

Cuprins

I Mulțimi

I.1	Relația dintre un element și o mulțime. Relații între mulțimi	5
I.2	Mulțimi finite. Mulțimi infinite	9
I.3	Operații cu mulțimi	14

II Divizibilitatea numerelor naturale

II.1	Criterii de divizibilitate. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	19
II.2	C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.	25

III Rapoarte și proporții. Procente

III.1	Rapoarte	33
III.2	Procente	42
III.3	Proporții	50
III.4	Mărimi direct proporționale. Mărimi invers proporționale	58

IV Mulțimea numerelor întregi

IV.1	Numere întregi. Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi	72
IV.2	Operații cu numere întregi	80
IV.3	Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor întregi	97
IV.4	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și al inecuațiilor	104

V Mulțimea numerelor raționale

V.1	Numere raționale. Modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale	109
V.2	Operații cu numere raționale	118
V.3	Ecuații în mulțimea numerelor raționale	134
V.4	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	140

VI Noțiuni geometrice fundamentale

VI.1	Unghiuri adiacente. Unghiuri suplementare, unghiuri complementare. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri în jurul unui punct	144
VI.2	Paralelism și perpendicularitate	155
VI.3	Cercul	162

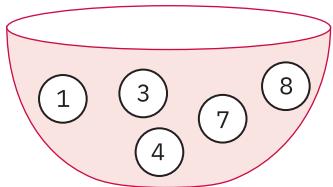
VII Triunghiul

166

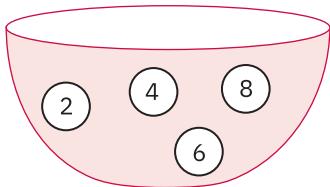
VIII	Proprietățile triunghiurilor	180
IX	Teste pentru începutul clasei a VII-a	
	Testul 1	188
	Testul 2	191
	Testul 3	193
	Testul 4	195
	Testul 5	197

I.1. Relația dintre un element și o mulțime. Relații între mulțimi

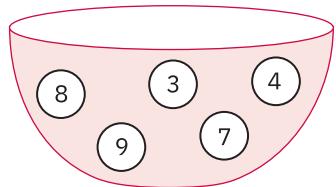
- 1** În trei coșuri C_1 , C_2 și C_3 avem bile numerotate ca în figura următoare:



Cos nr. 1



Cos nr. 2



Cos nr. 3

- a Căror coșuri le aparține bila cu numărul 2?

- b** Căror cosuri le apartine bila cu numărul 3?

- c Cărora cosuri le apartine bila cu numărul 6?

- 2** Scrieti toate numerele naturale care:

- a sunt cel mult egale cu 6

- b** sunt cel putin egale cu 23 si cel mult egale cu 31

- c au două cifre, iar suma cifrelor este egală cu 5.

1

3 Scrieti:

- a multimea resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la 7;

- b multimea resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la 3;

- c multimea resturilor posibile împărțirii unui număr natural la 18;

- d multimea cifrelor din sistemul cu baza 2;

- e multimea cifrelor din sistemul zecimal;

- f multimile literelor care formează fiecare dintre următoarele cuvinte: „matematică“; „jucărie“; „electricitate“; „marmeladă“;

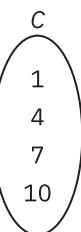
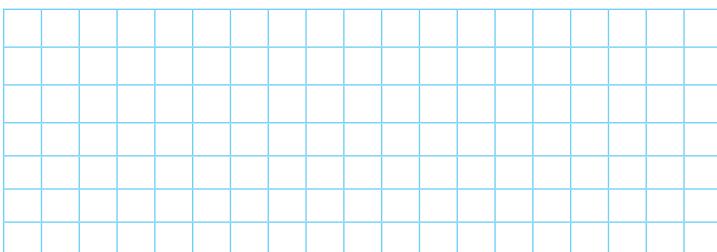
- gg** mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele: 23 561; 134 364; 50 230 203.

- 4** Se dau multimiile: $A = \{2; 3; 4; 5\}$; $B = \{1; 3; 5\}$; $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$.

Pentru fiecare dintre elementele: 1; 2; 5; 6; 7, scrieți cărei multimi îi aparțin și căreia nu îi aparțin.

Exemplu: $1 \in B$; $1 \notin A$; $1 \notin C$.

5 Urmărind diagramele de mai jos, precizați elementele mulțimilor A , B și C :



6 Enumerați elementele fiecărei mulțimi:

a $A = \{x \mid x \text{ este număr natural, } x \leq 8\}$;



b $B = \{x \mid x \text{ este număr natural, } 2 \leq x \leq 10\}$;



c $C = \{x \mid x \text{ este număr natural, } 1 < x \leq 6\}$;



d $D = \{x \mid x \text{ este număr natural nenul, } x \leq 2020\}$;



e $E = \{x \mid x \text{ este număr natural par, } x \leq 33\}$;



f $F = \{x \mid x \text{ este număr natural, } 203 \leq x < 204\}$;



g $G = \{x \mid x \text{ este număr natural, } 44 < x < 45\}$.



7 Scrieți următoarele mulțimi, punând în evidență proprietățile caracteristice ale elementelor lor:

a $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;



b $B = \{0; 2; 4; 6; 8\};$

c $C = \{1; 3; 5; 7; 9\};$

d $D = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\};$

e $E = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$.

8 Fie $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$. Scrieți elementele următoarelor mulțimi:

$$B = \{x \in A \mid x < 0\};$$

$$C = \{x \in A \mid x \geq 0\};$$

$D = \{x \in A \mid x \text{ este număr par}\};$

$$E = \{x \in A \mid x = a + b, a, b \in A\};$$

$$F = \{x \in A \mid x > 1\}.$$

I.2. Multimi finite. Multimi infinite

1 Scrieți, dacă există, câte cinci elemente ale multimilor:

a \mathbb{N} ;

b \mathbb{Z} ;

c \mathbb{Z}_- ;

d \mathbb{Z}_+ ;

e $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$.

Rezolvare:

2 Enumerați elementele multimilor:

a $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 12 : x\}$;

$A = \{\dots, \dots, \dots\}$

b $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 18\}$;

c $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| < 3\}$;

$|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Leftrightarrow$

d $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x : 2 \text{ și } -18 < x \leq 2\}$;

e $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \mid x \text{ și } |2x - 1| < 19\}$;

f $F = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{13}{x+2} \in \mathbb{N} \right\}$;

g $G = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-3}{x+5} \in \mathbb{Z} \right\};$

h $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2021)\}.$

3 Aflați cardinalul următoarelor mulțimi:

a $A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

b $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 21\}$

c $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 24\}$

d $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}, n < 15\}$

e $E = \{n \in \mathbb{N} \mid (3 \cdot 4)2 + 3n \leq 291\}$

- 4** În tabelul de mai jos se găsesc informații privind elevii clasei a VI-a A dintr-o școală, care au participat în acest an scolar la olimpiade:

Numele elevului	Vârstă	Înălțimea	Culoarea părului	Olimpiada la care a participat
Raluca	12 ani	1,48 m	Brunetă	Matematică, Fizică
Matei	12 ani	1,49 m	Blond	Fizică, Limba engleză
Tudor	12 ani	1,50 m	Şaten	Limba română, Limba engleză
Emma	11 ani	1,48 m	Şatenă	Matematică, Biologie
Victor	12 ani	1,48 m	Blond	Fizică, Biologie, Geografie
Luca	11 ani	1,40 m	Brunet	Limba română, Religie, Istorie
Rita	12 ani	1,48 m	Blondă	Limba română

Determinati elementele următoarelor multimi:

$A = \text{Multimea tuturor elevilor}$

B = Multimea fetelor

C = Multimea băieților

D = Multimea elevilor care au 12 ani

E = Multimea elevilor care au participat la două olimpiade

F = Multimea elevilor care au înălțimea de 1,48 m

$G =$ Multimea elevilor blonzi

$H = \text{Multimea elevilor care au participat la cel puțin două olimpiade}$

Rezolvare:

- 5 Fie multimea $A = \left\{ 2; -4; \frac{15}{5}; \frac{1}{3}; -\frac{11}{11}; +7; \frac{2}{4}; +\frac{21}{3} \right\}$.

Scrieti 3 submultimi ale multimii A ale caror elemente sunt numere intregi.

Rezolvare:

- 6** Se dă multimile: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 3\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 2^n \leq 8\}$.
Stabiliți dacă multimile A și B sunt egale.

Rezolvare:

- 7** Fie multimile: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x + 5 \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x < -2\}$.
Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $-5 \in A$; **b** $A \subset B$; **c** $\emptyset \subset B$; **d** $\{-1; 0; 1\} \subset A$.

Rezolvare:

- 8** Fie multimile: $A = \{-2; -1; 3; 5; 8\}$; $B = \{-1; 3; 5\}$; $C = \{-2\}$; $D = \{3; 5; 8\}$; $E = \{-2\}$.
Completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile: „ \subset “; „ \supset “; „ $\not\subset$ “.

a $A \dots \dots B$; **b** $B \dots \dots A$; **c** $C \dots \dots E$; **d** $B \dots \dots D$.

- 9** Aflați $x \in \mathbb{N}$ știind că $\{2; 3; x; 9\} = \{2; 3; 7; 9\}$.

Rezolvare:

- 10** Determinați valorile lui x , pentru care mulțimea $\{-2; -1; x\}$ este o submulțime a mulțimii $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Rezolvare:

- 11** Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 4\}$.

Rezolvare:

12 Arătați că $A \subset B$, unde:

a $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x < 15\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 14\}$;

Rezolvare:

b $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divizor propriu al lui } 18\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 54 : x\}$;

Rezolvare:

c $A = \{2^0; 2^1; 2^2; 2^3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8\}$;

Rezolvare:

d $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 3| < 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 7\}$;

Rezolvare:

e $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x + 11 > 67\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7x - 5 \geq 72\}$;

Rezolvare:

f $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 3) \mid 22\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 5\}$.

Rezolvare:

13 Aflați x astfel încât $A = B$, dacă:

a $A = \{2; 3; 4; 5\}$ și $B = \{x; 5; 3; 4\}$;

Rezolvare:

b $A = \{x + 1; 3x - 2\}$ și $B = \{8; 19\}$;

Rezolvare:

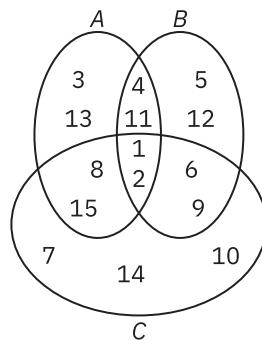
c $A = \{3^x; 2^4; 4^3; 7^2\}$ și $B = \{16; 27; 49; 64\}$.

Rezolvare:

I.3. Operații cu multimi

1 Fie multimile A, B, C , reprezentate prin diagrama Venn-Euler din figura alăturată. Scrieți elementele multimilor: $A, B, C, A \cup B; A \cap B; A \setminus B; B \setminus A; A \cup B \cup C; A \cap B \cap C$.

Rezolvare:



2 Fie mulțimile $A = \{1; 2; 3; 5\}$; $B = \{2; 3; 4\}$; $C = \{3; 5; 7\}$; $D = \{6; 8\}$. Determinați elementele următoarelor mulțimi:

- a $A \cup B; A \cup C; A \cup D; B \cup C; B \cup A; D \cup C; (A \cup B) \cup C; (A \cup B) \cup (A \cup C); B \cup C \cup D;$

Rezolvare:

- b $A \cap B; A \cap C; A \cap D; B \cap C; (A \cup B) \cap C; (A \cap D) \cup B; (A \cap B) \cup (B \cap C); (A \cap B) \cap (A \cap C);$

Rezolvare:

- c $A \setminus B; B \setminus A; A \setminus C; C \setminus A; C \setminus B; A \setminus D; (A \setminus B) \cap (C \setminus B).$

Rezolvare:

- 3** Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 3 \text{ și } x \leq 24\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (x - 1) : 4 \text{ și } x < 27\}$. Determinați elementele mulțimilor:

a) $A \cup B$;

b) $B \cup C$;

c) $A \cup C$;

d) $A \cup B \cup C$;

e) $A \cap B$;

f) $A \cap C$;

g) $B \cap C$;

h) $A \cap B \cap C$;

i) $A \cup (B \cap C)$;

j) $(A \cup B) \cap C$;

k) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$;

l) $A \cup B \cap \emptyset$.

Rezolvare:

- 4** Fie mulțimea $A = \{-1; a; 3; 5\}$. Determinați valoarea lui a știind că $\{-2; -1; 3; 4; 5\} \cup A = \{-2; -1; 3; 4; 5; 6\}$.

Rezolvare:

- 5** Fie mulțimea $B = \{0; x; 4; 6\}$. Determinați valoarea lui x știind că $B \cap \{1; 2; 3; 4\} = \{2; 4\}$.

Rezolvare:

- 6** Fie mulțimea $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Determinați mulțimea B , știind că $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

Rezolvare:

- 7 Fie mulțimea $A = \{5; 6; 7\}$. Determinați mulțimea B știind că $A \cup B = \{1; 3; 5; 6; 7\}$ și B are trei elemente.

Rezolvare:

- 8 Fie mulțimea $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Determinați mulțimea B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$; b $A \cap B = \{5; 7\}$.

Rezolvare:

- 9 Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a $A \cup B = \{a; b; c; d\}$; b $b \notin B$; c $A \cap B = \{c; d\}$.

Rezolvare:

- 10 Să se determine mulțimile M și N știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a $M \cup N = \{-3; -1; 1; 3; 5; 7\}$; b $M \setminus N = \{1; 5\}$; c $N \setminus M = \{-3; -1\}$.

Rezolvare:

11 Să se determine multimile M și N știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

- a $M \cup N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; b $M \setminus N = \{2; 3\}$; c mulțimea M are trei elemente.

Rezolvare:

12 Să se determine multimile M și N știind că îndeplinesc simultan condițiile:

- a $M \cup N = \{2; 4; 6; 8\}$; b $8 \in N \setminus M$; c $M \cap N = \{2; 4\}$; d $M \setminus N = \{6\}$.

Rezolvare: