt[4]{b} = 2\}$.
- 30.** Dați un exemplu de două numere naturale a și b care îndeplinesc condiția $\sqrt{a} - \log_3 b \in \mathbb{N}^*$.
- 31.** Dați un exemplu de două numere iraționale a și b care îndeplinesc condițiile $a + b \in \mathbb{N}^*$ și $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.
- 32.** Determinați un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ care verifică condiția $2^a < b < \log_3 c$.
- 33.** Ordonati crescător numerele
- a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ln 2$; b) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{6}$;
- c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \sqrt{5}$; d) $\frac{1}{2}, \log_3 2, \ln 2, \sqrt{3}, 1$.
- 34.** Demonstrați că, dacă $a, b \in (5, 7)$, atunci $ab - 6(a + b) + 42 \in (5, 7)$.
- 35.** Demonstrați că, dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, $|a| \leq 100$, $|b| \leq 100$, atunci $|a\sqrt{2} + b\sqrt{3}| \geq \frac{1}{350}$.

Tema 1.2

Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șiruri)

1. Șiruri

Definiție. Șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ este:

- *monoton crescător*, dacă $x_n \leq x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *monoton descrescător*, dacă $x_n \geq x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *strict crescător*, dacă $x_n < x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;
- *strict descrescător*, dacă $x_n > x_{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$;

Definiție. Șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ este:

- *mărginit inferior*, dacă există un număr real m astfel încât $x_n \geq m$, $\forall n \geq 1$;
- *mărginit superior*, dacă există un număr real M astfel încât $x_n \leq M$, $\forall n \geq 1$.

Un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ mărginit atât inferior cât și superior se numește *șir mărginit*.

2. Progresii aritmetice

Definiție. Șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ este o *progresie aritmetică de rație r* , dacă $a_{n+1} - a_n = r$, $\forall n \geq 1$ (adică diferența oricăror doi termeni consecutivi este constantă).

Proprietăți ale progresiilor aritmetice

1. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, $\forall n \geq 1$.
2. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $\forall n \geq 2$.
3. $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + r \frac{n(n-1)}{2}$, $\forall n \geq 1$, unde $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
4. $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$, $\forall n \geq 1$, $r \neq 0$.

3. Progresii geometrice

Definiție. Șirul de numere reale nenule $(b_n)_{n \geq 1}$ este o *progresie geometrică de rație q* dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (adică raportul oricăror doi termeni consecutivi este constant).

Proprietăți ale progresiilor geometrice

1. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.
2. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 2$.
3. $S_n = \begin{cases} b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ nb_1, & q = 1 \end{cases}$, unde $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Probleme propuse

- Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu termenul general $a_n = \frac{4n+4}{n+7}$, este crescător.
- Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n + 1$, este strict monoton.
- Arătați că șirurile următoare sunt monotone.
 - $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \forall n \geq 1;$
 - $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \forall n \geq 1;$
 - $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \forall n \geq 1.$
- Arătați că șirurile următoare sunt mărginite.
 - $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \forall n \geq 1;$
 - $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \forall n \geq 1;$
 - $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1}, \forall n \geq 1.$
- Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ de rație 2, cu $a_3 + a_4 = 10$. Determinați a_1 .
- Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 0}$ astfel încât $a_5 = 17$ și $a_{13} = 41$.
 - Determinați a_3 .
 - Stabiliți dacă numărul 2018 este termen al progresiei.
 - Calculați suma $T = a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{2018}$.
- Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_4 - a_2 = 6$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 37$.
- Determinați $x \in \mathbb{R}$ știind că $x, (x-1)^2$ și $x+2$ sunt în progresie aritmetică.
- Determinați numărul real x știind că numerele $x+1, 1-x$ și 4 sunt în progresie aritmetică.
- Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $2^a, 2^{-a+1} + 1, 2^{a+2} + 1$ sunt în progresie aritmetică.
- Calculați sumele:

a) $1+4+7+\dots+100;$	b) $2+6+10+\dots+2018;$
c) $1+3+5+\dots+(2n+3), n \in \mathbb{N}^*;$	d) $1+5+9+\dots+(4n-3), n \in \mathbb{N}^*.$
- Arătați că suma primelor n numere naturale impare este un pătrat perfect.
- Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$. Știind că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + n$, demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică.

- 14.** Determinați numărul natural x din egalitățile:
a) $1+5+9+\dots+x=780$; **b)** $1+3+5+\dots+x=625$;
c) $x+(x+1)+\dots+(x+x)=165$; **d)** $2+5+8+\dots+x=155$.
- 15.** Determinați al zecelea termen al șirului $x_1, x_2, 7, 10, 13, \dots$.
- 16.** Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Știind că $a_3 + a_{19} = 10$, calculați S_{21} .
- 17.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_2 + a_3 + a_{19} + a_{20} = 8$. Calculați.
a) $a_1 + a_2 + \dots + a_{21}$; **b)** $a_2 + a_4 + \dots + a_{20}$.
- 18.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ și S_n suma primilor n termeni ai progresiei.
a) Dacă $a_1 + a_4 = 100$, $a_{n-3} + a_n = 200$ și $S_n = 600$, determinați n .
b) Dacă $S_{3n} = 9S_n$ și $a_4 = 21$, calculați a_1 .
- 19.** Arătați că, dacă numerele reale a, b și c sunt atât în progresie aritmetică cât și în progresie geometrică, atunci $a = b = c$.
- 20.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele 2, a și b sunt în progresie geometrică, iar numerele 2, 4 și a sunt în progresie aritmetică.
- 21.** Numerele reale a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice neconstante și au suma egală cu 78. Dacă, în plus, numerele a, b, c sunt respectiv primul, al patrulea și al treisprezecelea termen al unei progresii aritmetice, aflați cele trei numere.
- 22.** Numerele reale a, b, c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice și au suma egală cu 84. Dacă, în plus, numerele a, b, c sunt respectiv primul, al patrulea și al zecelea termen al unei progresii aritmetice, aflați cele trei numere.
- 23.** Fie a, b, c, d, e numere naturale în progresie geometrică, astfel încât a este divizor al lui b . Știind că $a + b + c + d + e$ este un număr par, arătați că a, b, c, d, e sunt numere pare.
- 24.** Determinați $x > 0$ știind că numerele 1, $x - 1$ și $x + 5$ sunt în progresie geometrică.
- 25.** Fie ecuația $x^2 - 4x + a = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Determinați $a \in \mathbb{R}^*$ știind că $x_1, x_2, 3x_2$ sunt în progresie geometrică.
- 26.** Fie ecuația $x^2 + ax + 2 = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că x_1, x_2, x_2^2 sunt în progresie geometrică.
- 27.** Determinați primul termen al șirului $a_0, a_1, a_2, 4, 8, 16, 32, \dots$.
- 28.** Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 54, \dots$.
- 29.** Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}}$. Arătați că $1 < s < 2$.
- 30.** Arătați că $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} > \frac{2}{3}$.
- 31.** Fie $a = 1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^{10}}$ și $b = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \dots - \frac{1}{5^{11}}$. Calculați $[a] + [b]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- 32.** Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este adevărată egalitatea:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{11})^2 - x^{11} = (1 + x + x^2 + \dots + x^{10})(1 + x + \dots + x^{12}).$$

- 33.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ cu termeni pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 4$ și $b_3 + b_4 = 36$.
- 34.** Numerele reale pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Știind că $d - a = 13$ și $c - b = 3$, determinați rația progresiei.
- 35.** Se consideră progresia geometrică cu termeni pozitivi $(b_n)_{n \geq 0}$ și $S_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$, astfel încât $b_4 - b_0 = 15$ și $b_2 + b_0 = 5$.
- a)** Determinați b_2 . **b)** Calculați S_8 .
- 36.** Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 6$ și $b_5 = 54$, determinați termenul b_7 .
- 37. a)** Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, cu elemente numere naturale. Arătați că rația progresiei este un număr natural.
- b)** Fie progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$, cu toate elementele numere naturale. Arătați că rația progresiei este un număr natural.
- 38.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Calculați $f(2) + f(2^2) + \dots + f(2^9)$.
- 39.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Calculați sumele:
- $$S_1 = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(11);$$
- $$S_2 = f((-3)^0) + f((-3)^1) + f((-3)^2) + \dots + f((-3)^{10}).$$
- 40.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 1$. Calculați sumele:
- $$S_1 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50);$$
- $$S_2 = f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + \dots + f(50);$$
- $$S_3 = f(2^0) - f(2^1) + f(2^2) - f(2^3) + \dots + f(2^9).$$

Tema 1.3

Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice

Fie A și B două mulțimi nevide. Spunem că $f : A \rightarrow B$ este o *funcție* dacă fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un unic element $f(x) \in B$.

A se numește *domeniul funcției* f , iar B se numește *codomeniul funcției* f . Două funcții sunt egale dacă au același domeniu, același codomeniu și aceeași lege de definiție.

Graficul funcției $f : A \rightarrow B$ este mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$.

Imagina funcției $f : A \rightarrow B$ sau (*mulțimea valorilor funcției* f) este mulțimea

$$\text{Im } f = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Observații. 1. $M(u, v) \in G_f \Leftrightarrow f(u) = v$.

2. Funcția identică a mulțimii A este $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

1. Operații cu funcții

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă și funcțiile $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci:

- *suma* funcțiilor f și g este funcția $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- *produsul* funcțiilor f și g este funcția $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
- dacă $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$, *câtul* funcțiilor f și g este funcția $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Compunerea funcțiilor. Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții.

Funcția $g \circ f : A \rightarrow C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$, se numește *compunerea* funcțiilor g și f .

Observație. Compunerea funcțiilor este asociativă, dar nu este comutativă.

2. Monotonia funcțiilor

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *monoton (strict) crescătoare* dacă pentru orice $x, y \in D$, $x < y$, avem $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$).

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *monoton (strict) descrescătoare* dacă pentru orice $x, y \in D$, $x < y$, avem $f(x) \geq f(y)$ ($f(x) > f(y)$).

Observații

1. Dacă raportul de variație $R_f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$, $\forall x, y \in D$, $x \neq y$, atunci funcția f este strict crescătoare, iar dacă $R_f(x, y) < 0$, $\forall x \neq y$, atunci f este strict descrescătoare.

2. Compunerea a două funcții monotone, de aceeași monotonie, este o funcție crescătoare; compunerea a două funcții monotone, de monotonii diferite, este o funcție descrescătoare.

3. Funcții pare, impare, periodice

Definiție. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime nevidă centrată în origine ($\forall x \in D \Leftrightarrow -x \in D$).

a. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *funcție pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$.

b. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *funcție impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Proprietăți

1. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție impară și $0 \in D$, atunci $f(0) = 0 \Leftrightarrow O(0, 0) \in G_f$.

2. Suma $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ a două funcții pare (respectiv impare) $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ este tot o funcție pară (respectiv impară).

3. Produsul/câtul a două funcții pare/impare este o funcție pară. Produsul/câtul dintre o funcție pară și una impară este o funcție impară.

4. Compunerea a două funcții pare/impare este o funcție pară. Compunerea dintre o funcție pară și una impară este o funcție impară.

Definiție. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este *periodică cu perioada T* dacă $f(x+T) = f(x)$, pentru orice $x \in D$ pentru care $x + T \in D$. Cea mai mică perioadă pozitivă (dacă există) se numește *perioadă principală*.

4. Simetrii ale graficului unei funcții

Definiție. Dreapta $x = a$ este *axă de simetrie* pentru graficul funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă $f(a-x) = f(a+x)$, pentru orice $x \in D$ astfel încât $a-x, a+x \in D$.

Punctul $M(a, b) \in xOy$ este *centru de simetrie* pentru graficul funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, dacă $f(a-x) + f(a+x) = 2b$, pentru orice $x \in D$, astfel încât $a-x, a+x \in D$.

Observații. 1. Graficul unei funcții pare este simetric față de axa Oy .

2. Graficul unei funcții impare este simetric față de origine.

5. Funcții injective, surjective, bijective, inversabile

Definiție. Funcția $f : A \rightarrow B$ este:

- *injectivă*, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *surjectivă*, dacă pentru orice $y \in B$, există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$;
- *bijectivă*, dacă este injectivă și surjectivă.

Definiție. Funcția $f : A \rightarrow B$ este *inversabilă* dacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Notăm $g = f^{-1}$ și spunem că f^{-1} este *inversa funcției f* .

Observații

1. Funcția $f : A \rightarrow B$ este injectivă dacă și numai dacă este îndeplinită una dintre condițiile:

a. Pentru orice $x_1, x_2 \in A$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, rezultă $x_1 = x_2$.

b. Pentru orice $y \in B$, ecuația $f(x) = y$ are cel mult o soluție $x \in A$.

2. Funcția $f : A \rightarrow B$ e surjectivă dacă și numai dacă este îndeplinită una dintre condițiile:

a. $\text{Im } f = B$.

b. Pentru orice $y \in B$, ecuația $f(x) = y$ are cel puțin o soluție $x \in A$.

3. Funcția $f : A \rightarrow B$ este bijectivă dacă oricărui element $y \in B$ îi corespunde un unic element $x \in A$, astfel încât $f(x) = y$.

4. Funcția $f: A \rightarrow B$ este *inversabilă* dacă există o funcție $g: B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Se notează $g = f^{-1}$ și se spune că g este inversa funcției f .
Are loc echivalența: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, unde $x \in A$ și $y \in B$.
5. O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este *bijectivă*.

Probleme propuse

1. Arătați că $\frac{1}{2}$ nu este perioadă pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} + \{2x\}$.
2. Arătați că $\frac{1}{3}$ este perioadă pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{3x\}$.
3. Determinați câte o perioadă pentru fiecare dintre funcțiile de mai jos.
 a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\} + \{x\}$; b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{3}\right\}$.
4. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - a^2)x + 4$ este strict crescătoare.
5. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |6x - 9| - 3|3 - 2x|$ este constantă.
6. Arătați că funcția $f: [3, 8] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 8| + |3 - x|$ este constantă.
7. Arătați că funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{x^2 + 1} \right\rfloor$ este constantă, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .
8. Arătați că funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ este strict descrescătoare.
9. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + a$. Aflați numărul real a știind că $f \circ g = g \circ f$.
10. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 3x$. Arătați că funcția $f \circ f \circ f$ este strict descrescătoare.
11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - x^2$. Calculați $(f \circ f)(0)$.
12. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + 1$ se intersectează într-un punct pe axa Ox .
13. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 2$ determinați cel mai mare element al mulțimii $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 2\}$.
14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 8x$. Determinați suma elementelor din mulțimea $A = \{a \in \mathbb{R} \mid f(a) = a\}$.
15. Arătați că imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ este intervalul $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

- 16.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-1|$.
- 17.** Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x-1$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$. Determinați imaginile funcțiilor $f \circ g$ și $g \circ f$.
- 18.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, și $\text{Im } f$ imaginea funcției f .
- a) Arătați că $1 \notin \text{Im } f$.
- b) Arătați că cea mai mare valoare a funcției f este $\frac{1}{2}$.
- c) Arătați că $-\frac{1}{2} \in \text{Im } f$.
- 19.** Arătați că minimul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2x^2$, este egal cu -1 .
- 20.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$. Pentru o submulțime A a lui $\mathbb{R}$ definim mulțimea $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$. Determinați:
- a) $f^{-1}(\{0, 2\})$; b) $f^{-1}((3, +\infty))$; c) $f^{-1}([3, 8])$;
- d) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care mulțimea $f^{-1}(\{m\})$ are un singur element.
- 21.** Determinați $m, n \in \mathbb{R}$ știind că punctele $A(1, 0)$ și $B(0, -1)$ aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + mx + n$.
- 22.** Arătați că următoarele funcții sunt impare:
- a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 - \frac{1}{x}$; b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + \frac{2^x + 2^{-x}}{x}$;
- c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 1})$; d) $f: (-4, 4) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$.
- 23.** Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x(e^x + e^{-x}) + a$, este impară.
- 24.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ este funcție pară. Determinați $a + b$.
- 25.** a) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pară. Arătați că f nu este injectivă.
b) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție impară. Arătați că originea axelor de coordonate aparține graficului funcției f .
- 26.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 2$. Determinați $f([0, 3])$.
- 27.** Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = ax + b$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$.
- 28.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$. Arătați că $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-ori}}(x) = 2^n x + 2^n - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$.

- 29. a)** Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 1$, este injectivă.
b) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 1$, **nu** este injectivă.
c) Verificați dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 2$, este injectivă.
d) Arătați că funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = 4x + 1$, nu este surjectivă.
- 30.** Arătați că funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$, $f(x) = x + \frac{1}{x} + 1$, este inversabilă.
- 31.** Determinați inversa funcției bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 2^{2x-1}$.
- 32.** Determinați inversa funcției bijective $f: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = x^2 + x + 1$.
- 33.** Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inversa funcției bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$. Calculați $g(0) + g(3)$.
- 34.** Aflați $a \in \mathbb{Z}$ pentru care funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow [a, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 4x$, este surjectivă.
- 35.** Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$, este injectivă.
- 36.** Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție bijectivă, cu $f(1) = 3$ și $f(f(1)) = 4$. Calculați $f^{-1}(4)$.
- 37.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Arătați că există o infinitate de perechi $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$.
- 38.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Notăm $H = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x+T) = f(x)\}$.
a) Arătați că dacă $T \in H$, atunci $-T \in H$.
b) Arătați că dacă $T_1, T_2 \in H$, atunci $T_1 + T_2 \in H$.

Tema 1.4

Funcția de gradul I. Funcția de gradul al II-lea

1. Funcția de gradul I

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ (cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) se numește *funcție de gradul I*.

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ este o dreaptă de pantă a .

Monotonia. Dacă $a > 0$, atunci funcția f este strict crescătoare.

Dacă $a < 0$, atunci funcția f este strict descrescătoare.

Semnul funcției de gradul I

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

2. Funcția de gradul al II-lea

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ (cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), se numește *funcție de gradul al II-lea*.

Forma canonică. $f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Semnul funcției de gradul al doilea

1. $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	

2. $\Delta = 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

3. $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0

Observații

1. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

3. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

2. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

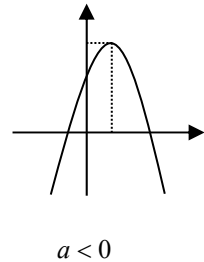
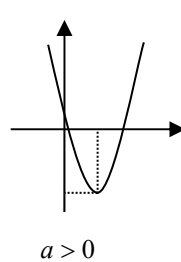
4. $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

și axă de simetrie $x = -\frac{b}{2a}$, care are ramurile orientate în sus, dacă $a > 0$, și în jos, dacă $a < 0$.

Monotonia și punctele de extrem

1. $a > 0$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
	$f(x)$		$-\frac{\Delta}{4a}$	
2. $a < 0$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
	$f(x)$		$-\frac{\Delta}{4a}$	



- Dacă $a > 0$, $\min f = -\frac{\Delta}{4a}$, care se atinge în punctul (de minim) $x = -\frac{b}{2a}$.

Funcția f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

- Dacă $a < 0$, $\max f = -\frac{\Delta}{4a}$, care se atinge în punctul (de maxim) $x = -\frac{b}{2a}$.

Funcția f este strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ și strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

Relațiile lui Viète. Fie x_1, x_2 soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$. Atunci

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Observații

1. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$; $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$.

2. Ecuația de gradul al II-lea cu soluțiile x_1 și x_2 este $x^2 - sx + p = 0$, unde $s = x_1 + x_2$ și $p = x_1 \cdot x_2$.

Probleme propuse

- Determinați funcția de gradul I al cărei grafic trece prin punctele $A(1, 2)$ și $B(-1, 0)$.
- Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Determinați funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$, știind că graficele funcțiilor f și g sunt simetrice față de:
 - axa Ox ;
 - axa Oy ;
 - punctul $O(0, 0)$.
- Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ știind că graficul său și graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 2$, sunt simetrice față de dreapta $x = 1$.
- Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: [1, 3] \rightarrow [a, b]$, $f(x) = -2x + 1$, este bijectivă.
- Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, știind că funcția $f: [1, 4] \rightarrow [1, 7]$, $f(x) = ax + b$, este bijectivă.
- Aflați $m \in \mathbb{R}$, știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (m^2 - 9)x - 3$, este descrescătoare.

- 7.** Se consideră funcțiile $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = \frac{m-1}{2m+2}x + 3$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Determinați, în fiecare caz de mai jos, valorile lui m pentru care:
- a) funcția f_m este strict crescătoare; b) $A(1, 0) \in G_{f_m}$;
c) $f_m(1) > f_m(3)$; d) $f_m(1) = f_m(3)$.
- 8.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
- a) $|x| = 2|x-1|$; b) $|x^2 + 4x| = 3x + 6$;
c) $|x+3| + |x^2 + 3x| = 0$; d) $|x-2| + |3-x| = 1$.
- 9.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile.
- a) $\frac{1}{x+1} \geq 2$; b) $\frac{x}{x+2} \leq \frac{x+1}{x-1}$;
c) $\frac{x^2-16}{x(x+4)} > 0$; d) $(x-2)(x^2-3x+2) \leq 0$.
- 10.** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile.
- a) $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$; b) $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$; c) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$.
- 11.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile.
- a) $|x-1| \leq 3$; b) $|x-1| + |x+1| \leq 4$; c) $|x^2-1| < 1$.
- 12.** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile.
- a) $|x+2| \leq 1$; b) $|12-4x| \leq 2|x-3|$; c) $|x+2| + |x^2-4| \leq 1$.
- 13.** Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2m + 4$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției f să nu intersecteze axa Ox .
- 14.** Determinați toate funcțiile de gradul întâi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strict crescătoare care îndeplinesc condiția $(f \circ f)(x) = 9x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 15.** Fie funcțiile de gradul întâi $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f strict crescătoare, iar g strict descrescătoare. Determinați monotonia funcțiilor $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f$ și $f \circ g$.
- 16.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $x^2 + 3x - 10 < 0$.
- 17.** Arătați că soluțiile ecuației $x^2 + 2x + \frac{1}{x^2 + 2x} = 2$ sunt iraționale.
- 18.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care dreapta $x = 2$ este axă de simetrie a parabolei $y = x^2 + mx + 6$.
- 19.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
- 20.** Determinați mulțimea valorilor funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
- 21.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
- a) Determinați imaginea funcției $f \circ f \circ f$.
b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că imaginea funcției $g : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este intervalul $[1, +\infty)$.
c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că $f(m-x) = f(m+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- 22.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că vârful parabolei $y = x^2 + (2m-1)x + m^2 + m$ este în cadranul I.
- 23.** Arătați că, pentru oricare $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, dreapta de ecuație $y = x + 4$ intersectează parabola $y = (a+1)x^2 + (a-1)x + 1$.
- 24.** Se consideră funcția de gradul al doilea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$.
Ordonăți crescător numerele $f(\sqrt{5})$, $f(\sqrt{6})$, $f(\sqrt{7})$.
- 25.** Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y = x^2 + 2x + a$ la axa Ox este egală cu 3.
- 26.** Determinați funcția f de gradul al doilea dacă $f(-1) = 6$, $f(0) = 2$, $f(1) = 0$.
- 27.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că vârful parabolei $y = x^2 + ax + b$ este $V(1, 2)$.
- 28.** Punctul $V(2, 3)$ este vârful parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$.
Calculați $f(1)$.
- 29.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că dreapta $x = 2$ este axă de simetrie pentru parabola $y = -x^2 + ax + b$ și că punctul $M(1, 2)$ aparține aceleiași parabole.
- 30.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că vârful parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + m^2$, se află pe graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.
- 31.** Se consideră funcțiile $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - 2(m-1)x + m + 1$, $m \in \mathbb{R}^*$.
a) Determinați m știind că graficul funcției f_m nu intersectează axa Ox .
b) Determinați mulțimea valorilor funcției f_2 .
c) Determinați imaginea funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_2(\sin x)$.
d) Determinați m știind că dreapta $x = 2$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f .
e) Determinați m știind că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
f) Determinați m știind că $f(x) > 0$, $\forall x > 0$.
- 32.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $x^2 + x + m^2 = 0$ are două soluții reale egale.
- 33.** Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - a$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 34.** Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + 3(a-2)x + a - 2$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 35.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a-1)x^2 + 2(a+1)x + a + 1$, $a \in \mathbb{R}$.
a) Determinați a știind că ecuația $f(x) = 0$ nu are nicio soluție.
b) Determinați a știind că inecuația $f(x) > 0$ nu are nicio soluție.
c) Determinați a știind că graficul funcției f este tangent axei Ox .
d) Determinați a știind că vârful parabolei asociate graficului funcției f se află pe dreapta de ecuație $x = 2$.

- 36.** Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (2a-1)x + a^2 + 1$ este egală cu 2.
- 37.** Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (2a-1)x + a^2 + 1$, este strict crescătoare.
- 38.** Aflați $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: (-\infty, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + (2a+1)x + a^2 + 1$, este strict crescătoare.
- 39.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 + (2m+3)x + m+1 = 0$ verifică pe rând condițiile:
- a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$; b) $x_1^2 = x_2^2$; c) $|x_1 - x_2| = 1$; d) $x_1 + 1 = x_2$.
- 40.** Se consideră ecuația $x^2 - (2m-1)x + m-1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Determinați valoarea minimă a expresiei $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$.
- 41.** Se consideră ecuația $x^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că $x_1^2 x_2 = x_1 x_2^2$.
- 42.** Aflați $m \in \mathbb{R}$ știind că soluțiile ecuației $x^2 + 2(m-1)x + m-1 = 0$ au semne opuse.
- 43.** Se consideră ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu coeficienți reali și cu rădăcinile x_1 și x_2 . Arătați că dacă $x_1 \cdot x_2 < 0$, atunci $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ și $x_1 \neq x_2$.
- 44.** Aflați $m \in \mathbb{R}$ știind că $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m + 10 = 0\} \neq \emptyset$.
- 45.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
- a) Determinați mulțimea valorilor funcției f .
- b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că $f(x) < m$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Determinați $n \in \mathbb{R}$ știind că $f(x) \geq n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 46.** Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + x - 13 = 0$.
- a) Calculați $\frac{x_1}{x_2^2 + x_2 - 12} + \frac{x_2}{x_1^2 + x_1 - 12}$.
- b) Calculați $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_2 - 13} + \frac{x_2}{x_1^2 + 2x_1 - 13}$.
- c) Arătați că $S_n = x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 47.** Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 + x - 3 = 0$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $x^2 + ax + b = 0$ are soluțiile $\frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{x_2}$.
- 48.** Scrieți o ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi, care are o soluție $x_1 = 1 + \sqrt{3}$.

49. Determinați numerele reale a și b știind că soluțiile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - ax + b = 0$ verifică relațiile $x_1 + x_2 = 3$ și $x_1x_2^2 + x_2x_1^2 = 6$.

50. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemele:

$$a) \begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - 4x + 3 = y \end{cases}.$$