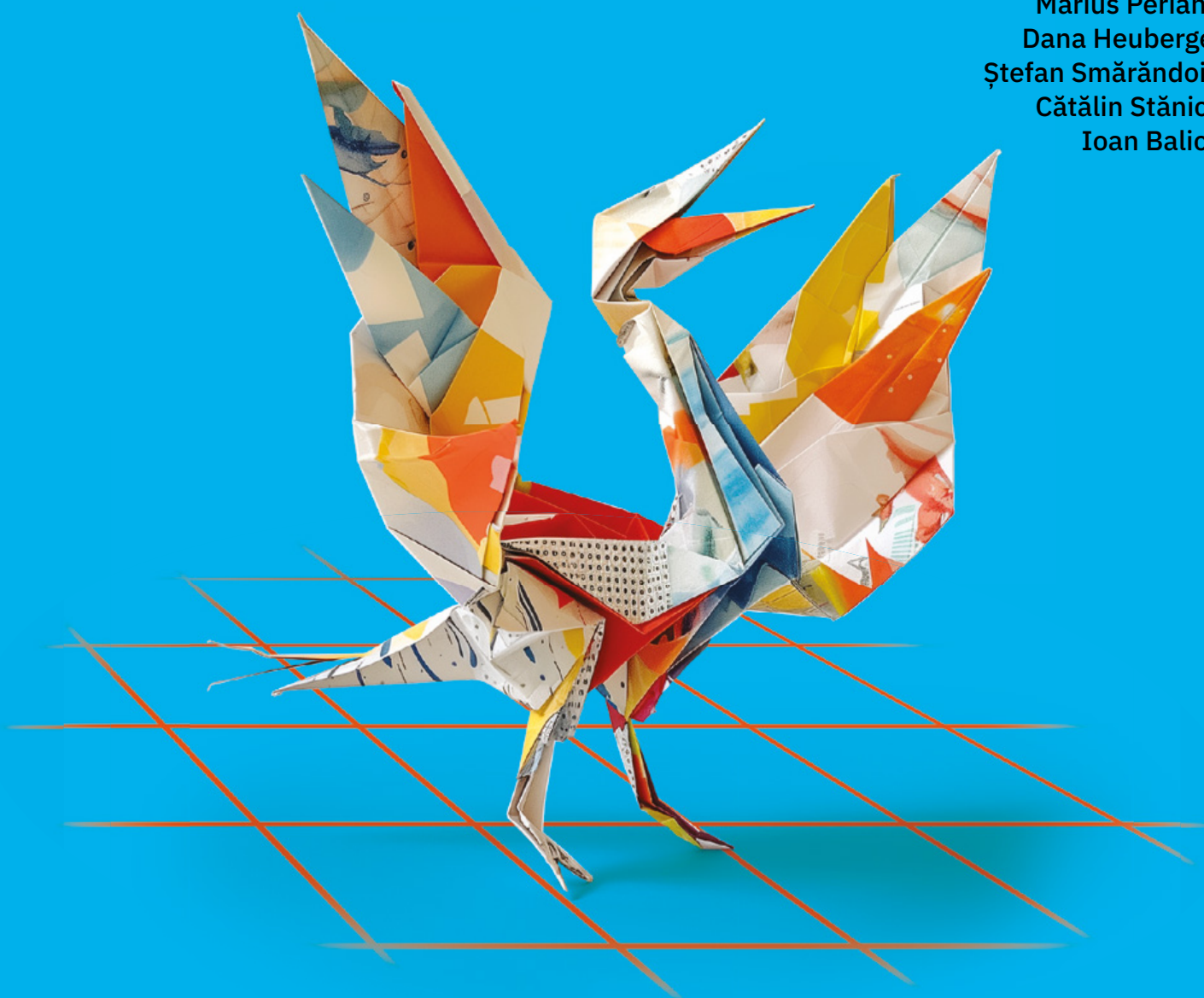


Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărândoiu
Cătălin Stănică
Ioan Balica



Mathematik

7. Klasse



Dieses Lehrbuch ist Eigentum des Ministeriums für Bildung und Forschung.

Das vorliegende Lehrbuch entspricht dem durch Erlass Nr. 3393/28.02.2017 des Ministers für Bildung genehmigten Lehrplan.

119 – Nationale Rufnummer für Fälle von Kindesmissbrauch

116.111 – Kindernotruf

Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărândoiu
Cătălin Stănică
Ioan Balica



Mathematik

7. Klasse



Das Lehrbuch ist vom Bildungsministerium durch den Ministererlass Nr. 5420/04.07.2024 genehmigt worden.

Das Lehrbuch wird den Schülern kostenlos zur Verfügung gestellt und ist für vier Schuljahre übertragbar, beginnend mit dem Schuljahr 2025–2026.

Schulamt

Schule/Kolleg/Lyzeum

DIESES LEHRBUCH WURDE VERWENDET VON:

Jahr	Name der Schülerin/des Schülers	Klasse	Schuljahr	Zustand des Lehrbuchs*	
				beim Empfang	bei der Rückgabe
1					
2					
3					
4					

* Für die Beschreibung des Zustands des Buchs wird einer der folgenden Begriffe verwendet: **neu, gut, gepflegt, ungepflegt, beschädigt.**

- Die Lehrkräfte überprüfen, ob die Angaben in der obigen Tabelle korrekt sind.
- Die Schüler dürfen nicht ins Lehrbuch schreiben.

Wissenschaftliche Referenten:

- Prof. Dr. Eugen Păltănea, Fakultät für Mathematik und Informatik, „Transilvania“-Universität, Kronstadt
- Prof. mit 1. did. Grad Vladimir Cerbu, Nationale Militärschule „Stefan cel Mare“, Câmpulung Moldovenesc

Übersetzung: Rodica Brodețchi, Mioara Chirilă, Mihaela Dragoie

Redaktionsleitung: Cătălin Georgescu

Leitende Editorin: Mihaela Preda

Redaktion: Irina Munteanu, Diana Onulescu

Umschlag: Faber Studio

Layout: Crenguța Rontea, Mariana Chivu

Fotonachweis: Dreamstime

ISBN 978-606-076-931-6

Für Bestellungen wenden Sie sich bitte an die Abteilung Vertrieb

C.P. 12, O.P. 63, Sektor 1, Bukarest

Telefon: 021 796 73 83; 021 796 73 80

Fax: 021 369 31 99

www.art-educational.ro

Alle Rechte sind dem Art-Klett-Verlag vorbehalten.

Kein Teil dieses Werkes darf in irgendeiner Form vervielfältigt, gespeichert oder übertragen werden

(elektronisch, mechanisch, fotokopiert, aufgezeichnet oder auf andere Weise) ohne die vorherige schriftliche Zustimmung des Art-Klett-Verlags.

Vorwort

Mathematik ist die Kunst, die Wirklichkeit zu konstruieren und der menschlichen Erkenntnis neue Bedeutungen zu verleihen. Der Definition von Kunst folgend setzt die Mathematik Übung und Geschicklichkeit, Wissen und ästhetischen Sinn und vor allem Vorstellungskraft und Intuition voraus. Die Mathematik ist das Gedicht der logischen Ideen, und die mathematischen Wahrheiten sind die Tonleitern, in denen die Symphonie der Naturgesetze geschrieben ist.

Die Mathematik der 7. Klasse ist die Geschichte großer Entdeckungen. Wir beginnen die Reise, indem wir die Realität mit neuen Größen und Formen messen (Lerneinheit 1: Die Menge der reellen Zahlen), dann übersetzen wir praktische Aufgaben in mathematische Modelle (Lerneinheit 2: Gleichungen und lineare Gleichungssysteme) und legen mathematische Koordinaten für die Welt um uns herum oder für alltägliche Tätigkeiten fest (Lerneinheit 3: Datenverarbeitung). Die Realität wird in neuen Formen dargestellt – in geraden Formen (Lerneinheit 4: Vierecke) oder Rundformen (Lerneinheit 5: Der Kreis) – und in größeren oder kleineren Dimensionen modelliert (Lerneinheit 5: Ähnlichkeit der Dreiecke). Da jedes Ende an den Anfang erinnert, bringt das letzte Abenteuer Zahlen und geometrische Figuren (Formen) zusammen (Lerneinheit 7: Metrische Beziehungen).

Damit unser mathematisches Abenteuer ein Erfolg wird, führt uns das Lehrbuch auf schülerfreundliche Weise durch Ideen, Konzepte, Definitionen und Lehrsätze und beruft sich auf Praxisnähe und Intuition. Die Einführung von mathematischen Konzepten gründet auf Beispielen aus der unmittelbaren Realität, auf alltäglichen Erfahrungen. So wird die Mathematik als eine offene, lebendige und dynamische Welt sichtbar, die eng mit allen Tätigkeitsbereichen verbunden ist und Situationen, Probleme, Phänomene oder Vorgänge formulieren, beschreiben und erklären kann.

Obwohl es nicht im Inhaltsverzeichnis steht, ist die eigentliche Lektion in diesem Lehrbuch diejenige, die uns lehrt, die Frage „Warum?“ zu stellen. Der Mathematikunterricht ist nicht einfach nur eine Lerntätigkeit, er *schult das Denken*. Bei jedem Schritt bietet das Lehrbuch Momente der Untersuchung, des Nachdenkens, Gelegenheiten, Fragen zu stellen und mögliche Antworten mit den Daten der analysierten Situationen in Beziehung zu setzen.

Die Mathematik ist die schönste und tiefgründigste Schöpfung des menschlichen Geistes. Die Menschheit braucht die Mathematik, denn alles im Universum wird nicht nur durch die Mathematik beschrieben, sondern besteht aus Mathematik.

Dieses Lehrbuch ist euer Wegweiser durch die wunderbare Welt der Mathematik.

Die Autoren

Vorstellung des Lehrbuchs

Das Lehrbuch umfasst sieben Einheiten, die alle Inhalte des Lehrplans abdecken. Die Lektionen, die eine Einheit bilden, werden zusammenhängend, einheitlich und folgerichtig präsentiert.

Jede Lektion beginnt mit einer praktischen Aufgabe, auf deren Grundlage neue Konzepte eingeführt werden. Diese werden dann in eine mathematische Sprache gefasst, die ein Gleichgewicht zwischen Anschaulichkeit und mathematischer Strenge herstellt. Neue Konzepte werden von aussagekräftigen Beispielen, Bemerkungen und Anwendungen begleitet.

Das Lehrbuch legt in bestimmten Abschnitten großen Wert auf kritisches Denken und die Entwicklung des Kopfrechnens und fördert gleichzeitig Gruppenaktivitäten, unabhängiges Denken und die Entwicklung von Selbstvertrauen. Die Bewertung erfolgt durch vielfältige Formen und Instrumente, die auf die Ausbildung und Entwicklung mathematischer Kompetenzen ausgerichtet sind.

Das Lehrbuch ist in 7 Lerneinheiten gegliedert.



Inhalt

EINHEIT 1

Die Menge der reellen Zahlen

1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1

EINHEIT 2

Gleichungen und Gleichungssysteme

1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2

EINHEIT 3

Elemente der Datenverarbeitung

1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3

EINHEIT 4

Das Viereck

1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4

EINHEIT 5

Der Kreis

1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5

EINHEIT 6

Ähnlichkeit der Dreiecke

1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6

EINHEIT 7

Metrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

1.7, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7, 6.7

Lösungen

Seite Nr.	Lektionen
10	L1: Die Quadratwurzel einer Quadratzahl. Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl
16	L2: Die Menge der reellen Zahlen
24	L3: Rechenregeln für Quadratwurzeln
30	L4: Addition und Subtraktion der reellen Zahlen
35	L5: Multiplikation und Division der reellen Zahlen
40	L6: Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten. Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen
45	L7: Rationalisieren des Nenners eines Bruchs
49	L8: Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen. Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen
53	L9: Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$
55	Wiederholung und Bewertung
58	L1: Umformen einer Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Identitäten
62	L2: Gleichungen der Form $ax + b = 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge einer Gleichung. Äquivalente Gleichungen
68	L3: Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten
74	L4: Lösen von Aufgaben mithilfe von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen
79	Wiederholung und Bewertung
82	L1: Kartesisches Produkt zweier nicht leerer Mengen. Orthogonales Achsensystem in der Ebene. Darstellung von Paaren reeller Zahlen in einem orthogonalen Achsensystem. Darstellung von Punkten in einem orthogonalen Achsensystem. Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene
88	L2: Darstellung und Interpretation von funktionalen Abhängigkeiten durch Tabellen, Diagramme und Grafiken. Häufigkeitspolygon
95	Wiederholung und Bewertung
98	L1: Konvexes Viereck. Die Winkelsumme im konvexen Viereck
102	L2: Das Parallelogramm. Eigenschaften
107	L3: Anwendungen des Parallelogramms in der Dreiecksgeometrie. Mittellinie in einem Dreieck, Schwerpunkt eines Dreiecks
111	L4: Das Rechteck. Eigenschaften
115	L5: Der Rhombus. Eigenschaften
120	L6: Das Quadrat. Eigenschaften
125	L7: Das Trapez: Einteilung, Eigenschaften. Die Mittellinie im Trapez
131	L8: Umfänge und Flächeninhalte
138	Wiederholung und Bewertung
142	L1: Der Kreis. Sehnen und Bogen in einem Kreis. Eigenschaften
147	L2: Umfangswinkel
151	L3: Tangenten eines Kreises
155	L4: Regelmäßige Vielecke, die dem Kreis einbeschrieben sind
158	L5: Länge des Kreises und Flächeninhalt des Diskus
162	Wiederholung und Bewertung
166	L1: Proportionale Strecken. Lehrsatz der äquidistanten (abstandsgleichen) Parallelen
170	L2: Lehrsatz des Thales
175	L3: Ähnliche Dreiecke. Hauptsatz der Ähnlichkeit
179	L4: Ähnlichkeitskriterien der Dreiecke. Schätzen von Entfernungen im Alltag mithilfe der Ähnlichkeit
184	Wiederholung und Bewertung
188	L1: Orthogonale Projektionen auf einer Geraden. Der Höhensatz
192	L2: Der Kathetensatz
195	L3: Der Lehrsatz des Pythagoras
201	L4: Elemente der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck
208	L5: Lösen des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung von Elementen in regelmäßigen Vielecken. Schätzen der Entfernungen in praktischen Situationen mithilfe der metrischen Beziehungen
214	Wiederholung und Bewertung
216	

Allgemeine und spezifische Kompetenzen

Allgemeine Kompetenzen

1. Mathematische Daten, Größen und Beziehungen in ihrem Kontext erkennen
2. Verarbeiten von quantitativen, qualitativen und strukturellen mathematischen Daten aus verschiedenen Informationsquellen
3. Anwendung spezifischer Konzepte und Algorithmen in verschiedenen mathematischen Kontexten
4. Ausdrücken von Informationen, Schlussfolgerungen und Lösungen für eine bestimmte Situation in mathematischer Sprache
5. Analysieren der mathematischen Eigenschaften einer bestimmten Situation
6. Mathematisches Modellieren einer gegebenen Situation durch Integration von Lerninhalten aus verschiedenen Bereichen

Spezifische Kompetenzen

- 1.1 Identifizieren von Zahlen, die zu verschiedenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ gehören
- 1.2 Identifizieren einer gegebenen Situation, die durch lineare Gleichungen oder Gleichungssysteme gelöst werden kann
- 1.3 Identifizieren von Informationen aus Tabellen, Grafiken und Diagrammen
- 1.4 Identifizieren bestimmter Vierecke in gegebenen geometrischen Konfigurationen
- 1.5 Identifizieren der Elemente des Kreises und/oder regelmäßiger Vielecke in gegebenen geometrischen Konfigurationen
- 1.6 Identifizieren der ähnlichen Dreiecke in gegebenen geometrischen Konfigurationen
- 1.7 Erkennen der Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks in einer gegebenen geometrischen Konfiguration
- 2.1 Anwenden von Rechenregeln zum Schätzen und Approximieren von reellen Zahlen
- 2.2 Anwenden der Rechenregeln mit reellen Zahlen zur Überprüfung der Lösungen von linearen Gleichungen oder Gleichungssystemen
- 2.3 Verarbeiten von Daten in Form von Tabellen, Diagrammen oder Schaubildern, um sie zu erfassen, darzustellen und zu präsentieren
- 2.4 Beschreiben von Vierecken anhand ihrer Definitionen und Eigenschaften in gegebenen geometrischen Konfigurationen
- 2.5 Beschreiben der Eigenschaften eines Kreises und von regelmäßigen Vielecken, die einem Kreis einbeschrieben sind
- 2.6 Feststellen der Ähnlichkeit von Dreiecken
- 2.7 Anwenden der metrischen Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck zur Bestimmung seiner Elemente
- 3.1 Verwenden der Algorithmen und Eigenschaften der Rechenoperationen in der Menge der reellen Zahlen
- 3.2 Verwenden der Äquivalenzumformungen zur Lösung linearer Gleichungen und Gleichungssysteme
- 3.3 Auswahl der geeigneten Methode zur Darstellung von Aufgaben mit funktionalen Abhängigkeiten und deren Darstellungen
- 3.4 Verwenden der Eigenschaften der Vierecke zur Lösung von Aufgaben
- 3.5 Verwenden der Kreiseigenschaften beim Lösen von Aufgaben
- 3.6 Verwenden der Ähnlichkeit von Dreiecken in gegebenen geometrischen Konfigurationen, um Längen, Maße und Flächeninhalte zu bestimmen
- 3.7 Ableiten der metrischen Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck
- 4.1 Verwenden der Terminologie der reellen Zahlen (Vorzeichen, Absolutbetrag, entgegengesetzte Zahl, Kehrwert)
- 4.2 Aufstellen der Gleichungen und lineare Gleichungssysteme
- 4.3 Beschreiben der Elemente der Datenverarbeitung in mathematischer Sprache
- 4.4 Ausdrücken der Begriffe bezüglich der Vierecke in geometrischer Sprache
- 4.5 Eigenschaften von Kreisen und Vielecken in mathematischer Sprache ausdrücken
- 4.6 Eigenschaften geometrischer Figuren in mathematischer Sprache mithilfe der Ähnlichkeit ausdrücken
- 4.7 Die Beziehungen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks in mathematischer Sprache ausdrücken
- 5.1 Entwickeln der Strategien zur Lösung von Aufgaben mit reellen Zahlen
- 5.2 Erarbeiten von Methoden zur Lösung von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen
- 5.3 Analyse der Praxissituationen mithilfe der Elemente der Datenverarbeitung
- 5.4 Auswahl geeigneter geometrischer Darstellungen, um die Berechnung von Streckenlängen, Winkelmaßen und Flächeninhalten zu optimieren
- 5.5 Interpretieren der Eigenschaften des Kreises und der regelmäßigen Vielecke anhand geometrischer Darstellungen
- 5.6 Interpretieren der Ähnlichkeit von Dreiecken in geometrischen Konfigurationen
- 5.7 Interpretieren der metrischen Beziehungen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks
- 6.1 Mathematische Modellierung von praktischen Situationen bei den Operationen mit reellen Zahlen
- 6.2 Mathematische Umsetzung von gegebenen Situationen mithilfe von Gleichungen und/oder linearen Gleichungssystemen
- 6.3 Umsetzen einer gegebenen Situation in eine geeignete Darstellung (Text, Formel, Diagramm, Grafik)
- 6.4 Modellierung gegebener Situationen durch geometrische Darstellungen mit Vierecken
- 6.5 Mathematische Modellierung praktischer Situationen mit regelmäßigen Vielecken oder Kreisen
- 6.6 Anwenden einer Strategie zur Lösung von gegebenen Situationen unter Verwendung der Ähnlichkeit von Dreiecken
- 6.7 Anwenden einer Strategie zur Lösung gegebener Situationen unter Verwendung metrischer Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck

E1

Die Menge der reellen Zahlen

1. Lektion

Die Quadratwurzel einer Quadratzahl.
Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

2. Lektion

Die Menge der reellen Zahlen

3. Lektion

Rechenregeln für Quadratwurzeln

4. Lektion

Addition und Subtraktion der reellen Zahlen

5. Lektion

Multiplikation und Division der reellen Zahlen

6. Lektion

Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten.
Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen

7. Lektion

Rationalisieren des Nenners eines Bruchs

8. Lektion

Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen.
Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen

9. Lektion

Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$

Wiederholung und Bewertung

Die meisten Zahlen, die wir täglich verwenden, sind reelle Zahlen. Dazu gehören der Geldbetrag in unserem Portemonnaie, die Statistiken, die wir in Sportsendungen sehen, die Mengenangaben in Kochbüchern. Wir verwenden reelle Zahlen, um Windgeschwindigkeiten, Niederschlagsmengen, Entfernungen, aber auch die Menge des Benzens im Tank oder unsere Herzfrequenz anzugeben.



1. Lektion: Die Quadratwurzel einer Quadratzahl. Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

Schlüsselwörter

Quadratzahl

Quadratwurzel

Wurzel

Die Quadratwurzel einer Quadratzahl



Mathe im Alltag

Das Grundstück in der Abbildung ist quadratisch und hat einen Flächeninhalt von $6\,400\text{ m}^2$.

Wie lang ist die Seite des Grundstücks?

Der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich dem Quadrat seiner Seitenlänge.

Wenn l die Seitenlänge des Grundstücks in Metern ist, beträgt der Flächeninhalt des Grundstücks l^2 Quadratmeter.

Also: $l^2 = 6\,400$. Da $80^2 = 6\,400$, erhalten wir $l = 80\text{ m}$.



Was stellen wir fest?

In einigen praktischen Situationen ist es notwendig, eine natürliche Zahl n zu bestimmen, wenn man das Quadrat von n kennt. Dieser Vorgang wird *Quadratwurzelziehen* von n^2 bezeichnet.

Eine natürliche Zahl, die das Quadrat (die zweite Potenz) einer anderen natürlichen Zahl ist, nennt man *Quadratzahl*.



Merke dir!

Sei a eine Quadratzahl. Wir nennen *Quadratwurzel der Zahl* die natürliche Zahl n , sodass $n^2 = a$ ist.

Die Zahl n wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet und als *Quadratwurzel* oder *Wurzel* aus a gelesen. Man kann also schreiben:

$$\sqrt{a} = n, \text{ wenn und nur wenn } n^2 = a.$$



Beispiele

1. $\sqrt{0} = 0$, weil $0^2 = 0$;
2. $\sqrt{25} = 5$, weil $5^2 = 25$;
3. $\sqrt{121} = 11$, weil $11^2 = 121$;
4. $\sqrt{729} = 27$, weil $27^2 = 729$;
5. $\sqrt{1024} = 32$, weil $32^2 = 1\,024$;
6. $\sqrt{7225} = 85$, weil $85^2 = 7\,225$.



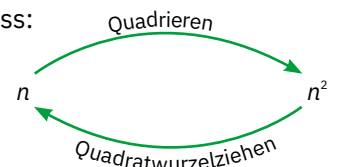
Bemerkung

Die Verbindung zwischen Quadrieren (zur zweiten Potenz erheben) und Quadratwurzelziehen

Aus der Definition der Quadratwurzel einer Quadratzahl ergibt sich unmittelbar, dass:

1. $\sqrt{n^2} = n$ für jede natürliche Zahl n ;
2. $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede Quadratzahl a .

Mit anderen Worten, Quadrieren und Quadratwurzelziehen sind umgekehrte Operationen.



Beispiele

1. $\sqrt{7^2} = 7$, weil $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$;
2. $(\sqrt{16})^2 = 16$, weil $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$;
3. $\sqrt{5^2} = 5$, weil $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$;
4. $(\sqrt{81})^2 = 81$, weil $(\sqrt{81})^2 = 9^2 = 81$.

Die Quadratwurzel des Quadrats einer positiven rationalen Zahl

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass, wenn eine natürliche Zahl a als Quadrat einer anderen natürlichen Zahl n geschrieben werden kann, dann wird a Quadratzahl und n Quadratwurzel (oder Wurzel) von a genannt.

Wir erweitern diese Definition auf Quadrate positiver rationaler Zahlen.

Gruppenarbeit

1. Schreibt ab und ergänzt in Zweiergruppen die Tabelle:

x	0,7	1,2	1,3	1,4	1,5	4,5	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11}{101}$
x^2	0,49					20,25		$\frac{49}{25}$		

2. Übertragt folgende Tabelle in eure Hefte, überprüft die Richtigkeit der Angaben und bestimmt durch Versuche die Werte der positiven rationalen Zahlen x , die in die zweite Zeile der Tabelle zu schreiben sind, sodass x^2 und x in der angegebenen Beziehung stehen:

x^2	0,01	1,69	1,96	2,25	8,41	30,25	$\frac{4}{9}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{169}{81}$	$\frac{256}{625}$
x	0,1				2,9		$\frac{2}{3}$			

3. Vergleicht die Ergebnisse der ersten und zweiten Tabelle mit den anderen Arbeitsgruppen und analysiert die Zusammenhänge zwischen den Daten in den beiden Tabellen.

Merke dir!

Sei a eine positive rationale Zahl, die als Quadrat einer rationalen Zahl geschrieben werden kann.

Die positive rationale Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = a$ wird als *Quadratwurzel* der rationalen Zahl a bezeichnet.

Wie zuvor wird x mit $\sqrt{a}$ bezeichnet und *Quadratwurzel der Zahl a* gelesen. Wenn also die rationale Zahl $a > 0$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist, kann sie geschrieben werden:

$$\sqrt{a} = x, \text{ wenn und nur wenn } x^2 = a \text{ und } x > 0.$$

Da $\sqrt{0} = 0$ ist, wird die obige Beziehung allgemeiner für $a \geq 0$ wie folgt geschrieben:

$$\sqrt{a} = x, \text{ wenn und nur wenn } x^2 = a \text{ und } x \geq 0.$$

Beispiele

- $\sqrt{0,04} = 0,2$, weil $(0,2)^2 = 0,04$;
- $\sqrt{11,56} = 3,4$, weil $3,4^2 = 11,56$;
- $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$, weil $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$;
- $\sqrt{\frac{121}{729}} = \frac{11}{27}$, weil $\left(\frac{11}{27}\right)^2 = \frac{121}{729}$.

Bemerkungen

1. Wenn die rationale Zahl $a > 0$ das Quadrat einer rationalen Zahl x ist, dann ist $a = x^2 = (-x)^2$.

Beispiele: a. $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$;

b. $5,76 = (2,4)^2 = (-2,4)^2$.

Die obige Definition zeigt, dass die Quadratwurzel der Zahl a eine positive Zahl ist. Deshalb:

a. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt{\frac{1}{4}} \neq -\frac{1}{2}$;

b. $\sqrt{5,76} = 2,4$ und $\sqrt{5,76} \neq -2,4$.

2. Der Zusammenhang zwischen der Quadrierungsoperation und dem Ziehen der Quadratwurzel gilt für rationale Zahlen, sofern die obige Positivitätsbedingung erfüllt ist. Da der Absolutbetrag einer rationalen Zahl nicht negativ ist und $|-x| = |x|$, folgt aus der Definition der Quadratwurzel für jede rationale Zahl x , dass:

a. $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede rationale Zahl $a \geq 0$, die das Quadrat einer rationalen Zahl ist;

b. $\sqrt{x^2} = |x|$ für jede rationale Zahl x .



Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl



Mathe im Alltag

Vier identische Sperrholzstücke in Form rechtwinkliger gleichschenkliger Dreiecke mit einer Kathetenlänge von 1 dm werden benötigt, um ein Modellflugzeug wie in der nebenstehenden Abbildung zu bauen.



Es gibt zwei Möglichkeiten, die Bestandteile zu erhalten:

1. Wir zeichnen ein Rechteck mit den Dimensionen 1 dm und 2 dm auf die Sperrholzplatte, teilen es in zwei Quadrate der Seitenlänge von je 1 dm und machen dann zwei Schnitte entlang der Diagonalen dieser Quadrate wie in Abbildung 1, um die vier Teile zu erhalten.

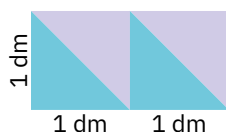


Abbildung 1

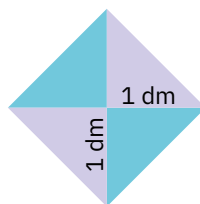


Abbildung 2

2. Wir beachten, dass die Teile so angeordnet werden können, dass sie ein Quadrat bilden (Abbildung 2). Wir machen uns daran, die Seitenlänge dieses Quadrats zu bestimmen, damit wir beim Ausschneiden aus einem anderen Stück Sperrholz kein Material verschwenden.

Da die Quadrate in den Abbildungen 1 und 2 den gleichen Flächeninhalt von 2 dm^2 haben, ist die Seitenlänge des Quadrats die positive Zahl x mit der Eigenschaft, dass $x^2 = 2$ ist. Da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist, suchen wir eine Annäherung an diese Zahl.

Da $1^2 < 2 < 2^2$ ist, folgt daraus, dass x zwischen 1 und 2 liegen muss.

Da $1,4^2 = 1,96$ und $1,5^2 = 2,25$, bedeutet dies, dass $1,4 < x < 1,5$. Genauer gesagt, $1,41 < x < 1,42$, weil $1,41^2 = 1,9881 < 2$ und $1,42^2 = 2,0164 < 2$.

Was stellen wir fest?

Die oben beschriebene praktische Situation zeigt, dass es eine positive Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 2$ gibt, deren Wert, auch wenn er nicht genau angegeben werden kann, auf eine ganze Zahl oder auf einen Dezimalbruch mit einer, zwei oder mehreren Dezimalstellen angenähert werden kann.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass es für jede positive rationale Zahl a eine positive Zahl x gibt, deren Quadrat a ist.

Somit erstreckt sich der Begriff der Quadratwurzel auf alle positiven rationalen Zahlen.



Merke dir!

Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl a ist eine positive Zahl x , die die Eigenschaft $x^2 = a$ hat.

Wie zuvor bezeichnen wir $x = \sqrt{a}$ und sagen, dass x die *Quadratwurzel* der Zahl a (oder *Wurzel aus a*) ist. Die Beziehungen gelten auch hier:

- a. $\sqrt{a} = x$, wenn und nur wenn $x^2 = a$;
- b. $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede rationale Zahl $a \geq 0$;
- c. $\sqrt{a^2} = |a|$ für jede rationale Zahl a .



Beispiele

In der vorigen praktischen Aufgabe bestätigt die Länge x der Seite des Quadrats die Beziehung $x^2 = 2$, also ist, laut Definition, $x = \sqrt{2}$.

Auch andere praktische Aufgaben führen zu der Schlussfolgerung, dass es positive Zahlen der Form $\sqrt{3}$, $\sqrt{3,14}$ oder $\sqrt{\frac{5}{12}}$ gibt.

Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

Eine Menge zu *schätzen*, bedeutet, einen ungefähren Wert anzugeben, ohne alle erforderlichen Daten zu kennen, um eine genaue Antwort zu formulieren. Um eine Zahl der Form $\sqrt{a}$ in der Praxis verwenden zu können, wobei a eine positive rationale Zahl ist, werden wir Annäherungen an ganze Zahlen oder an endliche Dezimalbrüche verwenden, indem wir die rationale Zahl a zwischen den Quadraten zweier rationaler Zahlen einschließen.

Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl durch Einschließen der Zahl zwischen Quadrate rationaler Zahlen

Nehmen wir zum Beispiel die rationale Zahl 5,61. Wir schließen diese Zahl zwischen zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen ein: $2^2 < 5,61 < 3^2$, woraus folgt, dass $2 < \sqrt{5,61} < 3$.

Daher ist die Abrundung von $\sqrt{5,61}$ an die Ordnung der Einer gleich 2, und die Aufrundung 3.

Zur Bestimmung von Näherungswerten von $\sqrt{5,61}$ an die Ordnung der Zehntel und der Hundertstel gehen wir wie folgt vor:

Schritt 1: Wir berechnen die Quadrate der Zahlen der Form $2,\overline{a}$, wobei $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Wir erhalten $2,3^2 < 5,61 < 2,4^2$, also $\sqrt{5,61} \approx 2,3\dots$

Schritt 2: Wir berechnen die Quadrate der Zahlen der Form $2,\overline{3a}$, wobei $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Wir erhalten $2,36^2 < 5,61 < 2,37^2$, woraus sich ergibt, dass $\sqrt{5,61} \approx 2,36\dots$

Wenn man so weitermacht, kann man Näherungswerte für eine beliebige Anzahl von Dezimalstellen erhalten.

Schätzen der Quadratwurzel mithilfe eines Taschenrechners

Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl wird mithilfe des Taschenrechners (oder der Handy- oder Tablet-Apps) ermittelt, indem die Zahl in Dezimalform in den Rechner eingegeben und dann die Taste mit dem *Wurzelzeichen* gedrückt wird.

Zum Beispiel wird der ungefähre Wert von $\sqrt{2}$ ermittelt, indem die Tasten der Reihe nach gedrückt werden:



Wenn die rationale Zahl als gemeiner Bruch angegeben ist, verwenden wir die Divisionstaste, um die Zahl in die Dezimalform zu bringen, und drücken dann die Wurzeltaste.

Portfolio

Untersucht das digitale Lehrbuch (in rumänischer Sprache), um Folgendes zu studieren:

- die babylonische Methode zur Bestimmung des ungefähren Werts der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl;
- den Algorithmus zum Ziehen der Quadratwurzel aus einer positiven rationalen Zahl, die durch einen endlichen Dezimalbruch ausgedrückt wird. Berechnet mithilfe des Algorithmus zum Quadratwurzelziehen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, auf zwei Dezimalstellen genau.

Bemerkung

Tabelle der Quadratwurzelwerte der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 25

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{6} = 2,4494\dots$	$\sqrt{11} = 3,3166\dots$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{21} = 4,5825\dots$
$\sqrt{2} = 1,4142\dots$	$\sqrt{7} = 2,6457\dots$	$\sqrt{12} = 3,4641\dots$	$\sqrt{17} = 4,1231\dots$	$\sqrt{22} = 4,6904\dots$
$\sqrt{3} = 1,7320\dots$	$\sqrt{8} = 2,8284\dots$	$\sqrt{13} = 3,6055\dots$	$\sqrt{18} = 4,2426\dots$	$\sqrt{23} = 4,7958\dots$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{14} = 3,7416\dots$	$\sqrt{19} = 4,3588\dots$	$\sqrt{24} = 4,8989\dots$
$\sqrt{5} = 2,2360\dots$	$\sqrt{10} = 3,1622\dots$	$\sqrt{15} = 3,8729\dots$	$\sqrt{20} = 4,4721\dots$	$\sqrt{25} = 5$





Untersuchung

An der Tafel stehen die Zahlen $a = 7,84$ und $b = 1,44$. Löst die Aufgaben und überprüft die Richtigkeit eurer Antworten, indem ihr sie mit euren Mitschülern und anschließend mit eurem Lehrer besprecht. Schreibt die richtigen Schlussfolgerungen in euer persönliches Portfolio.

1. Berechnet die folgenden Zahlen auf zwei Dezimalstellen genau, eventuell mit einem Taschenrechner:

$$\sqrt{a+b}, \sqrt{a}+\sqrt{b}, \sqrt{a-b}, \sqrt{a}-\sqrt{b}, \sqrt{a \cdot b}, \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ und } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

2. Entscheidet, welche der Zahlen $\sqrt{a+b}$ und $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ größer ist. Macht dasselbe für $\sqrt{a-b}$ und $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, danach für $\sqrt{a \cdot b}$ und $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, und dann für $\sqrt{\frac{a}{b}}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Wiederholt die Anforderungen für die Arbeitsaufgaben 1 und 2, wenn $a = \frac{225}{256}$ und $b = \frac{4}{25}$.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. Zeigt, dass a eine Quadratzahl ist, und berechnet dann $\sqrt{a}$:

a. $a = 25 \cdot 13 + 25 \cdot 20 - 25 \cdot 17$; b. $a = 12 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 24)$; c. $a = 14^{60}$; d. $a = 3^{24} \cdot 7^{12}$.

Lösung:

a. $a = 25 \cdot 13 + 25 \cdot 20 - 25 \cdot 17 = 25 \cdot (13 + 20 - 17) = 25 \cdot 16 = 5^2 \cdot 4^2 = (5 \cdot 4)^2 = 20^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a} = \sqrt{20^2} = 20$.

b. $a = 12 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 24) = 12 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 12 \cdot \frac{24}{2} \cdot 25 = 12 \cdot 12 \cdot 25 = 12^2 \cdot 5^2 = (12 \cdot 5)^2 = 60^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a} = \sqrt{60^2} = 60$.

c. $a = 14^{60} = 14^{30 \cdot 2} = (14^{30})^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a} = \sqrt{(14^{30})^2} = 14^{30}$.

d. $a = 3^{24} \cdot 7^{12} = (3^{12})^2 \cdot (7^6)^2 = (3^{12} \cdot 7^6)^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a} = \sqrt{(3^{12} \cdot 7^6)^2} = 3^{12} \cdot 7^6$.

2. Berechnet:

a. $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{100} : \sqrt{25} + \sqrt{25 \cdot 81}$; b. $\sqrt{4^2 \cdot 15 + 4^2 \cdot 5^2 - 4^3}$.

Lösung:

a. Wir berechnen zuerst die Quadratwurzeln, dann beachten wir die Reihenfolge der Operationen mit rationalen Zahlen: $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{100} : \sqrt{25} + \sqrt{25 \cdot 81} = 4 \cdot 3 + 10 : 5 + \sqrt{25 \cdot 9} = 12 + 2 + \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 14 + \sqrt{15^2} = 14 + 15 = 29$.

b. $\sqrt{4^2 \cdot 15 + 4^2 \cdot 5^2 - 4^3} = \sqrt{4^2 \cdot (15 + 5^2 - 4)} = \sqrt{4^2 \cdot 36} = \sqrt{4^2 \cdot 6^2} = \sqrt{24^2} = 24$.

Vorgeschlagene Aufgaben



1. Welche der folgenden Zahlen ist eine Quadratzahl?

a. 9; b. 24; c. 63; d. 81; e. 196; f. 144; g. 336; h. 400; i. 625.

2. Schreibt die Quadratzahlen zwischen 10 und 150.

3. Übertrag ins Heft und füllt dann die Tabelle aus:

x	3	7	9		15		23		
x ²		49		100		400		625	900

4. Entscheidet, ob die folgende Gleichungen wahr oder falsch sind:

a. $\sqrt{4} = 2$; b. $\sqrt{5} = 25$; c. $\sqrt{225} = 15$; d. $\sqrt{100} = 50$; e. $\sqrt{64} = 4$; f. $\sqrt{144} = 12$.

5. Berechnet:

a. $\sqrt{25}$; b. $\sqrt{81}$; c. $\sqrt{1}$; d. $\sqrt{400}$; e. $\sqrt{576}$; f. $\sqrt{900}$.

6. Berechnet:

a. $\sqrt{4} + \sqrt{36}$; b. $\sqrt{49} - \sqrt{9}$; c. $\sqrt{1} + \sqrt{0} + \sqrt{16}$; d. $\sqrt{100} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{25} : 5$.

7. Berechnet, eventuell mit dem Taschenrechner:

a. $\sqrt{441} + \sqrt{961}$; b. $\sqrt{4096} - \sqrt{1225}$; c. $\sqrt{2209} + 2 \cdot \sqrt{1369}$; d. $(\sqrt{17424} - \sqrt{1024}) : \sqrt{4}$.

8. Berechnet:

a. $\sqrt{3^2}$; b. $\sqrt{14^2}$; c. $\sqrt{45^2}$; d. $\sqrt{5^4}$; e. $\sqrt{8^6}$; f. $\sqrt{2^8}$; g. $\sqrt{3^{10}}$.

9. Berechnet:

a. $\sqrt{5^2 - 3^2} + \sqrt{3^2 + 4^2}$; b. $\sqrt{9^2 + 12^2} - \sqrt{3 \cdot 12}$; c. $\sqrt{25^2 - 20^2} : 3 + 2 \cdot \sqrt{121}$.

10. Berechnet:

a. $(\sqrt{196} - \sqrt{169}) \cdot \sqrt{100} + \sqrt{225}$; b. $(\sqrt{400} - \sqrt{144}) : 4 + \sqrt{196} : 7$;
c. $\sqrt{3 + \sqrt{36}} + \sqrt{16 - \sqrt{49}}$; d. $\sqrt{6 \cdot \sqrt{36}} + \sqrt{9 \cdot \sqrt{81}} - \sqrt{20 \cdot \sqrt{25}}$.

11. Zeigt, dass a eine Quadratzahl ist, und berechne dann $\sqrt{a}$:

a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$; b. $(1 + 2 + 3 + \dots + 17) : 17$; c. $a = 41 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 81)$.

12. Führt aus:

a. $\sqrt{2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 4}$; b. $\sqrt{3^2 \cdot 15 + 3^2 \cdot 14 - 3^2 \cdot 4}$; c. $\sqrt{10^2 \cdot 81 + 10^2 \cdot 18 + 10^2}$;
d. $\sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 2^4 \cdot 11 + 2^4 \cdot 5}$; e. $\sqrt{5^4 \cdot 20 - 5^4 \cdot 16 + 5^5}$; f. $\sqrt{6^4 \cdot 13 + 6^4 \cdot 5^2 - 6^4 \cdot 2}$.

13. Berechne x anhand der folgenden Beziehungen:

a. $\frac{x}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}}$; b. $\frac{\sqrt{25}}{x} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{144}}$; c. $\frac{2 \cdot \sqrt{121}}{x} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{9}}{\sqrt{64}}$; d. $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{196}}}{x} = \frac{\sqrt{6^2 + 8^2}}{\sqrt{5 + \sqrt{400}}}$.

14. Führt aus:

a. $\sqrt{3^2 \cdot 6^2}$; b. $\sqrt{8^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2}$; c. $\sqrt{3^4 \cdot 5^4}$; d. $\sqrt{5^{20} \cdot 6^{20}}$; e. $\sqrt{2^8 \cdot 3^{10}}$; f. $\sqrt{7^{16} \cdot 10^{28}}$.

15. Verwendet eventuell den Taschenrechner und berechne:

a. $(\sqrt{15129} + \sqrt{2116}) : \sqrt{169} - (\sqrt{13225} + \sqrt{841}) : \sqrt{144}$;
b. $(3 \cdot \sqrt{91809} + \sqrt{8281}) : (\sqrt{32400} + 2 \cdot \sqrt{25600}) : (\sqrt{168100} - \sqrt{166464})$.

16. Ordnet jeder Quadratwurzel in der ersten Zeile den entsprechenden Wert in der zweiten Zeile zu:

a. $\sqrt{\frac{64}{49}}$	b. $\sqrt{3\frac{1}{16}}$	c. $\sqrt{\frac{441}{169}}$	d. $\sqrt{\frac{529}{144}}$	e. $\sqrt{\frac{1024}{361}}$	f. $\sqrt{\frac{1}{676}}$		
A. $\frac{23}{12}$	B. $\frac{8}{7}$	C. $\frac{21}{13}$	D. $\frac{32}{19}$	E. $\frac{3}{4}$	F. $\frac{1}{24}$	G. $\frac{1}{26}$	H. $\frac{7}{4}$

17. Berechne:

a. $\sqrt{0,04}$; b. $\sqrt{0,36}$; c. $\sqrt{0,0001}$; d. $\sqrt{2,56}$; e. $\sqrt{1,44}$; f. $\sqrt{10,24}$.

18. Führt aus:

a. $\sqrt{144 \cdot 36}$; b. $\sqrt{\frac{1,44}{25}}$; c. $\sqrt{4 \cdot 0,36}$; d. $\sqrt{0,04 \cdot 0,49}$; e. $\sqrt{\frac{1,69}{4}}$; f. $\sqrt{\frac{1}{2,56}}$.

Test

1. Berechne:

a. $\sqrt{16}$; b. $\sqrt{3,24}$; c. $\sqrt{25} + \sqrt{49} - \sqrt{36}$; d. $\sqrt{6^2 + 8^2} : \sqrt{4 \cdot 5^2}$. (3 Pkte.)

2. Wählt die richtige Antwort aus. Das Ergebnis der Rechnung

$$\sqrt{5 \cdot \sqrt{144} + 4 \cdot \sqrt{400} + \sqrt{16}} : \sqrt{3^3 - 5^2 + 2} - \sqrt{8 + \sqrt{49} + 7 \cdot \sqrt{9}}$$
 ist:

a. 0; b. 1; c. 2; d. 3. (3 Pkte.)

3. Berechne $\sqrt{a}$, wobei:

a. $a = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$; b. $a = 17 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 17)$; c. $a = 6^4 \cdot 47 + 6^4 \cdot 11 + 6^5$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



2. Lektion: Die Menge der reellen Zahlen

Schlüsselwörter

natürliche Zahl	irrationale Zahl	Zahlenachse	ganze Zahl	reelle Zahl
Absolutbetrag einer reellen Zahl	rationale Zahl	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	Gegenzahl (entgegengesetzte Zahl) einer reellen Zahl	

Irrationale Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen

Problemstellung

Wie wir in Lektion 1 gesehen haben, hat das Quadrat in Abbildung 1 die Seitenlänge $\sqrt{2}$. Was für eine Zahl ist $\sqrt{2}$?

Mit einem Taschenrechner erhalten wir einen Näherungswert mit 8 Dezimalstellen:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135\dots$$

Der Bildschirm eines Taschenrechners kann bis zu 8 Stellen anzeigen. In diesem Fall könnt ihr eine Handy-App verwenden, um 15 Dezimalstellen zu erhalten:

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562373095\dots$$

Mithilfe einer Computeranwendung, die als wissenschaftlicher Taschenrechner bezeichnet wird, finden wir:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135623730950488016887242097\dots$$

Die bisher erhaltenen Dezimalzahlen wiederholen sich nicht periodisch, und rationale Zahlen können als endliche oder periodische Dezimalbrüche geschrieben werden. Was für eine Zahl ist also $\sqrt{2}$?

Was stellen wir fest?

Die vorgenommenen Annäherungen zeigen, dass es *Zahlen gibt*, die als nichtperiodische Dezimalbrüche ausgedrückt werden (bei denen sich die Dezimalstellen nicht periodisch wiederholen). Mit anderen Worten, diese Zahlen sind weder endliche Dezimalbrüche noch periodische (einfache oder gemischte) Dezimalbrüche, sie sind also keine rationalen Zahlen.

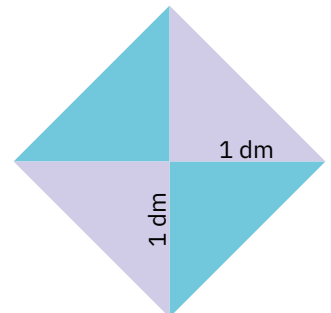


Abbildung 1

Geschichte der Mathematik

Obwohl wir oben mit verschiedenen Methoden eine ausreichend große Anzahl von Dezimalstellen für die Zahl $\sqrt{2}$ ermittelt haben, haben wir nur eine *endliche* Anzahl von Dezimalstellen untersucht. Nur auf der Grundlage dieser Computerschätzungen können wir nicht entscheiden, ob $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist oder nicht.

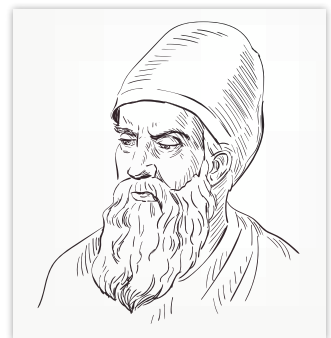
In seinem Buch *Die Elemente* bewies Euklid (geb. ca. 325 v. Chr.), dass:

$$\sqrt{2} \text{ keine rationale Zahl ist.}$$

Wenn man mithilfe der Methode der Zurückführung auf einen Widerspruch annimmt, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, gäbe es die von null verschiedenen, teilerfremden natürlichen Zahlen (relative Primzahlen) p und q , sodass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, oder, äquivalent, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Daraus folgt, dass $p^2 = 2q^2$, also p durch 2 teilbar ist. Wenn $p = 2s$, dann ist $4s^2 = 2q^2$, d. h., $q^2 = 2s^2$, also ist auch q durch 2 teilbar. Wir erhalten, dass die Zahlen p und q den gemeinsamen Teiler 2 haben, was im Widerspruch zu der Tatsache steht, dass p und q teilerfremd sind. Diese Annahme ist falsch, sodass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Da es sich also nicht um eine rationale Zahl handelt, wird $\sqrt{2}$ als unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch geschrieben.



Euklid

Merke dir!

Zahlen, die als unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche geschrieben werden können, werden als irrationale Zahlen bezeichnet. Also sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ irrationale Zahlen.

Allgemeiner ausgedrückt: Wenn die natürliche Zahl n keine Quadratzahl ist, dann ist $\sqrt{n}$ irrational.

Wenn x eine positive irrationale Zahl ist, dann ist $\sqrt{x}$ irrational. Folglich können wir über die Wurzel aus einer positiven reellen Zahl sprechen.

Beispiele

1. Das Verhältnis zwischen der Länge des Kreises und seinem Durchmesser ist eine irrationale Zahl, die mit dem griechischen Buchstaben π (ρi) bezeichnet wird. Der ungefähre Wert ist $\pi = 3,1415926535\dots$
2. Der Goldene Schnitt, der mit dem griechischen Buchstaben φ (phi) bezeichnet wird, ist die erste irrationale Zahl, die in der Geschichte der Mathematik entdeckt und definiert wurde. Der ungefähre Wert ist $1,6180339887\dots$. Der Goldene Schnitt wurde von Euklid entdeckt. Er teilte eine Strecke in zwei Teile, die er als „Mittelwert“ und „extremes Verhältnis“ bezeichnete, sodass das Verhältnis φ zwischen der Länge der ursprünglichen Strecke und der Länge der längeren Strecke gleich dem Verhältnis der Länge der längeren Strecke zur Länge der kürzeren Strecke ist:

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Gegenwärtige Studien zeigen, dass die goldene Zahl in den Proportionen des menschlichen Körpers, bei vielen Tieren und Pflanzen, in der Struktur der DNA und im Aufbau des Sonnensystems, in der Kunst (Malerei, Musik, Bildhauerei) und Architektur, aber auch in den Wachstumsraten der Bevölkerung und an der Börse auftaucht.

3. Die Zahl $A = 1,010010001000010000010\dots$, bei der sich die Anzahl der 0-Stellen nach jeder 1 um eins erhöht, ist eine irrationale Zahl.

Wäre A ein periodischer Dezimalbruch mit einer Periode von n Ziffern, so müsste unter den n Ziffern zwangsläufig die Ziffer 1 sein, da die Periode nicht nur die Ziffer 0 enthalten kann. Folglich müsste sich unter den n Dezimalstellen von A mindestens eine 1 befinden. Aber unmittelbar nach der n -ten Ziffer 1 von A folgt $n + 1$ -mal die Ziffer 0, also ist A irrational.

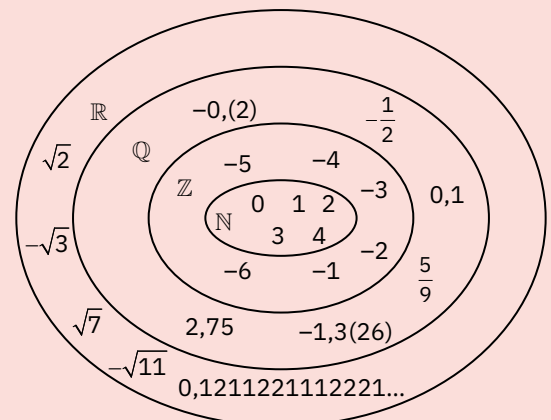
Merke dir!

Die Menge der reellen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{R}$, ist die Vereinigung der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen.

Da die Menge der reellen Zahlen die Menge der rationalen Zahlen enthält, ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Daraus ergibt sich die Folge der Einschlüsse $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Daraus folgt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Also, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.



Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlenachse

Mathe im Alltag

Wir wollen zwei Quadrate aus Papier mit einem Flächeninhalt von 2 cm^2 bzw. 3 cm^2 anfertigen.

Die Seiten der beiden Quadrate haben eine Länge von $\sqrt{2} \text{ cm}$ bzw. $\sqrt{3} \text{ cm}$, also müssen wir Strecken mit diesen Abmessungen konstruieren.

Wir betrachten zuerst ihre Näherungswerte: $\sqrt{2} = 1,414\dots$, $\sqrt{3} = 1,732\dots$

Wir tragen diese Näherungswerte auf der Zahlenachse ein, wobei wir die Maßeinheit auf 1 cm setzen, und erhalten auf der Achse die Punkte A und B (Abbildung 2). Die Strecken OA und OB haben eine Länge von etwa $\sqrt{2} \text{ cm}$ bzw. $\sqrt{3} \text{ cm}$.

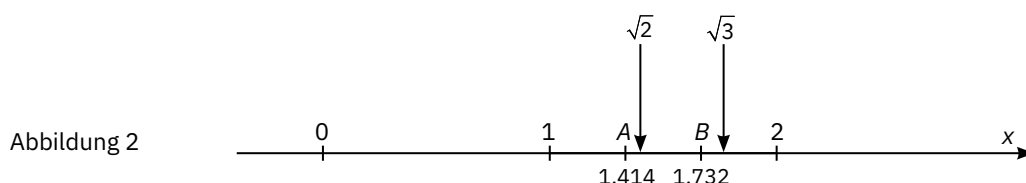


Abbildung 2

Was stellen wir fest?

Eine irrationale Zahl wird durch einen Punkt auf der Zahlenachse dargestellt. Die Lage dieses Punktes kann mithilfe einer hinreichend genauen rationalen Näherung der irrationalen Zahl geschätzt werden.



Merke dir!

Eine Gerade, auf der ein Punkt liegt, der als *Ursprung* bezeichnet wird, eine von links nach rechts verlaufende Richtung, die durch einen Pfeil angezeigt wird und als *positiver Richtungssinn* bezeichnet wird, und eine Strecke, die als *Maßeinheit* angenommen wird, wird *Zahlenachse* genannt. Die *Ox-Achse* hat ihren Ursprung im Punkt O , und der positive Richtungssinn ihrer Punkte verläuft von O nach x .

Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlenachse. Umgekehrt entspricht jeder Punkt auf der Zahlenachse einer einzigen reellen Zahl, die als *Koordinate* oder *Abszisse* des Punktes bezeichnet wird. Der Ursprung der Achse hat die Koordinate 0 (Null). Die Abszisse des Punktes A auf der Zahlenachse wird mit x_A bezeichnet. Wir schreiben dies wie folgt: $A(x_A)$.

Intuitiv besetzen die reellen Zahlen alle Punkte auf der Achse. Da verschiedene reelle Zahlen verschiedenen Punkten auf der Zahlenachse entsprechen, können wir jeden Punkt auf der Achse mit einer reellen Zahl identifizieren.

Bemerkungen

1. Reelle Zahlen, die rechts vom Ursprung dargestellt werden, nennt man positive reelle Zahlen. In ihrer Dezimalschreibweise wird das Zeichen „+“ vor die erste Ziffer geschrieben.

Wie bei den rationalen Zahlen kann auch bei den positiven Zahlen das Vorzeichen weggelassen werden.

Die positiven reellen Zahlen werden mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnet.

Beispiele für positive reelle Zahlen: $+3 = 3$; $+\sqrt{6} = \sqrt{6}$; $+7,51 = 7,51$ usw.

2. Die reellen Zahlen links vom Ursprung werden als negative reelle Zahlen bezeichnet. In ihrer Dezimalschreibweise wird das Zeichen „-“ vor die erste Ziffer geschrieben.

Die Menge der negativen reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}_-$ bezeichnet.

Beispiele für negative reelle Zahlen: -2 ; $-\sqrt{11}$; $-7,1$; $-1,3$ usw.

3. Die reelle Zahl 0 hat kein Vorzeichen (sie ist weder positiv noch negativ).

Die Menge der reellen Zahlen, die nicht Null sind, wird mit $\mathbb{R}^*$ bezeichnet.

Wir haben $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

4. Da irrationale Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ausgedrückt werden, gelten für ihre Abrundungen oder Aufrundungen sowie für das Runden auf eine bestimmte Zifferordnung die gleichen Regeln wie für rationale Zahlen.

Zum Beispiel ist die Abrundung und Aufrundung von $\sqrt{2}$ auf Hundertstel genau 1,41 bzw. 1,42, und die Rundung (Approximation) von $\sqrt{7} = 2,6457\dots$ auf Tausendstel genau 2,646.

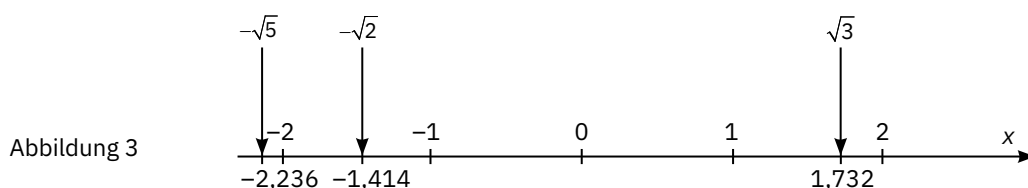
Beispiele

Abbildung 3 zeigt die folgenden reellen Zahlen unter Verwendung von Dezimalapproximationen (Dezimalnäherungswerte):

a. $-\sqrt{2} = -1,414\dots$

b. $\sqrt{3} = 1,732\dots$

c. $-\sqrt{5} = -2,236\dots$



Mathe im Alltag

Stellt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 1 cm dar.

Mithilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich, dass die Hypotenuse den Wert von $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm hat.

Zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete der Länge $\sqrt{2}$ cm, die mit der Hypotenuse des vorherigen Dreiecks zusammenfällt, und mit der Länge der anderen Kathete 1 cm, wie in Abbildung 4. Mithilfe des Satzes von Pythagoras wird abgeleitet, dass die Hypotenuse des zweiten Dreiecks die Länge $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ hat.

Führt das Verfahren fort und konstruiert Strecken mit einer Länge von $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{6}$ cm, und $\sqrt{7}$ cm.

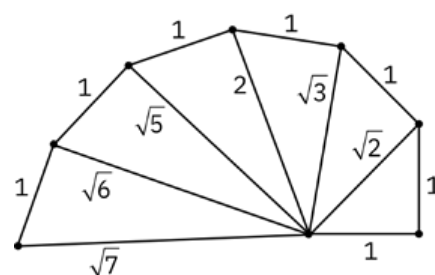


Abbildung 4

Was stellen wir fest?

Mithilfe des Geodreiecks und des Zirkels können wir für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Strecke der Länge $\sqrt{n}$ cm darstellen. Mithilfe des Zirkels und dieser Strecke können wir die reelle Zahl $\sqrt{n}$ genau auf der Achse einzeichnen.

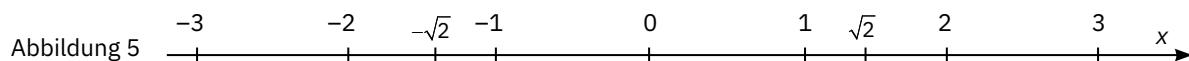
Wusstet ihr das?

Die oben abgebildete Spirale wurde im 5. Jahrhundert v. Chr. von dem Mathematiker Theodoros von Kyrene entdeckt. Sie wird *Spirale von Theodoros* oder *Schnecke des Pythagoras* genannt. Theodoros blieb bei der Darstellung von $\sqrt{17}$ stehen, weil er glaubte, dass sich für $n \geq 18$ die Hypotenusen der Dreiecke mit den bereits dargestellten Strecken überschneiden.

Im Jahr 1958 bewies der Mathematiker Erich Teuffel, dass sich die Hypotenusen der Spirale nicht überschneiden, egal wie lang man Theodoros' Verfahren fortsetzt.

Der Absolutbetrag (Betrag) einer reellen Zahl**Problemstellung**

In Abbildung 5 sind die Punkte, die den Zahlen -3 , $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ und 3 entsprechen, auf einer Achse aufgetragen.



Die Punkte, die den entgegengesetzten Zahlen -3 und 3 entsprechen, haben den gleichen Abstand vom Ursprung. Die Punkte, die den Zahlen $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ entsprechen, haben ebenfalls den gleichen Abstand vom Ursprung. Wir schließen daraus, dass die Zahlen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ ebenfalls entgegengesetzt (Gegenzahlen) sind.

Was stellen wir fest?

Jede reelle Zahl hat eine entgegengesetzte Zahl. Die entgegengesetzten reellen Zahlen befinden sich auf der Zahlenachse im gleichen Abstand vom Ursprung, auf beiden Seiten davon.

Merke dir!

Zwei reelle Zahlen, die nicht null sind, werden als *entgegengesetzt* bezeichnet, wenn ihnen auf der Zahlenachse zwei Punkte entsprechen, die gleich weit vom Ursprung entfernt sind.

Wenn x eine reelle Zahl ist, wird $-x$ als die entgegengesetzte Zahl von x bezeichnet. Die entgegengesetzte Zahl der reellen Zahl 0 ist 0 .

Beispiele

1. Die Gegenzahl von 6 ist -6 .
2. Die Gegenzahl von $-1, (5)$ ist $1, (5)$.
3. Die Gegenzahl von $\sqrt{3}$ ist $-\sqrt{3}$.
4. Die Gegenzahl von $3,5055055505\dots$ ist $-3,5055055505\dots$.

Merke dir!

Der Absolutbetrag einer reellen Zahl x ist der Abstand zwischen dem Ursprung und dem Punkt, der der Zahl x auf der Zahlenachse entspricht.

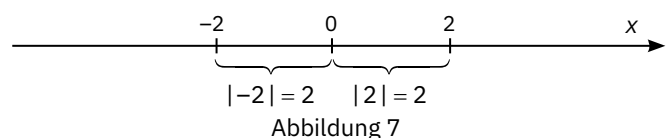
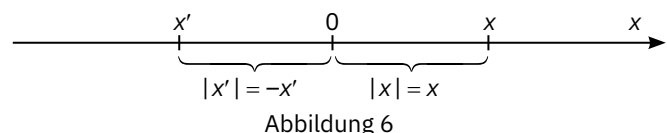
Der Absolutbetrag der reellen Zahl x , auch *Absolutwert*, *Betrag* oder *Modul* von x genannt, wird mit $|x|$ bezeichnet.

Bemerkungen

1. Aus der Interpretation des Absolutbetrags als Abstand (Abbildung 6) folgt, dass der Absolutbetrag einer positiven reellen Zahl die Zahl selbst ist und der Absolutbetrag einer negativen reellen Zahl gleich der ihr entgegengesetzten Zahl ist.

Das heißt, wir haben: $|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x > 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$.

2. Die Absolutbeträge zweier entgegengesetzter Zahlen sind gleich: $|-x| = |x|$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Ein Beispiel ist in Abbildung 7 zu sehen.



3. Eigenschaften des Absolutbetrags einer reellen Zahl

- a. Der Absolutbetrag jeder reellen Zahl ist größer oder gleich 0 (er ist eine nichtnegative Zahl):
 $|x| \geq 0$ für jede reelle Zahl x .
 Außerdem ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
- b. Wenn a und x reelle Zahlen sind und $a > 0$, dann ist $|x| = a$ nur dann, wenn $x = a$ oder $x = -a$.
- c. Zwei beliebige entgegengesetzte reelle Zahlen haben denselben Absolutbetrag: $|x| = |-x|$ für jede reelle Zahl x .
- d. Wenn x und y reelle Zahlen sind, dann ist $|x| = |y|$ nur dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$.
- e. $\sqrt{x^2} = |x|$ für jede reelle Zahl x .
- f. In der Menge der reellen Zahlen werden die Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzierung eingeführt, indem die Operationen aus der Menge der rationalen Zahlen entsprechend erweitert werden.
- i. Der Absolutbetrag der Summe von zwei reellen Zahlen ist höchstens gleich der Summe der Absolutbeträge der beiden Zahlen:
 $|x + y| \leq |x| + |y|$ für zwei beliebige reelle Zahlen x und y .
- ii. Der Absolutbetrag des Produkts zweier reeller Zahlen ist gleich dem Produkt der Absolutbeträge der beiden Zahlen:
 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ für zwei beliebige reelle Zahlen x und y .
- iii. Der Absolutbetrag des Verhältnisses zweier reeller Zahlen ist gleich dem Verhältnis der Absolutbeträge der beiden reellen Zahlen:
 $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ für zwei beliebige reelle Zahlen x und y , wobei $y \neq 0$ ist.
- iv. Der Absolutbetrag einer Potenz mit ganzzahligem Exponenten einer reellen Zahl ist gleich der Potenz ihres Absolutbetrags:
 $|x^n| = |x|^n$ für jede reelle Zahl x und jede ganze Zahl n .

Beispiele

Überprüft die oben genannten Eigenschaften anhand der Beispiele in der folgenden Tabelle.

x	y	$ x $	$ y $	$ x \cdot y $	$\left \frac{x}{y} \right $	$ x + y $	$ x + y $
2	3	2	3	6	$\frac{2}{3}$	5	5
-3	-2	3	2	6	$\frac{3}{2}$	5	5
0	-8	0	8	0	0	8	8
4	-7	4	7	28	$\frac{4}{7}$	3	11
$-2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	36	$\frac{1}{3}$	$4\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$
$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	7	1	0	$2\sqrt{7}$

Beobachtet, in welchen Situationen die Ungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$ Gleichheit ergibt. Begründet!

Vergleichen und Ordnen der reellen Zahlen

Problemstellung

Welche der Zahlen $\sqrt{2}$ und 1,5 ist größer? Um dies zu entscheiden, könnt ihr eine der Methoden wählen, die wir bei rationalen Zahlen gelernt haben:

- A. Wir vergleichen die Dezimalschreibweisen der beiden Zahlen. Da $\sqrt{2} = 1,414\dots$, folgt daraus, dass $\sqrt{2} < 1,5$.
- B. Wir stellen $\sqrt{2}$ und 1,5 auf der Zahlenachse wie in Abbildung 8 dar.
 Da 1,5 rechts von $\sqrt{2}$, liegt, bedeutet dies, dass 1,5 größer ist als $\sqrt{2}$.

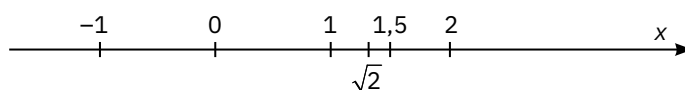


Abbildung 8

Was stellen wir fest?

Wir wissen, dass zwischen zwei rationalen Zahlen, die auf der Zahlenachse aufgetragen sind, die Zahl auf der rechten Seite größer als die andere ist. Dies gilt auch, wenn eine der Zahlen irrational ist oder wenn beide Zahlen irrational sind.

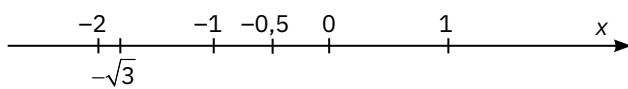
Merke dir!

Von zwei verschiedenen reellen Zahlen ist die Zahl, die weiter rechts auf der Zahlenachse liegt, größer.

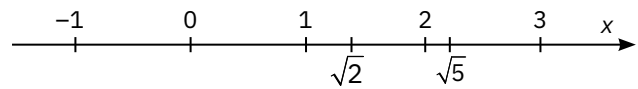
Wenn x und y positive reelle Zahlen sind, dann ist $x < y$ nur dann, wenn $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

Beispiele

1. $-\sqrt{3} < -0,5$, weil sich der Punkt, der $-0,5$ entspricht, auf der Zahlenachse rechts von dem Punkt der der Zahl $-\sqrt{3}$ entspricht, befindet:



2. $\sqrt{5} > \sqrt{2}$, da der Punkt, der der Zahl $\sqrt{5}$ entspricht, sich auf der Zahlenachse rechts von dem Punkt, der der Zahl $\sqrt{2}$ entspricht, befindet:

**Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken**

1. Gebt je zwei Beispiele für:

- a. negative reelle Zahlen;
- b. positive irrationale Zahlen;
- c. rationale, nicht ganze Zahlen;
- d. rationale, nicht reelle Zahlen.

Lösung:

- a. $-1,6$ und $-\sqrt{15}$;
- b. $\sqrt{5}$ und $\sqrt{11}$;
- c. $3, (2)$ und $-\frac{4}{7}$;
- d. Es gibt keine reellen Zahlen, die nicht rational sind.

2. Gebt zwei Beispiele von reellen Zahlen, die:

- a. entgegengesetzt sind.
- b. die Absolutbeträge gleich $\sqrt{6}$ haben.
- c. die Absolutbeträge -5 haben.
- d. auf der Zahlenachse 6 Einheiten vom Ursprung entfernt sind.

Lösung:

- a. 2 und -2 .
- b. Reelle Zahlen mit dem Absolutbetrag gleich $\sqrt{6}$ sind $-\sqrt{6}$ und $\sqrt{6}$.
- c. Der Absolutbetrag einer reellen Zahl ist größer oder gleich null. Daher gibt es keine reellen Zahlen, deren Betrag gleich -5 ist.
- d. Die reellen Zahlen, die auf der Zahlenachse 6 Einheiten vom Ursprung entfernt sind, sind die Zahlen, deren Betrag gleich 6 ist, d. h. -6 und 6.

3. Stellt die folgenden Zahlen auf der Zahlenachse dar und ordnet sie dann in steigender Reihenfolge:

$$-\sqrt{2}; -1,5; \sqrt{0,64}; \sqrt{\frac{25}{4}}; \sqrt{6}.$$

Lösung:

Um die gegebenen Zahlen auf der Achse darzustellen, berechnen wir sie zuerst. Für irrationale Zahlen verwenden wir ihre Näherungswerte.

$$\text{Also } -\sqrt{2} = -1,41\dots, \sqrt{0,64} = 0,8, \sqrt{\frac{25}{4}} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}, \sqrt{6} = 2,44\dots$$

Bei der Achsendarstellung ist die steigende Reihenfolge: $-1,5 < -\sqrt{2} < \sqrt{0,64} < \sqrt{6} < \sqrt{\frac{25}{4}}$.

4. Ordne jede reelle Zahl zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ein:

- a. $\square < 1,6 < \square$;
- b. $\square < -\sqrt{10} < \square$;
- c. $\square < \sqrt{6,25} < \square$.

Lösung:

- a. $1 < 1,6 < 2$.
- b. Wir können dies auf zwei Arten tun:
- Wir approximieren $-\sqrt{10} : -\sqrt{10} = -3,16\dots$. Daraus folgt, dass $-4 < -\sqrt{10} < -3$.
 - Wir bestimmen zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen mit 10 dazwischen. Diese sind 9 und 16. Wir erhalten also $9 < 10 < 16$, woraus folgt, dass $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$, d. h., $3 < \sqrt{10} < 4$, also $-4 < -\sqrt{10} < -3$.
- c. Wir berechnen zuerst $\sqrt{6,25} = \sqrt{(2,5)^2} = 2,5$. Wir erhalten $2 < \sqrt{6,25} < 3$.

Vorgeschlagene Aufgaben



- Betrachtet die Zahlen: $-6; \sqrt{5}; 0; -2,8; \frac{4}{3}; -\sqrt{6}; 7; -10; \sqrt{15}; 5,4(12)$. Gebt an, welche dieser Zahlen:
 - natürlich;
 - ganz;
 - rational;
 - irrational;
 - reell sind.
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?
 - 0 ist eine natürliche Zahl.
 - 1,6 ist eine ganze Zahl.
 - $-5,(4)$ ist eine irrationale Zahl.
 - $\sqrt{3}$ ist eine reelle Zahl.
 - $\sqrt{4}$ ist eine natürliche Zahl.
 - $-\sqrt{8}$ ist eine irrationale Zahl.
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?
 - $9 \in \mathbb{N}$;
 - $0 \in \mathbb{Z}$;
 - $0 \notin \mathbb{Q}$;
 - $1,7 \in \mathbb{R}$;
 - $-\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$;
 - $\sqrt{15} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 - $\sqrt{15^2} \in \mathbb{N}$;
 - $\sqrt{(2,45)^2} \in \mathbb{Q}$.
- Ermittelt, falls erforderlich, mithilfe des Taschenrechners:
 - die Abrundungen (die unteren Näherungswerte) auf die Zehntelordnung der Zahlen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{74}$;
 - die Aufrundungen (die oberen Näherungswerte) auf die Hundertstelordnung der Zahlen $\sqrt{7}$ und $\sqrt{68}$;
 - die Rundungen auf die Tausendstelordnung der Zahlen $\sqrt{17}$ und $\sqrt{219}$.
- Stellt die folgenden reellen Zahlen auf der Zahlenachse dar und schreibt sie dann in steigender Reihenfolge auf:
 - $-3; \sqrt{3}; -2,4; -\sqrt{2}; 1,3$;
 - $-\sqrt{6}; \sqrt{5}; \frac{3}{2}; -2; \sqrt{4}$;
 - $-2,5; \sqrt{2}; 1,5; -\sqrt{6}; \frac{5}{2}$.
- Füllt die Tabelle aus:

x	4	1,7	$\sqrt{10}$			$-\frac{5}{12}$	
-x				4,12	$\sqrt{18}$		$-\sqrt{13,1}$
x							
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?
 - $|+3| = 3$;
 - $|-1,6| = +1,6$;
 - $|-9| = -9$;
 - $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$;
 - $|\sqrt{13}| = -\sqrt{13}$;
 - $|\frac{3}{7}| = \frac{7}{3}$;
 - $|0| = 0$;
 - $|\sqrt{7,5}| = \sqrt{7,5}$.
- Zeigt, dass die folgenden Zahlen rational sind:
 - $\sqrt{\frac{4}{9}}$;
 - $\sqrt{\frac{25}{81}}$;
 - $\sqrt{7\frac{9}{16}}$;
 - $\sqrt{0,81}$.
- Entscheidet, welche der folgenden Zahlen rational und welche irrational sind:
 - $\sqrt{27^2}$;
 - $\sqrt{5^2 \cdot 2}$;
 - $\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$;
 - $\sqrt{99}$.
- Betrachtet die Menge $A = \left\{-6; \frac{3}{4}; \sqrt{7}; -\sqrt{12}; 3,(4); \sqrt{24}; 0; 1,8\right\}$. Schreibt die Elemente der Mengen $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap \mathbb{R}$, $A \setminus \mathbb{Q}$, $A \setminus \mathbb{R}$.

11. Ordnet jede reelle Zahl zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ein:

- a. $\square < 2,7 < \square$; b. $\square < \sqrt{6} < \square$; c. $\square < -\sqrt{20} < \square$; d. $\square < \sqrt{99} < \square$;
 e. $\square < \sqrt{\frac{243}{5}} < \square$; f. $\square < \sqrt{\frac{531}{2}} < \square$; g. $\square < \sqrt{751,3} < \square$; h. $\square < -\sqrt{5,4} < \square$.

12. a. Gebt zwei Beispiele von rationalen Zahlen zwischen 3 und 4 an.

b. „Zwei irrationale Zahlen zwischen 3 und 4 sind ... und ...“. Füllt die Lücken aus, um eine wahre Aussage zu erhalten.

13. Bestimmt die Elemente der Mengen:

- a. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 4\}$; b. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{x} < 4\}$; c. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq \sqrt{x} < 3\}$.

14. Vergleicht die Zahlen:

- a. $\sqrt{2}$ und 1,5; b. $-\sqrt{3}$ und -2; c. $\frac{2}{3}$ und $\sqrt{0,36}$; d. $-\sqrt{34}$ und $-\sqrt{35}$.

15. Ordnet die Zahlen in steigender Reihenfolge:

- a. -4; -3; 9; -2, (64); -3,89; -2,6; b. $-\sqrt{11}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{8}$; $-\sqrt{10}$; $\sqrt{7}$; c. 1; $\sqrt{3}$; 2; $\sqrt{2}$; 1,5.

16. Berechnet:

- a. $|1 - 1,5|$; b. $\left|\frac{1}{2} - 2\right|$; c. $|\sqrt{2} - 1|$; d. $|\sqrt{5} - \sqrt{3}|$;
 e. $|4 - \sqrt{17}|$; f. $|\sqrt{8} + 3|$; g. $|\sqrt{5} - \sqrt{6}|$; h. $|\sqrt{7} + 2|$.

17. Betrachtet die Menge $A = \{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots; \sqrt{30}\}$.

- a. Bestimmt, wie viele rationale Zahlen und wie viele irrationale Zahlen A enthält.
 b. Berechnet die Summe der Quadrate der irrationalen Zahlen in A.

18. Zeigt, dass die Zahl $\sqrt{x}$ in jedem der folgenden Fälle rational ist:

- a. $x = 3^2 + 4^2$; b. $x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$; c. $x = 7^2 + 24^2$; d. $x = 7^{100}$.

19. Zeigt, dass die folgenden Zahlen irrational sind:

- a. $\sqrt{1+2+3+\dots+10}$; b. $\sqrt{5^{10}+6^{10}+1}$; c. $\sqrt{10^{10}+11^{11}+12^{12}}$.

20. Bestimmt die reellen Zahlen x, wenn bekannt ist, dass:

- a. $|x| = \sqrt{5}$; b. $|x| = -\sqrt{10}$; c. $|x| \leq 0$; d. $|x| > 0$.

21. Beweist, dass wenn x eine positive irrationale Zahl ist, dann ist $\sqrt{x}$ irrational.

22. Sei die Menge $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{15} < |x| < \sqrt{14}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{13} < |x| < \sqrt{23}\}$ und $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq \sqrt{17}\}$.
 Bestimmt $A \cap B$, $B \cap C$ und $C \cap A$.

23. Bestimmt die Werte der Ziffer x in der Zehnerbasis so, dass:

- a. $\sqrt{x76} \in \mathbb{Q}$; b. $\sqrt{x84} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c. $\sqrt{\frac{84x}{45}} \in \mathbb{Q}$; d. $\sqrt{\frac{x2}{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Test

1. Stellt die folgenden reellen Zahlen auf der Zahlenachse dar und schreibt sie in steigender Reihenfolge auf:

-1,5; $-\sqrt{3}$; 0,5; $\sqrt{5}$; $\frac{3}{2}$. (3 Pkte.)

2. Beweist, dass die Menge $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq \sqrt{x} < 3\}$ gleich ist mit der Menge:

- a. $\{5; 6; 7; 8\}$; b. $\{4; 5; 6; 7; 8\}$; c. $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; d. $\{5; 6; 7; 8; 9\}$. (3 Pkte.)

3. Betrachtet die Menge $A = \left\{-4; \sqrt{2}; -\sqrt{7}; \sqrt{10}; -1, (25); \frac{1}{4}; 0; -11,6\right\}$.

Schreibt die Elemente folgender Mengen auf: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap \mathbb{R}$, $A \setminus \mathbb{Q}$, $A \setminus \mathbb{R}$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



3. Lektion: Rechenregeln für Quadratwurzeln

Schlüsselwörter

Produkt der Quadratwurzeln

Herausheben von Faktoren aus der Wurzel

Quotient (Verhältnis) der Quadratwurzeln

Einführen von Faktoren unter die Wurzel

Das Produkt der Quadratwurzeln

Problemstellung

Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen der Quadratwurzel des Produkts zweier positiver reeller Zahlen und dem Produkt der Quadratwurzeln dieser Zahlen. Für die Zahlen 4 und 9 erhalten wir: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$ und $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$.

Also, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$.

Ähnlich verhält es sich bei 16 und 36: $\sqrt{16} \cdot \sqrt{36} = 4 \cdot 6 = 24$, und $\sqrt{16 \cdot 36} = \sqrt{576} = 24$. Also $\sqrt{16} \cdot \sqrt{36} = \sqrt{16 \cdot 36}$.

Was stellen wir fest?

Das Produkt der Quadratwurzeln der Zahlen 4 und 9 ist gleich mit der Quadratwurzel des Produkts der Zahlen 4 und 9. Das Gleiche gilt für die Zahlen 16 und 36.

Merke dir!

Das Produkt der Quadratwurzeln zweier positiver reeller Zahlen ist gleich mit der Quadratwurzel des Produkts der beiden Zahlen. Mit anderen Worten:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ für beliebige reelle Zahlen } a \geq 0, b \geq 0.$$

Die obige Gleichheit wird auch in der Form geschrieben:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ (Zerlegung einer Wurzel in ein Produkt von Wurzeln).}$$

Beispiele

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6;$$

$$\sqrt{242} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{242 \cdot 50} = \sqrt{12100} = 110;$$

$$\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 27}{3 \cdot 2}} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6;$$

2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$$\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30;$$

$$\sqrt{0,25 \cdot 9} = \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{9} = 0,5 \cdot 3 = 1,5;$$

$$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 7 \cdot 10 = 70.$$

Der Quotient der Quadratwurzeln

Problemstellung

Gesucht wird ein Zusammenhang zwischen der Wurzel des Quotienten zweier positiver rationaler Zahlen und den Quotienten der Wurzeln dieser Zahlen.

Für die Zahlen 36 und 4 erhalten wir: $\sqrt{36} : \sqrt{4} = 6 : 2 = 3$ und $\sqrt{36 : 4} = \sqrt{9} = 3$.

Also $\sqrt{36} : \sqrt{4} = \sqrt{36 : 4}$.

Für 25 und 9 ergibt sich daraus eine Analogie: $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$ und $\sqrt{\frac{25}{9}} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}$.

Also $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}}$.

Was stellen wir fest?

Der Quotient der Wurzeln der Zahlen 36 und 4 ist gleich mit der Wurzel des Quotienten der Zahlen 36 und 4. Das Gleiche gilt für die Zahlen 25 und 9.

Merke dir!

Der Quotient der Wurzeln zweier positiver reeller Zahlen ist gleich der Wurzel des Quotienten der beiden Zahlen.

Mit anderen Worten:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ für beliebige reelle Zahlen } a \geq 0, b > 0.$$

Die obige Gleichheit wird auch in der Form geschrieben:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ (Zerlegung einer Quadratwurzel in ein Verhältnis von Quadratwurzeln)}$$

Beispiele

$$1. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{0,03}} = \sqrt{\frac{3}{0,03}} = \sqrt{100} = 10;$$

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\frac{\sqrt{405}}{\sqrt{500}} = \sqrt{\frac{405}{500}} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10};$$

$$2. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5};$$

$$\sqrt{1,69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{100}} = \frac{13}{10};$$

$$\sqrt{5,4} = \sqrt{5 \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}.$$

Bemerkung

Die Wurzel der Summe zweier positiver Zahlen ist nicht gleich der Summe der Wurzeln der beiden Zahlen.

Genauer gesagt, wenn $a, b > 0$, dann $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Für $a = 16$ und $b = 25$ ergibt sich zum Beispiel $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4 + 5 = 9$, aber $\sqrt{a+b} = \sqrt{34} \approx 5,83\dots$

Herausheben von Faktoren aus der Wurzel**Problemstellung**

Wir wollen eine Wurzel in Form eines Produkts schreiben, sodass einer der Faktoren von 1 verschieden ist und keine Wurzeln enthält.

Wir stellen fest, dass $20 = 4 \cdot 5$, also ist $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$.

Da $18 = 9 \cdot 2$ ist, können wir $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$ schreiben.

Wir schreiben $75 = 25 \cdot 3$, was $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$ ergibt.

Da $50 = 25 \cdot 2$ ist, ergibt sich: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$.

Was stellen wir fest?

Mithilfe der Tatsache, dass die Wurzel des Produkts zweier positiver Zahlen gleich dem Produkt der Wurzeln der Zahlen ist, können wir einige Wurzeln als Produkt einer Wurzel und eines von 1 verschiedenen Faktors, der keine Wurzeln enthält, schreiben.

Merke dir!

Für zwei beliebige positive reelle Zahlen a und b gilt die Gleichheit $\sqrt{a^2 b} = a \cdot \sqrt{b}$.

Die Schreibweise der Zahl $\sqrt{a^2 \cdot b}$ in der Form $a \cdot \sqrt{b}$ heißt, den Faktor a aus der Wurzel herausheben.

- Beispiele:**
- a. $\sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$ (Wir haben den Faktor 5 aus der Wurzel herausgehoben.)
 - b. $\sqrt{7^2 \cdot 11} = 7\sqrt{11}$ (Wir haben den Faktor 7 aus der Wurzel herausgehoben.)
 - c. $\sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$ (Wir haben den Faktor 3 aus der Wurzel herausgehoben.)
 - d. $\sqrt{7^5} = \sqrt{(7^2)^2 \cdot 7} = 7^2 \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$ (Wir haben eine Potenz von 7 aus der Wurzel herausgehoben.)





Bemerkungen

1. Wenn a eine beliebige reelle Zahl und b eine positive reelle Zahl ist, dann gilt der Ausdruck $\sqrt{a^2 b}$. In diesem Fall gilt die Beziehung: $\sqrt{a^2 b} = |a| \cdot \sqrt{b}$.

Beispiel: $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3} = \sqrt{(-5)^2} \cdot \sqrt{3} = |-5| \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

2. Befindet sich unter der Wurzel eine natürliche Zahl, so geht dem Herausheben der Faktoren aus der Wurzel oft die Zerlegung der natürlichen Zahl in Primfaktoren voraus.

Beispiele: a. Die Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl 12 ist $12 = 2^2 \cdot 3$. Daraus folgt:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

b. Die Zahl 54 lässt sich wie folgt in Primfaktoren zerlegen: $54 = 2 \cdot 3^3$. Dann:

$$\sqrt{54} = \sqrt{2 \cdot 3^3} = \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}.$$

Einführung von Faktoren unter die Wurzel



Problemstellung

Welche der Zahlen $2\sqrt{3}$ und $3\sqrt{2}$ ist größer?

Methode I: Wir verwenden Näherungswerte:

$$\sqrt{3} = 1,732..., \text{ also } 2\sqrt{3} \approx 3,464...;$$

$$\sqrt{2} = 1,414..., \text{ also } 3\sqrt{2} \approx 4,242...;$$

Beachtet, dass $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Methode II Wir verwenden die Rechenregeln für Quadratwurzeln:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12};$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}.$$

Da $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ ist, ist das Ergebnis $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Was stellen wir fest?

Um die beiden Zahlen nach der zweiten Methode zu vergleichen, haben wir die Zahlen $2\sqrt{3}$ und $3\sqrt{2}$ als eine einzige Wurzel geschrieben. Man sagt, dass wir die Faktoren, die vor dem Wurzelzeichen stehen, unter die Wurzel eingeführt haben.



Merke dir!

Für zwei beliebige Zahlen $a, b \geq 0$ gilt die Gleichheit $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

Das Schreiben der Zahl $a \cdot \sqrt{b}$ in der Form $\sqrt{a^2 \cdot b}$ nennt man die Einführung des Faktors a unter die Wurzel.

Beispiele:

a. $3\sqrt{11} = \sqrt{3^2 \cdot 11} = \sqrt{99}$

(Wir haben den Faktor 3 unter die Wurzel eingeführt.)

b. $7\sqrt{3} = \sqrt{7^2 \cdot 3} = \sqrt{147}$

(Wir haben den Faktor 7 unter die Wurzel eingeführt.)

c. $5\sqrt{5} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = \sqrt{5^3}$

(Wir haben den Faktor 5 unter die Wurzel eingeführt.)

d. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 7}{16 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{63}{80}}$

(Wir haben den Faktor $\frac{3}{4}$ unter die Wurzel eingeführt.)

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. Schreibt jede der folgenden Zahlen als Produkt von zwei Wurzeln:

a. $\sqrt{58}$;

b. $\sqrt{35}$;

c. $\sqrt{51}$;

d. $\sqrt{187}$.

Lösung:

Wir verwenden die Regel $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ für $a \geq 0, b \geq 0$.

a. $\sqrt{58} = \sqrt{2 \cdot 29} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{29}$;

b. $\sqrt{35} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$;

c. $\sqrt{51} = \sqrt{17 \cdot 3} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{3}$;

d. $\sqrt{187} = \sqrt{17 \cdot 11} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{11}$.

2. Schreibt jede der folgenden Zahlen als Quotient zweier Wurzeln:

a. $\sqrt{\frac{24}{5}}$;

b. $\sqrt{13:2}$;

c. $\sqrt{0,147}$;

d. $\sqrt{3,(5)}$.

Lösung:

Wir verwenden die Regel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ für $a \geq 0, b > 0$.

a. $\sqrt{\frac{24}{5}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}};$

b. $\sqrt{13:2} = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}};$

c. $\sqrt{0,147} = \sqrt{\frac{147}{1000}} = \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{1000}};$

d. $\sqrt{3,(5)} = \sqrt{3\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}}.$

3. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus und schreibt, wo es der Fall ist, die Existenzbedingungen von Wurzeln auf:

a. $\sqrt{24x^2};$

b. $\sqrt{12x^3};$

c. $\sqrt{20x^4y};$

d. $\sqrt{27x^5y^2}.$

Lösung:

a. Da $x^2 \geq 0$ für jedwede reelle Zahl x , hat der Ausdruck $\sqrt{24x^2}$ Sinn für jedwede reelle Zahl x . Dann:

$$\sqrt{24x^2} = \sqrt{2^3 \cdot 3 \cdot x^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2} = 2\sqrt{6} \cdot |x| = \begin{cases} 2x\sqrt{6}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -2x\sqrt{6}, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

b. Die Existenzbedingung der Quadratwurzel ist $x^3 \geq 0$, was zu $x \geq 0$ führt. Wir haben:

$$\sqrt{12x^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot x^3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} = 2x\sqrt{3x}.$$

c. Da $x^4 \geq 0$ für jedwede reelle Zahl x , gibt es keine Bedingung für x . Aber die Bedingung $y \geq 0$ muss erfüllt sein. Dann:

$$\sqrt{20x^4y} = \sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot y} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{y} = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot \sqrt{y} = 2x^2\sqrt{5y}.$$

d. Die zu erfüllende Bedingung ist $x^5 \geq 0$ was zu $x \geq 0$ führt. Da $y^2 \geq 0$ ist, muss jedwede reelle Zahl y keine Bedingung erfüllen. Wir erhalten:

$$\sqrt{27x^5y^2} = \sqrt{3^3 \cdot x^5 \cdot y^2} = \sqrt{3^3} \cdot \sqrt{x^5} \cdot \sqrt{y^2} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot |y| = 3x^2|y|\sqrt{3x}.$$

4. Führt die Faktoren unter die Wurzel ein:

a. $x\sqrt{5}, x < 0;$

b. $-a\sqrt{10}, a < 0;$

c. $-y^2\sqrt{7}, y < 0;$

d. $-xy^3\sqrt{6}, x < 0, y \geq 0.$

Lösung:

Bei Quadratwurzeln werden nur positive Faktoren eingeführt, sodass wir darauf achten müssen, diese Bedingung zu erfüllen.

a. Da $x < 0$ ist, folgt daraus, dass $-x > 0$ ist.

$$\text{Somit ist } x\sqrt{5} = -(-x)\sqrt{5} = -\sqrt{(-x)^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{(-x)^2 \cdot 5} = -\sqrt{5x^2}.$$

b. Da $a < 0$ ist, folgt daraus, dass $-a > 0$ ist. Also, $-a\sqrt{10} = \sqrt{(-a)^2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{(-a)^2 \cdot 10} = \sqrt{10a^2}.$

c. Wir haben $y < 0$, aber $y^2 > 0$. Somit ist $-y^2\sqrt{7} = -\sqrt{(y^2)^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{(y^2)^2 \cdot 7} = -\sqrt{7y^4}.$

d. Wir haben $x < 0$, also $-x > 0$. Da $y \geq 0$ ist, folgt daraus, dass $y^3 \geq 0$ ist. Wir erhalten:

$$-xy^3\sqrt{6} = \sqrt{(-x)^2} \cdot \sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{(-x)^2 \cdot (y^3)^2 \cdot 6} = \sqrt{6x^2y^6}.$$

5. Vergleicht die folgenden Zahlen:

a. $2\sqrt{7}$ und $7\sqrt{2};$

b. $-3\sqrt{3}$ und $-4\sqrt{2};$

c. $4\sqrt{3}$ und $7;$

d. $6\sqrt{3} - 4\sqrt{7}$ und $0.$

Lösung:

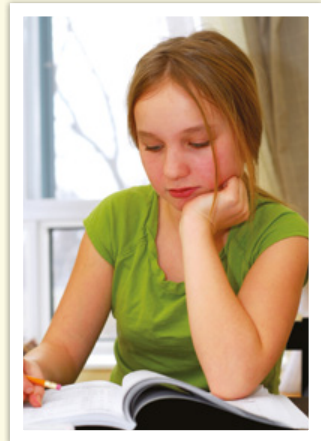
a. Wir führen zuerst die Faktoren unter die Wurzel ein:

$$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28} \text{ und } 7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{98}. \text{ Da } \sqrt{28} < \sqrt{98} \text{ ist, folgt daraus, dass } 2\sqrt{7} < 7\sqrt{2} \text{ ist.}$$

b. $-3\sqrt{3} = -\sqrt{3^2 \cdot 3} = -\sqrt{27}$ und $-4\sqrt{2} = -\sqrt{4^2 \cdot 2} = -\sqrt{32}$. Da $-\sqrt{27} > -\sqrt{32}$ ist, folgt daraus, dass $-3\sqrt{3} > -4\sqrt{2}$ ist.

c. $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$ und $7 = \sqrt{7^2} = \sqrt{49}$. Da $\sqrt{48} < \sqrt{49}$ ist, folgt daraus, dass $4\sqrt{3} < 7$ ist.

d. $6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = \sqrt{108}$ und $4\sqrt{7} = \sqrt{4^2 \cdot 7} = \sqrt{112}$. Da $\sqrt{108} < \sqrt{112}$ ist, folgt daraus, dass $\sqrt{108} - \sqrt{112} < 0$ ist, also $6\sqrt{3} - 4\sqrt{7} < 0$.



Vorgeschlagene Aufgaben



1. Schreibt mit nur einer Wurzel:

- | | | | |
|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| a. $\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$; | b. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}$; | c. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$; | d. $\sqrt{11} \cdot \sqrt{15}$; |
| e. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}$; | f. $\sqrt{21} \cdot \sqrt{5}$; | g. $\sqrt{19} \cdot \sqrt{6}$; | h. $\sqrt{22} \cdot \sqrt{3}$. |

2. Berechnet:

- | | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| a. $\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{5}$; | b. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2,2}$; | c. $\sqrt{3,1} \cdot \sqrt{10}$; | d. $\sqrt{1,12} \cdot \sqrt{50}$; |
| e. $-\sqrt{3,5} \cdot \sqrt{20}$; | f. $-\sqrt{0,4} \cdot (-\sqrt{15})$; | g. $\sqrt{4,5} \cdot (-\sqrt{24})$; | h. $\sqrt{0,06} \cdot \sqrt{50}$. |

3. Berechnet:

- | | | | |
|--|--|---|--|
| a. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$; | b. $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$; | c. $-\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}$; | d. $\sqrt{1\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{2\frac{1}{6}}$; |
| e. $-\sqrt{0,5} \cdot (-\sqrt{1,(3)})$; | f. $\sqrt{0,(5)} \cdot (-\sqrt{1,1})$; | g. $\sqrt{2,(2)} \cdot \sqrt{0,75}$; | h. $\sqrt{0,0(4)} \cdot \sqrt{13,5}$. |

4. Zeigt, dass die folgenden Rechnungen eine natürliche Zahl ergeben:

- | | | | |
|--|---|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3,2}$; | b. $\sqrt{6,25} \cdot \sqrt{4}$; | c. $-\sqrt{0,9} \cdot (-\sqrt{40})$; | d. $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,32}$; |
| e. $\sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{125}$; | f. $\sqrt{1\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{0,7}$; | g. $\sqrt{5,(3)} \cdot \sqrt{0,75}$; | h. $\sqrt{2,1(3)} \cdot \sqrt{7,5}$. |

5. Schreibt jede der folgenden Zahlen als Produkt von zwei Wurzeln:

- a. $\sqrt{6}$; b. $\sqrt{35}$; c. $\sqrt{49}$; d. $\sqrt{28}$; e. $\sqrt{46}$; f. $\sqrt{88}$; g. $\sqrt{164}$; h. $\sqrt{250}$.

6. Schreibt mit einer einzigen Wurzel:

- a. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$; b. $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$; c. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$; d. $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}}$; e. $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$; f. $\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}}$; g. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{42}}$; h. $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{280}}$.

7. Schreibt jede der folgenden Zahlen als Quotient (Verhältnis) zweier Wurzeln:

- a. $\sqrt{\frac{2}{7}}$; b. $\sqrt{\frac{3}{10}}$; c. $\sqrt{4\frac{3}{5}}$; d. $\sqrt{5\frac{7}{10}}$; e. $\sqrt{0,7}$; f. $\sqrt{1,325}$; g. $\sqrt{3,(2)}$; h. $\sqrt{2,4(1)}$.

8. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus:

- a. $\sqrt{12}$; b. $\sqrt{20}$; c. $\sqrt{68}$; d. $\sqrt{60}$; e. $\sqrt{92}$; f. $\sqrt{120}$; g. $\sqrt{200}$; h. $\sqrt{252}$.

9. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus:

- | | | | |
|---|--|--|--|
| a. $\sqrt{2^2 \cdot 3 + 3\sqrt{4}}$; | b. $\sqrt{2^3 \cdot 5 + 2\sqrt{25}}$; | c. $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 + 5\sqrt{16}}$; | d. $\sqrt{25 \cdot 4 - 2\sqrt{25}}$; |
| e. $\sqrt{4\sqrt{121} + 2^3 \cdot 3^2}$; | f. $\sqrt{6^2 \cdot 5 + 3\sqrt{36}}$; | g. $\sqrt{15^2 \cdot 2 - 6\sqrt{225}}$; | h. $\sqrt{67 \cdot 2^2 + 5\sqrt{361}}$. |

10. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus:

- a. $\sqrt{\frac{48}{25}}$; b. $\sqrt{\frac{68}{144}}$; c. $\sqrt{\frac{192}{169}}$; d. $\sqrt{\frac{245}{256}}$; e. $\sqrt{\frac{450}{81}}$; f. $\sqrt{\frac{864}{121}}$; g. $\sqrt{\frac{748}{289}}$; h. $\sqrt{\frac{875}{441}}$.

11. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus und schreibt, wo es der Fall ist, die Existenzbedingungen von Wurzeln auf:

- a. $\sqrt{20x^2}$; b. $\sqrt{45x^2y}$; c. $\sqrt{32x^3y^2}$; d. $\sqrt{68x^4y^6}$.

12. Ordnet jeder Zahl in der ersten Zeile die entsprechende Schreibweise in der zweiten Zeile zu:

a. $2\sqrt{5}$	b. $3\sqrt{6}$	c. $4\sqrt{2}$	d. $9\sqrt{3}$	e. $-2\sqrt{7}$	f. $-4\sqrt{5}$	g. $-5\sqrt{10}$	h. $-7\sqrt{6}$
----------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	------------------	-----------------

A. $\sqrt{243}$	B. $\sqrt{32}$	C. $-\sqrt{28}$	D. $\sqrt{18}$	E. $-\sqrt{250}$	F. $-\sqrt{80}$	G. $-\sqrt{294}$	H. $\sqrt{20}$	I. $\sqrt{54}$
-----------------	----------------	-----------------	----------------	------------------	-----------------	------------------	----------------	----------------

13. Führt die Faktoren unter die Wurzel ein:

a. $\frac{1}{3}\sqrt{7}$;

b. $\frac{2}{5}\sqrt{20}$;

c. $-\frac{3}{7}\sqrt{14}$;

d. $-\frac{4}{3}\sqrt{45}$;

e. $0,3\sqrt{\frac{5}{3}}$;

f. $-1,(2)\sqrt{\frac{3}{11}}$;

g. $2,(1)\sqrt{0,81}$;

h. $0,3(4)\sqrt{\frac{81}{31}}$.

14. Führt die Faktoren unter die Wurzel ein:

a. $x\sqrt{2}, x > 0$;

b. $-x\sqrt{5}, x < 0$;

c. $-x^3\sqrt{10}, x < 0$;

d. $x^2\sqrt{6}, x < 0$;

e. $-xy\sqrt{7}, x < 0, y \geq 0$;

f. $-x^3y^2\sqrt{7}, x > 0, y < 0$.

15. Vergleichen die folgenden Zahlen:

a. $2\sqrt{5}$ und $3\sqrt{2}$;

b. $2\sqrt{7}$ und $3\sqrt{3}$;

c. $4\sqrt{2}$ und $2\sqrt{10}$;

d. $-3\sqrt{6}$ und $-2\sqrt{14}$;

e. $-2\sqrt{23}$ und $-4\sqrt{6}$;

f. $3\sqrt{7}$ und 8;

g. $-4\sqrt{5}$ und -9;

h. $5\sqrt{5}-11$ und 0.

16. Ordnet die Elemente der Mengen A und B in steigender Reihenfolge:

$A = \{2\sqrt{2}; \sqrt{21}; 2\sqrt{6}; 3\sqrt{2}; 2\sqrt{5}; \sqrt{19}\}$;

$B = \{2\sqrt{7}; 3\sqrt{3}; 5; 2\sqrt{10}; 5\sqrt{2}; 4\sqrt{3}\}$.

17. In Abbildung 1 werden die Punkte A, B, C, D, E, F und G auf der Ox-Achse der reellen Zahlen durch Punkte dargestellt. Ihre Abszissen sind die Zahlen:

$2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{0,25}, -\sqrt{3}, -\sqrt{0,64}, 2\sqrt{3}, \sqrt{5}$.

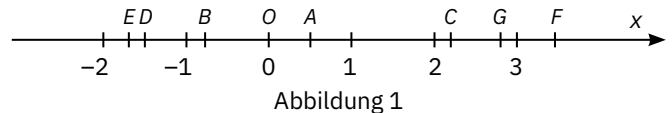


Abbildung 1

a. Stellt die Punkte $H(1)$, $I(-3)$ und $J(\sqrt{2})$ auf der Achse dar.

b. Bestimmt die Abszissen der Punkte A, B, C, D, E, F und G.

c. Schreibt die Punktpaare auf die Achse, deren Abszissenprodukt eine ganze Zahl ist.

Test

1. Berechnet:

a. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$; b. $\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{\frac{125}{6}}$; c. $\frac{\sqrt{156}}{\sqrt{26}}$; d. $\sqrt{5,(4)} \cdot 3$. (3 Pkte.)

2. Das Ergebnis der Rechnung $|\sqrt{3}-1| + |\sqrt{3}-2| + |-1|$ ist:

a. 2; b. $\sqrt{3}$; c. $2+\sqrt{3}$; d. 0. (3 Pkte.)

Wählt den Buchstaben aus, der der richtigen Antwort entspricht.

3. Setzt eines der Zeichen $<$, $=$ oder $>$ zwischen die beiden Zahlen, um eine richtige Aussage zu erhalten:

a. $3\sqrt{2} \square 2\sqrt{6}$; b. $-2\sqrt{7} \square -3\sqrt{3}$; c. $3\sqrt{11} \square 10$; d. $4\sqrt{5}-9 \square 0$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



4. Lektion: Addition und Subtraktion der reellen Zahlen

Schlüsselwörter

Addition

Summe

gleichartige Glieder (Summanden)

Subtraktion

Differenz

Addition der reellen Zahlen

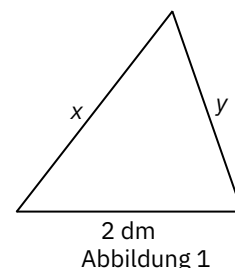


Problemstellung

Das Dreieck in Abbildung 1 hat die Seitenlängen 2 dm, x dm und y dm, wobei x und y reelle Zahlen sind.

Wir versuchen, den Umfang des Dreiecks in jedem der folgenden Fälle zu bestimmen:

1. $x = 2,23$ und $y = 1,41$;
2. $x = \sqrt{5}$ und $y = \sqrt{2}$.

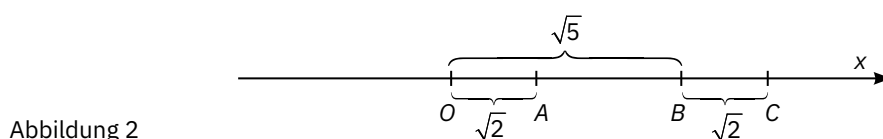


Im ersten Fall, mit $x = 2,23$ und $y = 1,41$, ist der Umfang eine Summe rationaler Zahlen. Wir erhalten:

$$U = 2 + 2,23 + 1,41 = 5,64 \text{ dm.}$$

Im zweiten Fall versuchen wir, dem Ausdruck $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ eine Bedeutung zu geben. Betrachten wir auf der Zahlenachse die Punkte A und B mit den Abszissen $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{5}$, wie in Abbildung 2. Dann ist $OA = \sqrt{2}$ und $OB = \sqrt{5}$.

Dann konstruieren wir einen Punkt C rechts von B , sodass $BC = OA = \sqrt{2}$. Da $OB + BC = OC$, ist es sinnvoll zu sagen, dass $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ die reelle Zahl ist, der der Punkt C auf der Achse entspricht.



Wir können dasselbe tun, um $2 + \sqrt{2}$ oder $\sqrt{5} + 2$ oder sogar $2 + \sqrt{5} + \sqrt{2}$ zu verstehen.

Was stellen wir fest?

Die Summe von zwei reellen Zahlen ist eine reelle Zahl. Das obige Beispiel zeigt, wie wir den Punkt auf der Zahlenachse bestimmen können, der der Summe zweier positiver reeller Zahlen entspricht.



Merke dir!

Addiert man zwei reelle Zahlen a und b , so erhält man eine reelle Zahl, die als $a + b$ bezeichnet wird und die *Summe von a und b* ist.

Die Zahlen a und b werden Glieder (Summanden) der Summe genannt.

Eigenschaften der Addition von reellen Zahlen

1. Die Addition von reellen Zahlen ist assoziativ:
 $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ für beliebige reelle Zahlen a, b, c .
2. Die Addition von reellen Zahlen ist kommutativ:
 $a + b = b + a$ für beliebige reelle Zahlen a und b .
3. Die reelle Zahl 0 ist neutrales Element:
 $a + 0 = 0 + a = a$ für jede reelle Zahl a .
4. Unabhängig von der reellen Zahl a gibt es eine reelle Zahl, die als $-a$ bezeichnet wird und die Gegenzahl (entgegengesetzte Zahl) von a ist, mit der Eigenschaft $a + (-a) = (-a) + a = 0$.



Bemerkung

1. Berechnen der Annäherung der Summe von zwei oder mehr irrationalen Zahlen

Um die Summe zweier irrationaler Zahlen zu approximieren, können wir die beiden Zahlen zwischen ihren Abrundungen und Aufrundungen einschließen. Die Annäherung (Schätzung) der Summe ist umso genauer, je mehr Dezimalstellen die Annäherungen der Summanden enthalten.

Analysieren wir noch einmal die zuvor dargestellte Aufgabe. Für $x = \sqrt{5}$ und $y = \sqrt{2}$ haben wir:

Schätzung (für x und y)	$x = \sqrt{5}$	$y = \sqrt{2}$	$x + y$
mit einem Fehler von weniger als 0,1	$2,2 < x < 2,3$	$1,4 < y < 1,5$	$3,6 < x + y < 3,8$
mit einem Fehler von weniger als 0,01	$2,23 < x < 2,24$	$1,41 < y < 1,42$	$3,64 < x + y < 3,66$
mit einem Fehler von weniger als 0,001	$2,236 < x < 2,237$	$1,414 < y < 1,415$	$3,650 < x + y < 3,652$

Anhand der Daten in der letzten Zeile ergibt sich $5,650 < U < 5,652$, d. h., $U \approx 5,65$ dm (die ersten beiden Nachkommastellen sind exakt).

2. Berechnen der Summe von zwei oder mehr Zahlen der Form $a\sqrt{d}$ (wobei d fest ist)

Um mehrere reelle Zahlen der Form $a\sqrt{d}$, $d \geq 0$, die unter der Wurzel die gleiche Zahl haben, zu addieren, addiert man die Faktoren vor den Wurzeln und multipliziert das Ergebnis mit der Wurzel.

Mit anderen Worten: Wenn a, b, c, d reelle Zahlen sind und $d \geq 0$, dann:

i. $a\sqrt{d} + b\sqrt{d} = (a+b)\sqrt{d}$; ii. $a\sqrt{d} + b\sqrt{d} + c\sqrt{d} = (a+b+c)\sqrt{d}$.

Beispiele

- $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = (3+7) \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$;
- $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (2+3) \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;
- $4\sqrt{5} + 8\sqrt{5} + \sqrt{5} = (4+8+1) \cdot \sqrt{5} = 13\sqrt{5}$;
- $\sqrt{10} + 6\sqrt{10} + \sqrt{10} = (1+6+1) \cdot \sqrt{10} = 8\sqrt{10}$.

Subtraktion der reellen Zahlen

Merke dir!

Die Differenz von zwei reellen Zahlen a und b ist die reelle Zahl d mit der Eigenschaft $a = b + d$.

Die Differenz der Zahlen a und b wird als $a - b$ bezeichnet. Die Zahl a wird als *Minuend* und b als *Subtrahend* bezeichnet. Die Operation, bei der die Zahlen a und b durch ihre Differenz verbunden werden, heißt Subtraktion.

Die Subtraktion zweier reeller Zahlen erfolgt durch Addition des Minuenden und der Gegenzahl des Subtrahenden: $a - b = a + (-b)$ für beliebige reelle Zahlen a und b .

Die Differenz der Zahlen $a\sqrt{d}$ und $b\sqrt{d}$, $d \geq 0$, wird wie folgt durchgeführt:

$$a\sqrt{d} - b\sqrt{d} = (a-b)\sqrt{d}.$$

Beispiele

- $(2 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 2$;
- $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (6-2)\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$;
- $20\sqrt{6} - 13\sqrt{6} - \sqrt{6} = (20-13-1)\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$.

Bemerkung

Eine Folge von Additionen reeller Zahlen wird als *algebraische Summe* reeller Zahlen bezeichnet. Die Gegenzahl einer algebraischen Summe reeller Zahlen ist die algebraische Summe der Gegenzahlen der Glieder der Summe.

Zum Beispiel ist der algebraischen Summe $s = 2\sqrt{3} - \sqrt{7} + 5 - 3, (6)$ entgegengesetzte Summe (Zahl), die algebraische Summe: $s' = -s = -(2\sqrt{3} - \sqrt{7} + 5 - 3, (6)) = -2\sqrt{3} + \sqrt{7} - 5 + 3, (6)$.

Beachtet, dass das „Minuszeichen“ vor einer Klammer das Vorzeichen der Glieder (Terme) in der Klammer ändert.

Untersuchung

Zeichnet die Ox -Zahlenachse und stellt auf ihr die Punkte A, B, C, D mit den Abszissen $x_A = \sqrt{2}$, $x_B = 1 + 2\sqrt{2}$, $x_C = -2$ und $x_D = -1 - \sqrt{2}$, wie in Abbildung 3, dar.

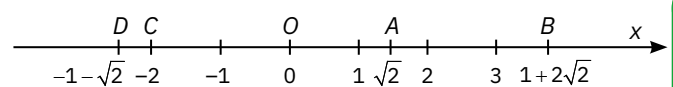


Abbildung 3

a. Füllt die folgenden Kästchen mit + oder - aus, um wahre Aussagen zu erhalten:

A1. $|x_A - x_C| = |x_A| \square |x_C|$;

B1. $|x_A - x_B| = |x_B| \square |x_A|$;

C1. $|x_D - x_C| = |x_D| \square |x_C|$;

A2. $AC = OA \square OC$;

B2. $AB = OB \square OA$;

C2. $CD = OD \square OC$.

b. Vergleicht die Ergebnisse von **A1** und **A2**, dann von **B1** und **B2** und von **C1** und **C2** und setzt sie in Beziehung zu den Vorzeichen der Zahlen x_A, x_B, x_C, x_D . Was stellt ihr fest?

c. Begründet eure Ergebnisse und beweist die folgende allgemeine Eigenschaft:

Wenn A und B zwei beliebige Punkte auf der Zahlenachse mit den Abszissen x_A bzw. x_B sind, dann ist der Abstand zwischen A und B : $AB = |x_A - x_B|$.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. Berechnet:

a. $2\sqrt{5} - 1 + 3\sqrt{5} + 4$;

b. $4\sqrt{7} + 2\sqrt{6} - \sqrt{7} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{7}$;

c. $1,3 + 4\sqrt{10} + 2,7 - \sqrt{10} - 4 - 3\sqrt{10}$;

d. $(-2,5\sqrt{3} + 3,2\sqrt{6}) + 0,3\sqrt{3} + (0,8\sqrt{6} + 1,2\sqrt{3})$.

Lösung:

a. $2\sqrt{5} - 1 + 3\sqrt{5} + 4 = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) + (-1 + 4) = 5\sqrt{5} + 3$.

b. $4\sqrt{7} + 2\sqrt{6} - \sqrt{7} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{7} = (4\sqrt{7} - \sqrt{7} - 2\sqrt{7}) + (2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}) = \sqrt{7} + 5\sqrt{6}$.

c. $1,3 + 4\sqrt{10} + 2,7 - \sqrt{10} - 4 - 3\sqrt{10} = (1,3 + 2,7 - 4) + (4\sqrt{10} - \sqrt{10} - 3\sqrt{10}) = 0 + 0 = 0$.

d. $(-2,5\sqrt{3} + 3,2\sqrt{6}) + 0,3\sqrt{3} + (0,8\sqrt{6} + 1,2\sqrt{3}) = -2,5\sqrt{3} + 3,2\sqrt{6} + 0,3\sqrt{3} + 0,8\sqrt{6} + 1,2\sqrt{3} = (-2,5\sqrt{3} + 0,3\sqrt{3} + 1,2\sqrt{3}) + (3,2\sqrt{6} + 0,8\sqrt{6}) = -\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$.

2. Berechnet, indem ihr zuerst die Faktoren aus der Wurzel heraushebt:

a. $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32}$;

b. $2\sqrt{27} - 5\sqrt{12} + \sqrt{48} - 3\sqrt{108}$.

Lösung:

a. $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (2 + 5 - 4) \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

b. $2\sqrt{27} - 5\sqrt{12} + \sqrt{48} - 3\sqrt{108} = 2 \cdot 3\sqrt{3} - 5 \cdot 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3 \cdot 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 18\sqrt{3} = (6 - 10 + 4 - 18) \cdot \sqrt{3} = -18\sqrt{3}$.

3. Berechnet:

a. $\frac{1}{2}\sqrt{8} - 0,4\sqrt{162} + 0,5\sqrt{72}$;

b. $\frac{3}{2}\sqrt{20} - 1,5\sqrt{24} - 2,3\sqrt{45} + 0,4\sqrt{150}$;

c. $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 6\sqrt{x} - 3\sqrt{y}$, wobei $x, y \geq 0$;

d. $6\sqrt{a^2} - 4\sqrt{a^3} + 7\sqrt{a^3} - \sqrt{a^2}$, wobei $a > 0$.

Lösung:

a. $\frac{1}{2}\sqrt{8} - 0,4\sqrt{162} + 0,5\sqrt{72} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{9} \cdot 9\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = \sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (1 - 4 + 3) \cdot \sqrt{2} = 0 \cdot \sqrt{2} = 0$.

b. $\frac{3}{2}\sqrt{20} - 1,5\sqrt{24} - 2,3\sqrt{45} + 0,4\sqrt{150} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{5} - \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{6} - \frac{7}{3} \cdot 3\sqrt{5} + \frac{2}{5} \cdot 5\sqrt{6} = 3\sqrt{5} - 3\sqrt{6} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{6} = (3\sqrt{5} - 7\sqrt{5}) + (-3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}) = -4\sqrt{5} + (-\sqrt{6}) = -4\sqrt{5} - \sqrt{6}$.

c. $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 6\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = (2\sqrt{x} + 6\sqrt{x}) + (3\sqrt{y} - 3\sqrt{y}) = 8\sqrt{x} + 0 = 8\sqrt{x}$.

d. Da $a > 0$ ist, ergibt sich $\sqrt{a^2} = |a| = a$ und $\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$. Wir erhalten:
 $6\sqrt{a^2} - 4\sqrt{a^3} + 7\sqrt{a^3} - \sqrt{a^2} = 6a - 4a\sqrt{a} + 7a\sqrt{a} - a = (6a - a) + (-4a\sqrt{a} + 7a\sqrt{a}) = 5a + 3a\sqrt{a}$.

4. Vergleicht die Zahlen a und b , wobei:

a. $a = \sqrt{5} - 1, b = 1$;

b. $a = \sqrt{7} + 1, b = 6 - \sqrt{7}$;

c. $a = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{25}, b = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{26}$.

Lösung:

a. Wir berechnen die Differenz der Zahlen: $a - b = \sqrt{5} - 1 - 1 = \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5} - \sqrt{4} > 0$.
 Da $a - b > 0$ ist, folgt daraus, dass $a > b$ ist.

b. Wir berechnen die Differenz der Zahlen: $a - b = (\sqrt{7} + 1) - (6 - \sqrt{7}) = \sqrt{7} + 1 - 6 + \sqrt{7} = 2\sqrt{7} - 5 = \sqrt{28} - \sqrt{25} > 0$.
 Da $a - b > 0$ ist, folgt daraus, dass $a > b$ ist.

c. Wir berechnen die Differenz der Zahlen:

$$a - b = (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{25}) - (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{26}) = \\ = \sqrt{1} + \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{\sqrt{3}} + \dots + \cancel{\sqrt{25}} - \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{4}} + \dots - \sqrt{26} = \sqrt{1} - \sqrt{26} < 0.$$

Da $a - b < 0$ ist, folgt daraus, dass $a < b$ ist.

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Berechnet:

a. $5\sqrt{2} + 8\sqrt{2}$;

b. $6\sqrt{7} + 4\sqrt{7}$;

c. $9\sqrt{5} - 7\sqrt{5}$;

d. $30\sqrt{6} - 22\sqrt{6}$;

e. $11\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$;

f. $15\sqrt{7} - 3\sqrt{7} + 5\sqrt{7}$;

g. $18\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 9\sqrt{6}$;

h. $\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$.

2. Berechnet:

a. $2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$;

b. $6\sqrt{6} + 4\sqrt{7} + \sqrt{6} + 12\sqrt{7}$;

c. $\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{5}$;

d. $18\sqrt{7} - 4\sqrt{10} - 6\sqrt{7} - 4\sqrt{10}$;

e. $-20\sqrt{2} + \sqrt{11} - \sqrt{11} + 5\sqrt{2}$;

f. $\sqrt{6} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$.

3. Berechnet:

a. $8\sqrt{5} - (3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$;

b. $3\sqrt{6} + 12\sqrt{6} + (10\sqrt{6} - \sqrt{6}) + 8\sqrt{6}$;

c. $3\sqrt{3} - (4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - (6\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) - \sqrt{3}$;

d. $-3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + (8\sqrt{3} - 10\sqrt{6} + 3\sqrt{3}) - \sqrt{6}$;

e. $(\sqrt{5} + 3\sqrt{7}) + (8\sqrt{5} - \sqrt{7} + 3\sqrt{5}) - \sqrt{7}$;

f. $(3\sqrt{15} - \sqrt{13}) - (4\sqrt{15} - 9\sqrt{13} - \sqrt{15}) + \sqrt{13}$.

4. Berechnet in jedem Fall $a + b$ und $a - b$, wobei:

a. $a = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{5} + 4\sqrt{3}$;

b. $a = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{10}$, $b = 8\sqrt{2} - 9\sqrt{10}$;

c. $a = 10\sqrt{7} - 3\sqrt{6}$, $b = 18\sqrt{6} - 9\sqrt{7}$;

d. $a = 8\sqrt{3} + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{11}$, $b = 7\sqrt{5} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{11}$.

5. Zeigt, dass das Ergebnis der Rechnung von $a + b + c$ in jedem Fall eine ganze Zahl ist:

a. $a = 7\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$, $b = 4\sqrt{5} - 7\sqrt{3}$, $c = -2\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$;

b. $a = 5\sqrt{6} - 8\sqrt{14}$, $b = 6 - 5\sqrt{6}$, $c = 1 + 8\sqrt{14}$;

c. $a = 7\sqrt{15} + 4$, $b = 3\sqrt{15} - 2$, $c = 8 - 10\sqrt{15}$.

6. „Die Seitenlängen eines Dreiecks sind $3\sqrt{6}$ cm, $4\sqrt{6}$ cm und $5\sqrt{6}$ cm. Der Umfang des Dreiecks ist ...“ Füllt die Lücke aus, um eine wahre Aussage zu erhalten.

7. „Der Umfang eines Rechtecks mit den Dimensionen $4\sqrt{5}$ dm bzw. $2\sqrt{5}$ dm ist ...“ Füllt die Lücke aus, um eine wahre Aussage zu erhalten.

8. Berechnet, indem ihr zuerst die Faktoren aus der Wurzel heraushebt:

a. $\sqrt{12} + 2\sqrt{3} + \sqrt{27}$;

b. $\sqrt{20} - \sqrt{80} + \sqrt{45} + \sqrt{5}$;

c. $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{27}$;

d. $\sqrt{50} + \sqrt{98} + \sqrt{72} - \sqrt{18}$;

e. $\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{128} - \sqrt{200}$;

f. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{96} + \sqrt{150}$.

9. Übertrag in eure Hefte und füllt dann die gepunkteten Felder aus, um richtige Aussagen zu erhalten.

a. $(\sqrt{300} + \sqrt{1000}) - (\sqrt{490} - \sqrt{360}) = \dots$;

b. $\sqrt{242} - (\sqrt{99} + \sqrt{704} - \sqrt{396}) = \dots$;

c. $(\sqrt{60} + \sqrt{52}) - (\sqrt{135} - \sqrt{117}) = \dots$;

d. $\sqrt{675} - (\sqrt{605} + \sqrt{432}) - \sqrt{720} = \dots$;

e. $(\sqrt{2000} + \sqrt{405}) - (\sqrt{845} + \sqrt{128}) = \dots$;

f. $\sqrt{700} - (\sqrt{726} - \sqrt{1008} + \sqrt{2400}) = \dots$.

10. Berechnet:

a. $4\sqrt{8} + 2\sqrt{18} + 5\sqrt{32}$;

b. $5\sqrt{75} - 2\sqrt{108} + 4\sqrt{48} + 2\sqrt{147}$;

c. $6\sqrt{125} - 2\sqrt{180} - 3\sqrt{80} + 5\sqrt{320}$;

d. $3\sqrt{24} - 4\sqrt{54} + 5\sqrt{150} - 2\sqrt{216}$;

e. $10\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 3\sqrt{112} + 4\sqrt{252}$;

f. $6\sqrt{40} + 3\sqrt{250} - 4\sqrt{90} - 2\sqrt{360}$.

11. Berechnet:

a. $\frac{3}{4}\sqrt{48} + \frac{2}{5}\sqrt{75} - \frac{5}{6}\sqrt{108}$;

b. $\frac{3}{7}\sqrt{98} + \frac{1}{8}\sqrt{128} - \frac{2}{5}\sqrt{200}$;

c. $\frac{7}{6}\sqrt{180} + \frac{11}{2}\sqrt{320} - 0,8\sqrt{500}$;

d. $\frac{6}{5}\sqrt{50} + \frac{1}{4}\sqrt{192} - 0,3\sqrt{72} + 1,3\sqrt{108}$;



e. $0, (2)\sqrt{162} + 1,5\sqrt{800} - \frac{2}{5}\sqrt{450}$;

f. $\frac{12}{7}\sqrt{245} - 2, (4)\sqrt{567} - 1,2\sqrt{500} + 0,25\sqrt{448}$.

12. Berechnet:

a. $2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$, $x \geq 0$;

b. $5\sqrt{4x} - 3\sqrt{9x} + 2\sqrt{25x} - \sqrt{49x}$, $x \geq 0$;

c. $3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} + \sqrt{x} - 3\sqrt{y}$, $x \geq 0, y \geq 0$;

d. $\sqrt{25a} - \sqrt{36b} + \sqrt{64b} - \sqrt{81a}$, $a \geq 0, b \geq 0$;

e. $\sqrt{8a} + \sqrt{18a} + \sqrt{50a} - \sqrt{128a}$, $a \geq 0$;

f. $2\sqrt{12a} + 3\sqrt{27a} - 2\sqrt{48a} + \sqrt{75a}$, $a \geq 0$.

13. Berechnet:

a. $\sqrt{\frac{8}{9}} + \sqrt{\frac{18}{25}} + \sqrt{\frac{32}{81}}$; b. $\sqrt{\frac{24}{25}} + \sqrt{\frac{54}{49}} - \sqrt{\frac{96}{1225}}$; c. $\sqrt{\frac{125}{36}} + \sqrt{\frac{80}{81}} - \sqrt{\frac{245}{324}}$; d. $\sqrt{2\frac{47}{64}} + \sqrt{9\frac{19}{36}} - \sqrt{5\frac{127}{144}}$.

14. Vergleicht die Zahlen a und b , wobei:

a. $a = \sqrt{6} - 2$, $b = 3$;

b. $a = \sqrt{10} + 1$, $b = 2$;

c. $a = \sqrt{2} + 5$, $b = 3 - \sqrt{2}$;

d. $a = 3 + 2\sqrt{7}$, $b = 11 - \sqrt{7}$;

e. $a = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{49}$, $b = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{50}$.

15. Berechnet die Module:

a. $|\sqrt{10} - \sqrt{7}|$;

b. $|\sqrt{14} - \sqrt{15}|$;

c. $|2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}|$;

d. $|4\sqrt{2} - 6|$;

e. $|3\sqrt{3} + 5|$;

f. $|2\sqrt{14} - 3\sqrt{7}|$;

g. $|-2\sqrt{6} - 3\sqrt{5}|$;

h. $|-6\sqrt{2} + 9|$.

16. Berechnet:

a. $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$;

b. $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}$;

c. $\sqrt{(4-3\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}$;

d. $\sqrt{(2\sqrt{10}+6)^2} - \sqrt{(-6-2\sqrt{10})^2}$.

17. Maja und ihr Bruder Viktor kommen zur gleichen Zeit von der Schule nach Hause, allerdings auf unterschiedlichen Wegen. Maja geht zum Kindergarten, um ihren jüngeren Bruder nach Hause zu bringen, und Viktor geht in die Buchhandlung, um ein neues Heft zu kaufen. Die beiden Wege sind in Abbildung 4 eingezeichnet. $ASBC$ ist ein Rechteck, der Scheitelpunkt S ist die Schule der Kinder, der Scheitelpunkt C ist ihr Zuhause, und die Punkte G und L symbolisieren den Kindergarten bzw. die Buchhandlung. Bestimmt, welcher der beiden Wege kürzer ist, da $SA = 300$ m, $SB = 250$ m, $AL = BG = 100$ m ist.

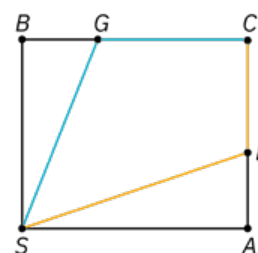


Abbildung 4

Spiel

Fügt Klammern hinzu, sodass die folgenden Gleichungen wahr sind:

1. $12\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0$;

2. $\sqrt{12} - \sqrt{27} - \sqrt{48} = 3\sqrt{3}$;

3. $15 + \sqrt{18} - 5 + 3\sqrt{2} = 10$.

Test

1. Berechnet:

a. $6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$;

b. $11\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$;

c. $8\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$.

(3 Pkte.)

2. Wählt die richtige Antwort aus. Wenn $a = 7\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - \sqrt{5} + 4\sqrt{2}$ und $b = 8\sqrt{2} + 9\sqrt{5} - \sqrt{2} - 4\sqrt{5}$, dann ist $a + b$ gleich:

a. $11\sqrt{5} - 14\sqrt{2}$;

b. $11\sqrt{5} + 14\sqrt{2}$;

c. $-11\sqrt{5} + 14\sqrt{2}$;

d. $-11\sqrt{5} - 14\sqrt{2}$.

(3 Pkte.)

3. Berechnet:

a. $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{72}$;

b. $\sqrt{48} - \sqrt{20} + \sqrt{75} + \sqrt{80}$;

c. $5\sqrt{54} - 3\sqrt{40} + 2\sqrt{250} - 2\sqrt{96}$;

d. $\frac{1}{2}\sqrt{20} + 0,4\sqrt{125} - \frac{3}{10}\sqrt{500} + 0,(6)\sqrt{405}$.

(3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

5. Lektion: Multiplikation und Division der reellen Zahlen

Schlüsselwörter

Multiplikation

Produkt

Kehrwert einer Zahl

Division

Quotient

Multiplikation der reellen Zahlen

Mathe im Alltag

Ein Grundstück hat die Form eines Rechtecks mit den Abmessungen von $\sqrt{5}$ dam bzw. $\sqrt{2}$ dam, wie in Abbildung 1 dargestellt.

- Wie viele ar hat der Flächeninhalt des Grundstücks?
- Wie groß ist der Flächeninhalt eines Grundstücks, das doppelt so lang und dreimal so breit ist (Abbildung 2)?

Antwort:

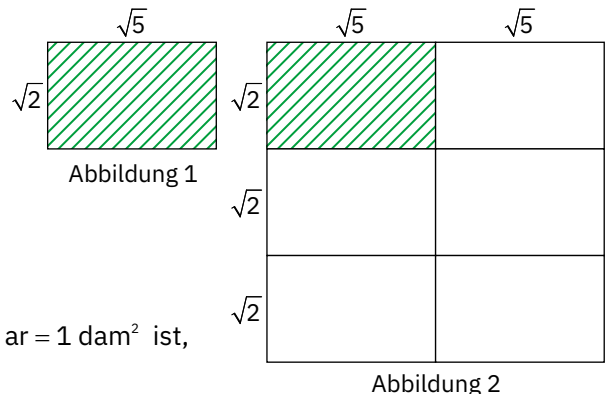
- $Fl_{\text{Grundstück}} = L \cdot l = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10} \text{ dam}^2$. Wir wissen, dass $1 \text{ ar} = 1 \text{ dam}^2$ ist, also $Fl_{\text{Grundstück}} = \sqrt{10} \text{ ar}$.

- Die zweite Fläche hat die Abmessungen $L = 2 \cdot \sqrt{5}$ dam und $l = 3 \cdot \sqrt{2}$ dam.

Beachtet, dass das zweite Grundstück aus sechs ursprünglichen Parzellen zusammengesetzt ist. Seine Fläche ist also sechsmal so groß wie die Fläche des ersten Grundstücks, d. h., sie ist gleich $6 \cdot \sqrt{10} \text{ ar}$. Mithilfe der Formel erhalten wir: $Fl_{\text{Grundstück}} = L \cdot l = 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} \text{ ar}$. Daraus folgt, dass $(2 \cdot \sqrt{5}) \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) = 6 \cdot \sqrt{10}$.

Was stellen wir fest?

Dieses Produkt kann auch wie folgt berechnet werden: $(2 \cdot \sqrt{5}) \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$. Also $(2\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2}) = (2 \cdot 3)\sqrt{5 \cdot 2} = 6\sqrt{10}$.



Merke dir!

Multipliziert man zwei reelle Zahlen a und b , so erhält man eine reelle Zahl, die als $a \cdot b$ bezeichnet wird und das Produkt von a und b ist. Die Zahlen a und b werden als Faktoren bezeichnet.

Eigenschaften der Multiplikation der reellen Zahlen

- Die Multiplikation von reellen Zahlen ist assoziativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$ für jedes $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Die Multiplikation von reellen Zahlen ist kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$ für jedes $a, b \in \mathbb{R}$.
- Die reelle Zahl 1 ist neutrales Element: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.
- Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ gibt es eine reelle Zahl, die mit a^{-1} bezeichnet und Kehrwert von a genannt wird, mit der Eigenschaft $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Der Kehrwert einer reellen Zahl $a \neq 0$ wird ebenfalls mit $\frac{1}{a}$ bezeichnet. Also $a^{-1} = \frac{1}{a}$ und $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

- Die Multiplikation von reellen Zahlen ist distributiv in Bezug auf Addition und Subtraktion:

$$\text{a. } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ für jedes } a, b, c \in \mathbb{R}; \quad \text{b. } a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \text{ für jedes } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen

- Die Multiplikation reeller Zahlen hat die gleichen Eigenschaften wie die Multiplikation rationaler Zahlen.
- Wenn ein Faktor eines Produkts 0 ist, dann ist das Produkt gleich 0:
 $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ für jede reelle Zahl a .
- Wenn ein Produkt 0 ist, dann ist mindestens einer der Faktoren 0:
Wenn $a \cdot b = 0$, dann $a = 0$ oder $b = 0$.
- Das Produkt der reellen Zahlen $a\sqrt{b}$ und $c\sqrt{d}$, wobei $b \geq 0, d \geq 0$ ist, wird nach der Regel berechnet:
 $a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = (a \cdot c) \cdot \sqrt{b \cdot d} = ac\sqrt{bd}$.

Nach der Multiplikation zweier reeller Zahlen, die Wurzeln enthalten, hebt man, wenn möglich, die Faktoren aus der Wurzel heraus.





Beispiele

- $4\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{11} = 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{5 \cdot 11} = 24\sqrt{55};$
- $5\sqrt{2} \cdot (-4\sqrt{2}) = [5 \cdot (-4)] \cdot \sqrt{2 \cdot 2} = -20 \cdot 2 = -40;$
- $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{12} = (2 \cdot 5) \cdot \sqrt{3 \cdot 12} = 10\sqrt{36} = 10 \cdot 6 = 60;$
- $5\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{4} = (5 \cdot 3) \cdot \sqrt{6 \cdot 4} = 15\sqrt{24} = 15 \cdot 2\sqrt{6} = 30\sqrt{6};$
- $(-6\sqrt{5}) \cdot \sqrt{15} = (-6 \cdot 1) \cdot \sqrt{5 \cdot 15} = -6\sqrt{75} = -6 \cdot 5\sqrt{3} = -30\sqrt{3}.$



Bemerkungen

Durch Analyse der Rechnung:

$$\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + 1) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6} - 1 = 3 + \cancel{\sqrt{6}} - \cancel{\sqrt{6}} - 1 = 2$$

stellt man fest, dass für die erste Klammer die Distributivität der Multiplikation in Bezug auf die Addition verwendet wurde. In der zweiten Klammer ist man wie folgt vorgegangen: $-(\sqrt{6} + 1) = (-1) \cdot (\sqrt{6} + 1) = (-1) \cdot \sqrt{6} + (-1) \cdot 1 = -\sqrt{6} - 1.$

Dieses Beispiel führt uns zu folgender Regel:

das „-“-Zeichen vor einer Klammer ändert das Vorzeichen der Glieder in der Klammer.

Division der reellen Zahlen



Problemstellung

Wir wissen, dass wenn $a \cdot b = c$, dann $a = c : b$ und $b = c : a$, wobei a, b, c von null verschiedene rationale Zahlen sind. Wir fragen uns, ob diese Beziehungen auch für reelle Zahlen gelten.

Ausgehend von der Gleichheit $(2\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{2}) = 6\sqrt{10}$ können wir ableiten, dass $(6\sqrt{10}) : (2\sqrt{5}) = 3\sqrt{2}.$

Wenn man die Division nach den Rechenregeln für Quadratwurzeln durchführt, erhält man:

$$(6\sqrt{10}) : (2\sqrt{5}) = \sqrt{36 \cdot 10} : \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{360} : \sqrt{20} = \sqrt{360 : 20} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Was stellen wir fest?

Die Division $(6\sqrt{10}) : (2\sqrt{5})$ kann wie folgt durchgeführt werden: $(6\sqrt{10}) : (2\sqrt{5}) = (6 : 2) \cdot \sqrt{10 : 5} = 3\sqrt{2}.$



Merke dir!

Der Quotient zweier reeller Zahlen a und b , $b \neq 0$, ist die reelle Zahl c mit der Eigenschaft $a = b \cdot c$.

Der Quotient der Zahlen a und b wird mit $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ bezeichnet. Die Operation, durch die den Zahlen a und b

ihr Quotient $a : b$ zugeordnet wird, wird *Division* genannt. Die Zahl a wird als *Dividend* und die Zahl b als *Divisor* (*Teiler*) bezeichnet.

Der Quotient zweier reeller Zahlen wird *durch Multiplikation* des Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors bestimmt:

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \text{ für beliebige reelle Zahlen } a \text{ und } b, b \neq 0.$$

Der Quotient der Zahlen $a\sqrt{b}$ und $c\sqrt{d}$, wobei $b, d > 0$, $c \neq 0$ ist, wird wie folgt gebildet:

$$(a\sqrt{b}) : (c\sqrt{d}) = (a : c) \cdot \sqrt{b : d} \text{ oder } \frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{d}} = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b}{d}}.$$



Beispiele

- $\sqrt{14} : \sqrt{2} = \sqrt{14 : 2} = \sqrt{7};$
- $(6\sqrt{12}) : (2\sqrt{3}) = (6 : 2) \sqrt{12 : 3} = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6;$
- $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{15};$
- $\left(0,3 \cdot \sqrt{\frac{12}{5}}\right) : \left(0,(3) \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \left(\frac{3}{10} \cdot \sqrt{\frac{12}{5}}\right) : \left(\frac{3}{10} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \left(\frac{3}{10} : \frac{3}{10}\right) \sqrt{\frac{12}{5} : \frac{2}{5}} = \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{3}\right) \sqrt{\frac{12}{5} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{9}{10} \sqrt{6}.$

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. Berechne:

- $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{14} + \sqrt{10});$
- $\frac{25\sqrt{14}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{35};$
- $(18\sqrt{45}) : (-3\sqrt{3}) : (-\sqrt{12});$
- $(24\sqrt{15} + 30\sqrt{35} - 18\sqrt{55}) : (6\sqrt{5}).$

Lösung:

a. Wir wenden die Distributivität der Multiplikation in Bezug auf die Addition an:

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{14} + \sqrt{10}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{14} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{28} + \sqrt{20} = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5}.$$

b. $\frac{25\sqrt{14}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{35} = \frac{5\sqrt{14}}{1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{5\sqrt{14 \cdot 7}}{7} = \frac{5 \cdot 7\sqrt{2}}{7} = 5\sqrt{2}.$

c. $(18\sqrt{45}) : (-3\sqrt{3}) : (-\sqrt{12}) = [18 : (-3) \cdot \sqrt{45 : 3}] : (-2\sqrt{3}) = (-6\sqrt{15}) : (-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{5}.$

d. $(24\sqrt{15} + 30\sqrt{35} - 18\sqrt{55}) : (6\sqrt{5}) = (24\sqrt{15}) : (6\sqrt{5}) + (30\sqrt{35}) : (6\sqrt{5}) - (18\sqrt{55}) : (6\sqrt{5}) = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{11}.$

2. Berechne $a \cdot b$ und $a : b$, wobei: $a = 6\sqrt{54} + 5\sqrt{96}$, $b = 12\sqrt{12} - 2\sqrt{363}$.

Lösung:

$$a = 6\sqrt{54} + 5\sqrt{96} = 6 \cdot 3\sqrt{6} + 5 \cdot 4\sqrt{6} = 18\sqrt{6} + 20\sqrt{6} = 38\sqrt{6}; \quad b = 12\sqrt{12} - 2\sqrt{363} = 12 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 11\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$a \cdot b = 38\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 76\sqrt{18} = 76 \cdot 3\sqrt{2} = 228\sqrt{2} \text{ und } a : b = (38\sqrt{6}) : (2\sqrt{3}) = (38 : 2) \sqrt{6 : 3} = 19\sqrt{2}.$$

3. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus und berechne dann das Verhältnis $\frac{x \cdot y}{z}$, wobei:

$$x = 5\sqrt{75} + 4\sqrt{12} - 2\sqrt{48}, \quad y = 2\sqrt{135} - 4\sqrt{60} - 3\sqrt{240}, \quad z = 2\sqrt{180} - 5\sqrt{80} + 3\sqrt{20} + \sqrt{720}.$$

Lösung:

$$x = 5\sqrt{75} + 4\sqrt{12} - 2\sqrt{48} = 5 \cdot 5\sqrt{3} + 4 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 4\sqrt{3} = 25\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 25\sqrt{3}.$$

$$y = 2\sqrt{135} - 4\sqrt{60} - 3\sqrt{240} = 2 \cdot 3\sqrt{15} - 4 \cdot 2\sqrt{15} - 3 \cdot 4\sqrt{15} = 6\sqrt{15} - 8\sqrt{15} - 12\sqrt{15} = -14\sqrt{15}.$$

$$z = 2\sqrt{180} - 5\sqrt{80} + 3\sqrt{20} + \sqrt{720} = 2 \cdot 6\sqrt{5} - 5 \cdot 4\sqrt{5} + 3 \cdot 2\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = 12\sqrt{5} - 20\sqrt{5} + 6\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = 10\sqrt{5}.$$

$$\frac{x \cdot y}{z} = \frac{25\sqrt{3} \cdot (-14\sqrt{15})}{10\sqrt{5}} = \frac{25 \cdot (-14)}{10} \sqrt{\frac{3 \cdot 15}{5}} = \frac{5 \cdot (-14)}{2} \sqrt{3 \cdot 3} = 5 \cdot (-7) \cdot 3 = -105.$$

Portfolio

A. Gib jeweils ein Beispiel für zwei irrationale Zahlen a und b an, für die die angegebene Bedingung wahr ist:

a. $a + b \in \mathbb{Q};$

b. $a \cdot b \in \mathbb{Q};$

c. $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$

d. $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

B. Beweise, dass, wenn $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, und wenn außerdem $a \neq 0$, dann $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

C. Vergleiche die Ergebnisse von den Punkten A und B mit denen, die aus den Lektionen 4 und 5 bekannt sind, in den Abschnitten über die Summe und das Produkt zweier rationaler Zahlen, und füge die Schlussfolgerungen zu deinem persönlichen Portfolio hinzu.

Sammle alle Materialien, die du hergestellt hast, in einem Ordner, der dein Mathe-Portfolio sein wird.

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Berechne:

a. $2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5};$

b. $5\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{7};$

c. $-3\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{5};$

d. $-11\sqrt{7} \cdot 5\sqrt{13};$

e. $(-12\sqrt{3}) \cdot (-5\sqrt{10});$

f. $6\sqrt{14} \cdot (-5\sqrt{3});$

g. $(-\sqrt{15}) \cdot (-9\sqrt{7});$

h. $10\sqrt{11} \cdot (-8\sqrt{2}).$

2. Führe die folgenden Multiplikationen durch:

a. $4\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{3};$

b. $(-2\sqrt{15}) \cdot 5\sqrt{5};$

c. $10\sqrt{18} \cdot (-2\sqrt{10});$

d. $\sqrt{20} \cdot (-6\sqrt{12});$

e. $(-5\sqrt{32}) \cdot (-3\sqrt{18});$

f. $(-\sqrt{72}) \cdot (-2\sqrt{96});$

g. $(-8\sqrt{24}) \cdot \sqrt{125};$

h. $5\sqrt{28} \cdot (-\sqrt{112}).$

3. Führe die folgenden Divisionen durch:

a. $\sqrt{12} : \sqrt{2};$

b. $\sqrt{45} : \sqrt{3};$

c. $-\sqrt{18} : \sqrt{6};$

d. $\sqrt{28} : (-\sqrt{14});$

e. $(12\sqrt{6}) : (-3\sqrt{2});$

f. $(-15\sqrt{45}) : (-5\sqrt{3});$

g. $(-9\sqrt{84}) : (3\sqrt{14});$

h. $(8\sqrt{54}) : \sqrt{48}.$

4. Berechne:

a. $\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{2};$

b. $\left(-\frac{7}{12}\right)\sqrt{10} \cdot \frac{5}{14}\sqrt{6};$

c. $1,5\sqrt{28} \cdot 0,6\sqrt{35};$

d. $\frac{4}{9}\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}};$



e. $-\sqrt{45} : \frac{3}{\sqrt{125}};$

f. $\left(-\frac{6}{25}\sqrt{20}\right) : (2,5\sqrt{45});$

g. $\frac{11\sqrt{6}}{24} : (-\sqrt{363});$

h. $\sqrt{252} : \frac{12}{10\sqrt{14}}.$

5. Berechne in jedem Fall $a \cdot b$ und $a : b$, wobei:

a. $a = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}, b = \sqrt{3} + \sqrt{12};$

b. $a = \sqrt{56} + \sqrt{126}, b = 4\sqrt{28} - \sqrt{63};$

c. $a = \sqrt{640} - \sqrt{40}, b = 3\sqrt{45} - \sqrt{180};$

d. $a = 3\sqrt{60} + 7\sqrt{15} - \sqrt{135}, b = \sqrt{108} - \sqrt{48}.$

6. „Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Breite $4\sqrt{2}$ cm und der Länge das Dreifache der Breite ist ...“. Füllt die Lücke aus, um eine wahre Aussage zu erhalten.

7. Zeigt durch Berechnen, dass $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, wobei:

a. $a = \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{18}, b = \sqrt{216} + \sqrt{24} - \sqrt{96}, c = \sqrt{90} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{10} - \sqrt{54};$

b. $a = \sqrt{56} + \sqrt{126} + 4\sqrt{350}, b = 8\sqrt{160} - 2\sqrt{10} + \sqrt{90}, c = \sqrt{810} - \sqrt{360} - 2\sqrt{90}.$

8. Berechne:

a. $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{15} - \sqrt{6});$

b. $3\sqrt{5} \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{5} - 2);$

c. $-\sqrt{24} \cdot (-8\sqrt{3} + \sqrt{150} - 3\sqrt{200});$

d. $(\sqrt{75} - \sqrt{60} + 4\sqrt{54}) : \sqrt{3};$

e. $(\sqrt{48} - 2\sqrt{135}) : \sqrt{12};$

f. $2\sqrt{1782} : (\sqrt{792} - \sqrt{550}).$

9. Berechne das Verhältnis $\frac{x \cdot y}{z}$, wobei:

a. $x = 3\sqrt{56} - \sqrt{350} + 2\sqrt{126} - \sqrt{224}, y = 5\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + 4\sqrt{18} + 3\sqrt{128}, z = 3\sqrt{63} + 2\sqrt{28} - \sqrt{700} + \sqrt{175};$

b. $x = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{40} - \sqrt{250} + \sqrt{90}, y = 3\sqrt{245} - \sqrt{80} - \sqrt{500} + 3\sqrt{45}, z = \sqrt{200} + \sqrt{162} - \sqrt{242} + \sqrt{98}.$

10. Führe die Rechnungen durch:

a. $\sqrt{5} \cdot (2 - \sqrt{3} + 3\sqrt{6}) + \sqrt{15};$

b. $(4\sqrt{5} + 5\sqrt{8} - \sqrt{75}) \cdot (3\sqrt{10});$

c. $(24\sqrt{24} - \sqrt{192} + 2\sqrt{80}) : 8 - (\sqrt{5} - \sqrt{3});$

d. $(3\sqrt{120} + \sqrt{960} - \sqrt{420}) : (2\sqrt{15}).$

11. Schreibe den Kehrwert jeder Zahl:

a. 4;

b. -6;

c. $\frac{3}{5};$

d. -0,3;

e. $\sqrt{7};$

f. $-2\sqrt{3};$

g. $-\frac{\sqrt{5}}{2}.$

12. Bestimme x aus den folgenden Gleichungen:

a. $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}};$

b. $\frac{\sqrt{15}}{x} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{6}};$

c. $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{5}} = \frac{3x}{\sqrt{60}};$

d. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{189}}{\sqrt{2x}}.$

13. Bestimme x so, dass die folgenden Gleichungen wahr sind:

a. $x \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12};$

b. $(3\sqrt{5}) \cdot x = \sqrt{135};$

c. $x : (-\sqrt{24}) = \sqrt{54};$

d. $\sqrt{4,41} : x = 0,7.$

Spiel

Das magische Quadrat

Vervollständige das nebenstehende Quadrat, wobei man weiß, dass das Produkt der Elemente in den Zeilen, Spalten und Diagonalen gleich ist.

$8\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2		

Selbstbewertung

1. Berechne:

a. $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7};$

b. $\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{5};$

c. $(12\sqrt{15}) : (4\sqrt{5}).$

(3 Pkte.)

2. Wähle die richtige Antwort aus. Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Länge $6\sqrt{5}$ cm und der Breite, die halb so groß ist, beträgt:

a. $30 \text{ cm}^2;$

b. $60 \text{ cm}^2;$

c. $90 \text{ cm}^2;$

d. $120 \text{ cm}^2.$ (3 Pkte.)

3. Führe die Rechnungen durch:

a. $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{15});$

b. $2\sqrt{6} \cdot (3\sqrt{2} + \sqrt{30} - 4);$

c. $(25\sqrt{20} + \sqrt{600} - 3\sqrt{250}) : (5\sqrt{2}).$

(3 Pkte.)

Bemerkung: Für jeden richtig beantworteten Unterpunkt wird 1 Punkt vergeben. 1 Punkt von Amts wegen. Arbeitszeit: 20 Minuten.

Wiederholung und Bewertung

Die Menge der reellen Zahlen • Die Gegenzahl einer reellen Zahl • Der Absolutbetrag einer reellen Zahl • Vergleichen und Ordnen der reellen Zahlen • Rechenregeln für Quadratwurzeln • Operationen mit reellen Zahlen

Schreibt für die Aufgaben 1–8 den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, in eure Hefte. Für die Aufgaben 9–14 schreibt die vollständigen Lösungen auf.

- Die Quadratwurzel aus 25 ist:
a. 25; b. 5; c. $-\sqrt{5}$; d. $\sqrt{5}$.
- Die Gegenzahl der reellen Zahl $\sqrt{7}$ ist:
a. $-\sqrt{7}$; b. $\sqrt{7}$; c. 7; d. -7.
- Von folgenden Zahlen ist irrational:
a. -0,(7); b. -4; c. $\sqrt{8}$; d. $\frac{4}{9}$.
- Die Zahl kleiner als $\sqrt{6}$ ist:
a. 6; b. $\sqrt{3}$; c. $\sqrt{8}$; d. 3.
- Das Ergebnis der Rechnung $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$ ist:
a. $\sqrt{13}$; b. $\sqrt{42}$; c. $6\sqrt{7}$; d. $7\sqrt{6}$.
- Das Ergebnis der Rechnung $\sqrt{45} : \sqrt{5}$ ist:
a. $\sqrt{40}$; b. $\sqrt{3}$; c. 9; d. 3.
- $\sqrt{54}$ ist gleich:
a. $6\sqrt{3}$; b. $2\sqrt{6}$; c. $3\sqrt{6}$; d. $18\sqrt{3}$.
- Die Zahl $\sqrt{10}$ befindet sich zwischen:
a. 1 und 2; b. 2 und 3;
c. 3 und 4; d. 4 und 5.
- Gebt an, welche der folgenden Aussagen wahr (W) und welche falsch (F) ist.
a. $-2\sqrt{3} = \sqrt{12}$;
b. Der Absolutbetrag von 0 ist 0;
c. $\sqrt{0,81} = 0,9$.

- Bestimmt die größte natürliche Zahl, die kleiner als $\sqrt{60}$ ist.
- Ordnet jedem Ausdruck in der Spalte **A** die richtige Antwort in der Spalte **B** zu:

A	B
$\sqrt{3^2 + 4^2}$	a. 7
$\sqrt{3^2 \cdot 4^2}$	b. 12
$\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$	c. 14
	d. 5

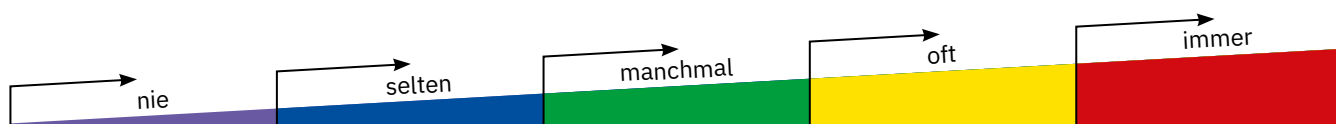
- Bestimmt die Zahlen a und b in der folgenden Tabelle:

Dividend	Teiler	Quotient
$-6\sqrt{48}$	$-2\sqrt{3}$	a
$32\sqrt{5}$	b	$\sqrt{20}$

- Berechnet: $\sqrt{14+7\sqrt{25}} - \sqrt{26^2 - 24^2} + 5\sqrt{0,04}$.
- Berechnet: $\sqrt{5} \cdot (2 - \sqrt{6}) + \sqrt{15} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

Beobachtungsbogen für das Schülerverhalten

- Ich war daran interessiert, Neues über Lösungsmethoden von Aufgaben zu lernen.
- Meine Teilnahme am Mathematikunterricht wurde von meinen Mitschülern und der Lehrkraft geschätzt.



6. Lektion: Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten. Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen

Schlüsselwörter

Potenz mit natürlichem Exponenten Basis Rechenregeln mit Potenzen Potenz mit ganzzahligem Exponenten Exponent

Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten

Mathe im Alltag

Ein Grundstück hat die Form eines Quadrats mit einer Seitenlänge von $2\sqrt{5}$ dam (wie in Abbildung 1).

a. Wie viele dam^2 umfasst die Grundstücksfläche?

b. Wie viele dam^2 beträgt der Flächeninhalt eines Grundstücks mit der dreifachen Seitenlänge?

Antwort:

a. Der Flächeninhalt des Grundstücks beträgt:

$$(2\sqrt{5})^2 = 2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ (dam}^2\text{)}.$$

b. Das zweite Grundstück hat die Seitenlänge: $l = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ dam.

Durch Berechnen des Flächeninhalts erhält man:

$$Fl_{\text{Grundstück}} = l^2 = (6\sqrt{5})^2 = 6\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5} = 36 \cdot 5 = 180 \text{ (dam}^2\text{)}.$$

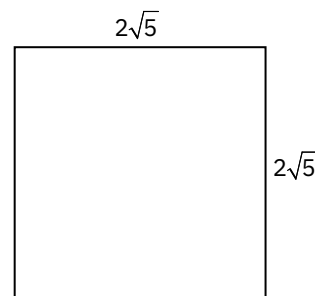


Abbildung 1

Was stellen wir fest?

Durch Berechnen des Flächeninhalts erhält man $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2$ und $(6\sqrt{5})^2 = 6^2 \cdot (\sqrt{5})^2$.

Merke dir!

Sei a eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl, $n \geq 2$. Das Produkt von n Faktoren gleich a heißt die n -te Potenz der reellen Zahl a und wird mit a^n bezeichnet: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$.

Laut Vereinbarung ist $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ für jede von null verschiedene reelle Zahl a . 0^0 ist nicht definiert (es hat keinen Sinn).

Wenn $a \neq 0$ eine reelle Zahl und n eine natürliche Zahl ist, dann ist laut Definition $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

In der Schreibweise a^p , wobei $p \in \mathbb{Z}$ ist, wird a als Basis und p als Exponent der Potenz bezeichnet.

Beispiele

$$1. (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{2};$$

$$3. \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1;$$

$$5. (\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

$$2. (-4\sqrt{2})^2 = (-4\sqrt{2}) \cdot (-4\sqrt{2}) = 16\sqrt{4} = 16 \cdot 2 = 32;$$

$$4. \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 = \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{3}{7};$$

$$6. (-\sqrt{3})^{-3} = \frac{1}{(-\sqrt{3})^3} = \frac{1}{(-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3})} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Bemerkung

Wir heben eine reelle Zahl der Form $a\sqrt{b}$ ($a \neq 0$, $b > 0$) zu einer Potenz, die natürliche Zahl ist, indem wir sowohl den Faktor vor der Wurzel als auch die Zahl unterhalb der Wurzel zur Potenz heben und dann die Ergebnisse multiplizieren.

Beispiele

$$1. (2\sqrt{5})^3 = 2^3 \sqrt{5^3} = 8 \cdot 5\sqrt{5} = 40\sqrt{5};$$

$$2. \left(-\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \sqrt{6^4} = \frac{16}{81} \cdot 36 = \frac{64}{9}.$$

Rechenregeln mit Potenzen

Die Rechenregeln für Potenzen, deren Basis eine rationale Zahl und deren Exponent eine natürliche Zahl ist, lassen sich auf Potenzen übertragen, deren Basis eine reelle Zahl ist, und führen zu ähnlichen Regeln. Im Folgenden betrachten wir x und y als reelle Zahlen ungleich null und m und n als ganze Zahlen.

Merke dir!**1. Die Multiplikation der Potenzen mit derselben Basis**

Um zwei Potenzen mit derselben Basis zu multiplizieren, behält man die Basis bei und addiert die Exponenten:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

Beispiele: a. $(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^{3+5} = (\sqrt{2})^8;$

b. $(\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt{3})^{-7} = (\sqrt{3})^{4+(-7)} = (\sqrt{3})^{-3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$

2. Die Division der Potenzen mit derselben Basis

Um zwei Potenzen mit derselben Basis zu dividieren, behält man die Basis bei und subtrahiert die Exponenten:

$$x^m : x^n = x^{m-n}.$$

Beispiele: a. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{14} : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{14-9} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5;$

b. $(\sqrt{7})^8 : (\sqrt{7})^7 = (\sqrt{7})^{8-7} = (\sqrt{7})^1 = \sqrt{7}.$

3. Die Potenz einer Potenz

Um die Potenz einer Potenz zu berechnen, behält man die Basis bei und multipliziert die Exponenten:

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}.$$

Beispiele: a. $\left[(\sqrt{3})^5\right]^3 = (\sqrt{3})^{5 \cdot 3} = (\sqrt{3})^{15};$

b. $\left[\left(\frac{7}{5}\right)^{-99}\right]^0 = \left(\frac{7}{5}\right)^{(-99) \cdot 0} = \left(\frac{7}{5}\right)^0 = 1.$

4. Die Potenz eines Produkts. Das Produkt zweier Potenzen mit demselben Exponenten

Um ein Produkt zu einer Potenz zu erheben, wird der Exponent auf jeden Faktor des Produkts verteilt:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

Um zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu multiplizieren, multipliziert man die Basen und behält den Exponenten bei: $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n.$

Beispiele: a. $(2 \cdot \sqrt{3})^4 = 2^4 \cdot (\sqrt{3})^4 = 16 \cdot 9 = 144;$

b. $(\sqrt{5})^7 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^7 = \left(\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^7 = 1^7 = 1.$

5. Die Potenz eines Quotienten. Der Quotient zweier Potenzen mit demselben Exponenten

Um einen Quotienten zu einer Potenz zu erheben, wird der Exponent auf jeden Faktor des Quotienten verteilt:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

Um zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu teilen, teilt man die Basen und behält den Exponenten bei:

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n.$$

Beispiele: a. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{(\sqrt{2})^3}{2^3} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4};$

b. $\frac{(\sqrt{3})^5}{(\sqrt{12})^5} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$

Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen**Problemstellung**

In Abbildung 2 ist $ABCD$ ein Rechteck und $DEFG$ ist ein Quadrat. Wie groß ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche?

Antwort:

Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist die Differenz der Flächeninhalte des Rechtecks $ABCD$ und des Quadrats $DEFG$:

$$Fl_{\text{schraffiert}} = Fl_{ABCD} - Fl_{DEFG}.$$

$$Fl_{ABCD} = L \cdot l = 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 6 \cdot 5 = 30.$$

$$Fl_{DEFG} = l^2 = (\sqrt{5})^2 = 5. \text{ Daraus folgt, dass } Fl_{\text{schraffiert}} = 30 - 5 = 25.$$

Die Berechnung des Flächeninhaltes lässt sich schnell und einfach

durchführen: $Fl_{\text{schraffiert}} = 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} - (\sqrt{5})^2 = 30 - 5 = 25.$

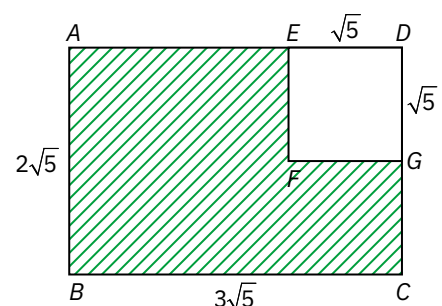


Abbildung 2



Was stellen wir fest?

Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen ist dieselbe wie bei den rationalen Zahlen.



Merke dir!

In einer Rechnung (Kettenrechnung), die Rechenoperationen mit reellen Zahlen enthält, werden sie wie folgt durchgeführt:

- zuerst die Potenzrechnungen (Operationen 3. Ordnung);
- dann Multiplikationen und Divisionen in der Reihenfolge, in der sie geschrieben stehen (Operationen 2. Ordnung);
- dann die Additionen und Subtraktionen in der Reihenfolge, in der sie geschrieben stehen (Operationen erster Ordnung).

Wenn in der Übung Klammern vorkommen, führt man zuerst die Rechnungen in den kleinen (runden) Klammern durch, dann die Rechnungen in den großen (eckigen) Klammern, gefolgt von den Rechnungen in den geschweiften (geschwungenen) Klammern.



Beispiele

- $\sqrt{24} + \sqrt{12} : \sqrt{2} = 2\sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6};$
- $(\sqrt{3} \cdot \sqrt{20})^0 - (\sqrt{5})^5 \cdot (\sqrt{5})^3 : (\sqrt{5})^7 + \sqrt{5} = 1 - (\sqrt{5})^{5+3-7} + \sqrt{5} = 1 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 1;$
- $\sqrt{2}(\sqrt{3} - 4) - \sqrt{3}(2\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot 4 - \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} - 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - \sqrt{6} = -10\sqrt{2}.$

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



- Schreibt als Potenz mit ganzzahligem Exponenten:

a. $(-2)^4 \cdot 8^3 \cdot (-32)^6;$ b. $(\sqrt{2})^2 \cdot (-\sqrt{8})^5 \cdot (\sqrt{128})^7;$ c. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^{-5} \cdot (\sqrt{3})^{-9}.$

Lösung:

a. $(-2)^4 \cdot 8^3 \cdot (-32)^6 = 2^4 \cdot (2^3)^3 \cdot (2^5)^6 = 2^4 \cdot 2^9 \cdot 2^{30} = 2^{4+9+30} = 2^{43}.$

b. $(\sqrt{2})^2 \cdot (-\sqrt{8})^5 \cdot (\sqrt{128})^7 = (\sqrt{2})^2 \cdot [(-\sqrt{2})^3]^5 \cdot [(\sqrt{2})^7]^7 = (\sqrt{2})^2 \cdot (-\sqrt{2})^{15} \cdot (\sqrt{2})^{49} = -(\sqrt{2})^{66} = -2^{33}.$

c. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^{-5} \cdot (\sqrt{3})^{-9} = \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^9} = \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^9 = \left(\frac{1}{5}\right)^9.$

- Berechnet:

a. $\sqrt{450} + 0,2 \cdot \frac{1}{10^{-1}} - 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10};$ b. $(4\sqrt{30} - \sqrt{180}) : (-\sqrt{5}) + \frac{1}{[1, (6) - 0, (6)]^5} - \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-2}.$

Lösung:

a. $\sqrt{450} + 0,2 \cdot \frac{1}{10^{-1}} - 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = 15\sqrt{2} + 0,2 \cdot 10 - 15\sqrt{2} = 2.$

b. $(4\sqrt{30} - \sqrt{180}) : (-\sqrt{5}) + \frac{1}{[1, (6) - 0, (6)]^5} - \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-2} = (4\sqrt{30}) : (-\sqrt{5}) - \sqrt{180} : (-\sqrt{5}) + \frac{1}{\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right)^5} - \left(\frac{\sqrt{7}}{1}\right)^2 =$
 $= -4\sqrt{6} + 6 + 1 - 7 = -4\sqrt{6}.$

- Fügt Klammern ein, damit die folgenden Gleichungen richtig werden:

a. $-3\sqrt{2} - 3\sqrt{50} : \sqrt{162} + 6 = 4;$ b. $\sqrt{7} + \sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6} : 18 + 3\sqrt{42} = 1.$

Lösung:

a. $(-3\sqrt{2} - 3\sqrt{50}) : \sqrt{162} + 6 = (-3\sqrt{2} - 15\sqrt{2}) : (9\sqrt{2}) + 6 = (-18\sqrt{2}) : (9\sqrt{2}) + 6 = -2 + 6 = 4.$

b. $(\sqrt{7} + \sqrt{6}) \cdot 3\sqrt{6} : (18 + 3\sqrt{42}) = (\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{6} + \sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}) : (18 + 3\sqrt{42}) = (3\sqrt{42} + 18) : (18 + 3\sqrt{42}) = 1.$

Vorgeschlagene Aufgaben



- Führt durch:

a. $4^3;$ b. $(-11)^2;$ c. $0,1^3;$ d. $(\sqrt{3})^4;$ e. $(-2\sqrt{7})^2;$ f. $4^{-1};$ g. $\sqrt{5}^{-2};$ h. $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-3}.$

2. Schreibt als Potenz mit natürlichem Exponenten:

- a. $(1,3)^4 \cdot (1,3)^7$; b. $(\sqrt{7})^6 \cdot (\sqrt{7})^9$; c. $(-2\sqrt{3})^4 \cdot (-2\sqrt{3})^7$; d. $(-\sqrt{7})^9 : (-\sqrt{7})^5$;
 e. $(4\sqrt{5})^{23} : (4\sqrt{5})^{18}$; f. $[(3\sqrt{7})^2]^3$; g. $[(-0,5\sqrt{6})^5]^2$; h. $\left\{[(\sqrt{7})^4]^5\right\}^0$.

3. Führt durch:

- a. $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-9}$; b. $\left(-\frac{8}{3}\right)^{14} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^{-25} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^9$; c. $(\sqrt{6})^{12} \cdot (\sqrt{6})^{20} : (\sqrt{6})^{34}$;
 d. $(6\sqrt{2})^{-3} : (6\sqrt{2})^{-5} : (6\sqrt{2})$; e. $[(3\sqrt{5})^2]^5 : [(3\sqrt{5})^4]^3$; f. $(\sqrt{11})^{25} : [(\sqrt{11})^{-12}]^{-2}$.

4. Schreibt als Potenz mit natürlichem Exponenten:

- a. $5^{10} \cdot 3^{10}$; b. $(-1,5)^9 \cdot (-4)^9$; c. $(\sqrt{3})^{15} \cdot (\sqrt{10})^{15}$; d. $(-\sqrt{6})^{20} \cdot (2\sqrt{3})^{20} \cdot (-\sqrt{2})^{20}$;
 e. $(4,5)^8 : (1,5)^8$; f. $(\sqrt{20})^{72} : (\sqrt{5})^{72}$; g. $\left(\frac{2}{7}\right)^{16} : \left(\frac{1}{14}\right)^{16}$; h. $(\sqrt{180})^{54} : (2\sqrt{5})^{54} \cdot (-3)^{54}$.

5. Schreibt die folgenden Zahlen als Potenz mit dem Exponenten 2:

- a. $\frac{4}{25}$; b. 5^8 ; c. 0,01; d. 6^{-2} ; e. 5; f. $\frac{1}{2}$; g. $\frac{7}{4}$.

6. Führt durch:

- a. $(-4)^2 + 2 \cdot (-3)$; b. $-36 : (-3)^2 - 8 : 2$; c. $5^2 : (-5)^2 + (-2) \cdot (-4)$; d. $64 : (-2)^5 \cdot (-2)$;
 e. $\frac{1}{2} : 0,5^2 + 1, (3) \cdot (-6)$; f. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-6\sqrt{2}) + \sqrt{6}$; g. $3\sqrt{3} : (\sqrt{3})^3 + (-\sqrt{15})^0$; h. $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2} : \frac{1}{\sqrt{27}^{-1}}$.

7. Führt durch:

- a. $\sqrt{5}(6 + \sqrt{30}) - \sqrt{2}(\sqrt{75} + \sqrt{10})$; b. $(\sqrt{90} + \sqrt{30}) : \sqrt{6} - \sqrt{2}(3\sqrt{10} - \sqrt{120}) - \sqrt{375}$;
 c. $(5\sqrt{108} - 2\sqrt{1200}) : \left(\frac{1}{\sqrt{5}} : \sqrt{2}\right)^{-2}$; d. $\left(\sqrt{3^2 + 4^2} : \frac{1}{\sqrt{5}} - 2^{-2} \cdot \sqrt{80}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}$.

8. Berechnet:

- a. $\sqrt{294} \cdot [\sqrt{384} - 4\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + 6\sqrt{3}) : 2]$;
 b. $\left\{[3\sqrt{375} - \sqrt{3^3} \cdot (\sqrt{180} - \sqrt{80})] : 3\right\} \cdot 3\sqrt{15}$;
 c. $2\sqrt{20} \cdot \left\{3\sqrt{120} - [5\sqrt{224} - \sqrt{8} \cdot (\sqrt{112} + \sqrt{252})] : 0,25^{-1} \cdot 4^{-1}\right\}$;
 d. $\left\{2\sqrt{96} \cdot (\sqrt{2})^{-2} - [\sqrt{192} \cdot (\sqrt{98} - \sqrt{128}) - 2\sqrt{486}]\right\} \cdot \sqrt{72}$.

9. Berechnet:

- a. $6 \cdot (\sqrt{567} - 2\sqrt{28} - \sqrt{112})^2 + (4\sqrt{108})^2 : (3\sqrt{27} - \sqrt{363} + \sqrt{48})^2$;
 b. $\sqrt{63} \cdot (\sqrt{252} + \sqrt{7} - 2\sqrt{63})^3 + (3\sqrt{11} - \sqrt{396} + \sqrt{44})^3 : (-\sqrt{11})$;
 c. $(\sqrt{180} + \sqrt{125} - \sqrt{720})^2 \cdot (-\sqrt{6}) - \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{12} - \sqrt{3} - \sqrt{480} : \sqrt{10})^3$;
 d. $-6\sqrt{216} : (\sqrt{72} - 5\sqrt{8} + \sqrt{50})^3 - 5\sqrt{540} : (2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{320})$.

10. Berechnet:

- a. $-3\frac{1}{8} \cdot \left[-0,2 \cdot \sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{15} \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right)\right] : \sqrt{3}$; b. $[5\sqrt{2} - 2, (6) \cdot \sqrt{2}] : \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0, (3) + 0,25 \cdot \frac{8\sqrt{2}}{9}\right] \cdot 0,75$.

11. Zeigt, dass die Zahl $a = \left[\left(\sqrt{8} + \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{18}}{2}\right) - \left(\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{16}} + \frac{2\sqrt{18}}{3}\right)\right] : \sqrt{\frac{2}{25}}$ ganz ist.

12. Die Summe aus dem Quadrat von -6 und dem Kubus von 2 wird mit $-4\sqrt{2}$ multipliziert. Vom Ergebnis subtrahiert man die Summe von $-\sqrt{72}$ und der Kubikzahl von $-3\sqrt{2}$. Das neue Ergebnis wird durch 4 geteilt. Schreibt eine Beziehung, die den Text der Aufgabe veranschaulicht, und gebt dann das Endergebnis an.

13. Fügt Klammern ein, damit die folgenden Gleichungen richtig werden:

a. $-3^2\sqrt{2} + \sqrt{2} : 4\sqrt{8} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{27} : \sqrt{363} = -2;$

b. $\sqrt{5}^4 - 2 \cdot \sqrt{2}^2 : 7 + (2\sqrt{5})^2 - 4^2 : 7 = 1.$

14. Sei die reelle Zahl $x = \sqrt{11}^3 - \sqrt{20} \cdot \sqrt{55}$.

a. Beweist, dass $\sqrt{11} \approx 3,31$.

b. Ermittelt eventuell mit einem Taschenrechner den ungefähren Wert der Zahl x , indem ihr die Abrundungen in der Größenordnung von Hundertsteln aller Wurzeln in jeder der folgenden Aussagen verwendet:

A. $x = \sqrt{1331} - \sqrt{1100};$

B. $x = \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} - \sqrt{20} \cdot \sqrt{55};$

C. $x = \sqrt{1331} - \sqrt{20} \cdot \sqrt{55};$

D. $x = \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} - \sqrt{1100}.$

15. Ordnet jede der reellen Zahlen in der ersten Zeile der Menge in der zweiten Zeile zu:

$$a = (-\sqrt{6}) \cdot (-\sqrt{6})^5 : (-\sqrt{6})^3 \cdot (-\sqrt{6})^7; b = \left(\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} + |3\sqrt{2}-4| : (2\sqrt{2}) \right)^2; c = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} - \sqrt{3^4}}{\sqrt{12}}.$$

A. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$

B. $\mathbb{N};$

C. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z};$

D. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}.$

16. Bestimmt in jedem Fall die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich der reellen Zahl x ist:

a. $x = \left[\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - 1) \right] \cdot (\sqrt{3})^{-1};$

b. $x = (2\sqrt{45} - 3\sqrt{20})^{15} - \frac{11\sqrt{18} - 9\sqrt{50}}{\sqrt{6}};$

c. $x = \left[(\sqrt{6})^3 : (-\sqrt{6})^7 \right] : (\sqrt{6})^{-5} + 3.$

Test

1. Berechnet:

a. $(\sqrt{3})^5 \cdot (\sqrt{3})^{12} : \left[(\sqrt{3})^3 \right]^5;$

b. $(\sqrt{8})^{35} : (\sqrt{2})^{35} \cdot (1,5)^{35};$

c. $3^{-2} + (\sqrt{3})^{-2} + \left(\frac{9}{5} \right)^{-1}.$

(3 Pkte.)

2. Wählt die richtige Antwort aus. Das Ergebnis der Rechnung $(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{3})^3 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$ ist:

a. $5 - \sqrt{6};$

b. $0;$

c. $-5 - \sqrt{6};$

d. $\sqrt{6}.$

(3 Pkte.)

3. Berechnet:

a. $\frac{2\sqrt{15}}{7} \cdot \left(-\sqrt{\frac{98}{4}} \right) + \sqrt{120} : 2;$

b. $2\sqrt{196}(\sqrt{45} + \sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{125});$

c. $\left(\sqrt{5^2 + 12^2} : \frac{1}{\sqrt{5}} - 4^{-2} \cdot \sqrt{80} \right) \cdot \frac{2\sqrt{20}}{51}.$

(3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.

7. Lektion: Rationalisieren des Nenners eines Bruchs

Schlüsselwörter

Rationalisieren

Erweitern

Nenner

Wurzel

Mathe im Alltag

Ein rechteckiges Grundstück mit einem Flächeninhalt von 50 m^2 wird in 6 quadratische Parzellen gleicher Flächeninhalte unterteilt (siehe Abbildung 1).

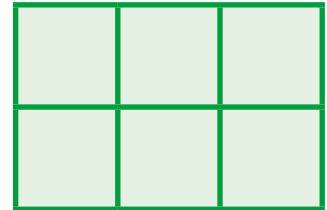


Abbildung 1

a. Wie lang ist die Seite eines Grundstücks?

b. Wie viele Meter Draht werden benötigt, um das Grundstück einzuzäunen?

Antwort:

a. Der Flächeninhalt einer Parzelle beträgt $\frac{50}{6} = \frac{25}{3} \text{ m}^2$. Wir bezeichnen mit a die

Seitenlänge einer Parzelle. Dies ergibt $a^2 = \frac{25}{3}$, woraus folgt, dass $a = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ Meter.

b. Um zu bestimmen, wie viele Meter Draht zu kaufen sind, berechnen wir den Umfang des Grundstücks. Die

Länge des Grundstücks ist gleich $L = 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}}$ Meter, und die Breite $l = 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ Meter. Deshalb:

$$U_{\text{Grundstück}} = 2 \cdot (L + l) = 2 \cdot \left(\frac{15}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}} \right) = 2 \cdot \frac{25}{\sqrt{3}} = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ Meter.}$$

Wir stellen fest, dass, obwohl wir den ungefähren Wert von $\sqrt{3}$ kennen, also $\sqrt{3} = 1,73\dots$, es schwierig ist, den Wert des Umfangs auch nur annähernd zu schätzen, da der Divisionsalgorithmus, den wir in der 5. Klasse für Dezimalbrüche gelernt haben, davon ausgeht, dass die Anzahl der Dezimalstellen des Divisors endlich ist.

In solchen Situationen ist es nützlich, den Nenner als rationale (sogar natürliche) Zahl auszudrücken. Eine Möglichkeit, dies zu erreichen, besteht darin, den Nenner mit einer günstig gewählten Zahl zu erweitern.

Da $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$, erweitern wir den erhaltenen Bruch mit $\sqrt{3}$. Also: $\frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$.

In diesem Fall können wir den Umfang wie folgt approximieren:

$$U_{\text{Grundstück}} = \frac{50\sqrt{3}}{3}; \frac{50 \cdot 1,73\dots}{3}; \frac{86,5\dots}{3}; 28,83\dots$$

Folglich werden mindestens 29 Meter Draht benötigt.

Was stellen wir fest?

Um den ungefähren Wert einer reellen Zahl zu bestimmen, die durch einen Bruch ausgedrückt wird, dessen Nenner eine Wurzel ist, empfiehlt es sich, den Bruch so zu erweitern, dass der Nenner eine rationale Zahl wird.

In dem angegebenen Beispiel wird der Nenner des Bruchs $\frac{50}{\sqrt{3}}$ durch Erweitern mit $\sqrt{3}$ rational.

Bemerkung

Den Nenner eines Verhältnisses aus reellen Zahlen zu *rationalisieren*, wenn der Nenner irrational ist, bedeutet, das Verhältnis mit einer irrationalen Zahl zu erweitern, sodass der Nenner des Verhältnisses rational wird.

Wenn der Nenner eines Verhältnisses aus reellen Zahlen eine irrationale Zahl der Form $a\sqrt{b}$ ist, wobei a und b rationale Zahlen ungleich null sind und $b > 0$ ist, kann man zum Rationalisieren des Nenners des Verhältnisses mit

$\sqrt{b}$ erweitern. In diesem Fall haben wir: $\frac{x}{a\sqrt{b}} = \frac{x \cdot \sqrt{b}}{a\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{x\sqrt{b}}{ab}$.





Beispiele

$$1. \frac{\sqrt{2} \cdot 7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{7\sqrt{2}}{2};$$

$$3. \frac{9}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{2 \cdot (\sqrt{5})^2} = \frac{9\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{9\sqrt{5}}{10};$$

$$2. -\frac{\sqrt{3} \cdot 6}{5\sqrt{3}} = -\frac{6\sqrt{3}}{5 \cdot (\sqrt{3})^2} = -\frac{6\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = -\frac{2\sqrt{3}}{5};$$

$$4. \frac{\sqrt{11} \cdot 4\sqrt{7}}{3\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{11}}{3 \cdot (\sqrt{11})^2} = \frac{4\sqrt{77}}{3 \cdot 11} = \frac{4\sqrt{77}}{33}.$$

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. Zeigt, dass die folgenden Zahlen rational sind:

a. $\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}};$

b. $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{4}{5}};$

c. $\frac{3}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{\sqrt{24}}.$

Lösung:

a. $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, was eine rationale Zahl ist.

b. $\frac{\sqrt{5} \cdot 2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot (2 - \sqrt{5})}{(\sqrt{5})^2} - \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - 5}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5} - 5 - 2\sqrt{5}}{5} = \frac{-5}{5} = -1$, was eine rationale Zahl ist.

c. $\frac{3}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} + \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{6} \cdot 3\sqrt{2}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{6 - 3\sqrt{12}}{12} =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{6 - 3 \cdot 2\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{6 \cdot (1 - \sqrt{3})}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$, was eine rationale Zahl ist.

2. Berechnet:

a. $\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{108}};$

b. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{48}} + \frac{15}{\sqrt{75}} \right) - \left(\frac{28}{3\sqrt{147}} + \frac{25}{3\sqrt{75}} \right).$

Lösung:

a. $\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{108}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{18} = \frac{6\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

b. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{20}{\sqrt{48}} + \frac{15}{\sqrt{75}} \right) - \left(\frac{28}{3\sqrt{147}} + \frac{25}{3\sqrt{75}} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3} \cdot 20}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \cdot 15}{5\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{\sqrt{3} \cdot 28}{3 \cdot 7\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \cdot 25}{3 \cdot 5\sqrt{3}} \right) =$
 $= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{20\sqrt{3}}{4 \cdot 3} + \frac{15\sqrt{3}}{5 \cdot 3} \right) - \left(\frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{5\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} - \frac{9\sqrt{3}}{9} = \frac{9\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$



Gruppenarbeit

Seien $x = \frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{8}-\sqrt{18}}{\sqrt{24}}$ und $y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{8}}{\sqrt{40}} + \frac{\sqrt{8}-\sqrt{11}}{\sqrt{88}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{14}}{\sqrt{154}}.$

Die Schüler der Klasse werden in zwei Gruppen aufgeteilt, die die Zahlen x und y unterschiedlich berechnen, und zwar wie folgt:

Die Schüler der Gruppe 1 rationalisieren jeden Bruch, bringen die sich ergebenden Brüche auf den gleichen Nenner und führen die Rechnungen durch, indem sie die Faktoren aus der Wurzel herausheben und die gleichartigen Glieder (Terme) reduzieren.

Die Schüler der Gruppe 2 schreiben jeden Bruch als Differenz zweier Brüche, kürzen die erhaltenen Brüche, führen die Rechnungen durch, reduzieren die gleichartigen Terme und rationalisieren schließlich die Nenner.

Vergleicht die beiden Berechnungsmethoden und entscheidet, wann es vorteilhafter ist, die eine oder die andere zu verwenden.



Vorgeschlagene Aufgaben



1. Rationalisiert den Nenner der folgenden Brüche:

a. $\frac{5}{\sqrt{2}}$; b. $\frac{2}{\sqrt{7}}$; c. $-\frac{6}{\sqrt{5}}$; d. $-\frac{9}{\sqrt{11}}$; e. $\frac{6}{5\sqrt{5}}$; f. $\frac{8}{3\sqrt{7}}$; g. $\frac{15}{7\sqrt{2}}$; h. $-\frac{9}{4\sqrt{5}}$.

2. Rationalisiert den Nenner der folgenden Brüche:

a. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; b. $-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; c. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$; d. $\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$; e. $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{56}}$; f. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$; g. $\frac{5-\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$; h. $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{\sqrt{50}}$.

3. Rationalisiert den Nenner der folgenden Brüche:

a. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$; b. $\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{6}}$; c. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$; d. $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}$;
e. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{96}}$; f. $\frac{\sqrt{12}+2}{\sqrt{2}}$; g. $\frac{2-\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}$; h. $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{54}}{\sqrt{90}}$.

4. Zeigt, dass die folgenden Zahlen rational sind:

a. $\sqrt{5}-\frac{5}{\sqrt{5}}$; b. $\frac{6}{\sqrt{6}}-\sqrt{6}$; c. $\frac{6}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$; d. $\frac{5}{\sqrt{125}}-\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{180}}$.

5. Führt die Rechnungen durch, nachdem ihr die Nenner rationalisiert:

a. $\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{9}{\sqrt{3}}+\frac{15}{5\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{25}}{5\sqrt{2}}$; b. $\frac{15}{\sqrt{5}}+\frac{6}{\sqrt{12}}-\frac{8}{\sqrt{20}}-\frac{15}{\sqrt{75}}$;
c. $\frac{16}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{36}-\sqrt{16}}{\sqrt{2}}-\frac{14}{\sqrt{98}}$; d. $\frac{24}{\sqrt{24}}-\frac{25}{\sqrt{150}}-\frac{36}{\sqrt{216}}+\frac{15}{\sqrt{54}}$.

6. Führt durch:

a. $\left(\frac{14}{\sqrt{7}}+\frac{40}{\sqrt{20}}\right)-\left(\frac{35}{\sqrt{5}}-\frac{56}{\sqrt{28}}\right)$; b. $\left(\frac{2}{\sqrt{75}}-\sqrt{27}\right)-\left(\sqrt{3}-\frac{30}{2\sqrt{12}}\right)$;
c. $\left(\frac{10}{\sqrt{5}}+2\right)-\left(1+\frac{30}{\sqrt{180}}\right)$; d. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{24}}{3}+\frac{10}{\sqrt{150}}\right)+\left(2,5+\frac{12}{\sqrt{6}}\right)$.

7. Führt durch:

a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{\sqrt{28}}+\frac{21}{2\sqrt{63}}\right): \frac{2\sqrt{7}}{3}$; b. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{3}{\sqrt{72}}-\frac{4}{\sqrt{48}}\right)$;
c. $2 \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{3}} + 6 \cdot \frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}}$; d. $\left(\frac{\sqrt{96}}{12}+\frac{9}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right): \left(\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{12}}+\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$.

8. Berechnet:

a. $\left(\sqrt{0,3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right): \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\sqrt{0,2}+\sqrt{\frac{80}{90}}\right): \frac{1}{\sqrt{2}}$;
b. $1\frac{5}{7} \cdot \left(\sqrt{0,1(6)}+\frac{5}{2\sqrt{150}}-\frac{15}{\sqrt{54}}\right) + 1\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{15}}\right)$;
c. $\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}-\sqrt{\frac{4}{63}}\right)+\sqrt{2} \cdot \left(\frac{7}{2\sqrt{14}}-\frac{7}{3\sqrt{14}}\right)+\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{21}}\right)$;
d. $\left(\frac{12+10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{2}+2}{\sqrt{8}}\right) \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{2}}{\sqrt{72}}-\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{8}}\right)$.

9. Zeigt, dass die folgenden Zahlen ganze Zahlen sind:

a. $\sqrt{3} \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{12}}{3} \right) - \left(\sqrt{48} + \frac{2\sqrt{96}}{\sqrt{50}} \right) : \sqrt{3} - \left(\frac{8\sqrt{3}}{5} - \sqrt{3} \right) : \frac{1}{\sqrt{27}};$

b. $\frac{14}{\sqrt{63}} \cdot \left(\frac{6\sqrt{7}}{7} + \frac{18}{\sqrt{7}} - \frac{30}{\sqrt{28}} \right) - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{15}{\sqrt{50}} + \frac{24}{\sqrt{8}} \right) : \sqrt{8};$

c. $\sqrt{6} \cdot (|\sqrt{3} - \sqrt{2}| + |2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|) - \left(\frac{40}{\sqrt{200}} - \frac{21}{\sqrt{147}} \right) : (\sqrt{6})^{-1};$

d. $10 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{9900}} \right).$

10. Sei die reelle Zahl $a = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} : \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{-3}$. Bestimmt den kleinsten Wert der natürlichen Zahl b , die nicht gleich null ist, sodass $\frac{\sqrt{b}}{a}$ eine ganze Zahl ist.

11. Sei die reelle Zahl $a = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{50}}} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{27} + \sqrt{12}} \right)^{-1}$. Bestimmt den kleinsten Wert der natürlichen Zahl b , sodass $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ eine rationale Zahl größer als 3 ist.

Test

1. Rationalisiere die Nenner der folgenden Brüche:

a. $\frac{8}{\sqrt{2}};$

b. $\frac{6}{\sqrt{18}};$

c. $-\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}};$

d. $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{20}}.$

(3 Pkte.)

2. Wählt die richtige Antwort aus. Das Ergebnis der Rechnung $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{14}{\sqrt{98}} + \sqrt{\frac{25}{162}} \right) : \frac{23\sqrt{2}}{36}$ ist:

a. $\sqrt{2};$

b. $\frac{\sqrt{2}}{23};$

c. 1;

d. $3\sqrt{2}.$

(3 Pkte.)

3. Berechnet:

a. $\left(\frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{12}{\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{60}{3\sqrt{50}} + \frac{9}{\sqrt{27}} \right);$

b. $\left(\sqrt{0,(2)} + \frac{4}{3\sqrt{2}} \right) \cdot \sqrt{2} + \left(\frac{10}{\sqrt{45}} + \sqrt{0,(5)} \right) \cdot \sqrt{5};$

c. $0,5 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{54}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2.$

(3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.

8. Lektion: Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen. Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen

Schlüsselwörter

arithmetisches Mittel

geometrisches Mittel

Gewicht (Häufigkeit)

gewichtetes arithmetisches Mittel

Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen

Mathe im Alltag

Die Mitglieder eines Robotikclubs testen den Roboter ihres Teams. Er muss zwei Minuten lang Teile in drei verschiedenen Farben sortieren.

Nach 30 Tests stellen sie fest, dass der Roboter bei 9 Tests 16 Teile sortiert hat und bei 13 weiteren 14 Teile, was ein sehr gutes Ergebnis ist.

Bei den anderen 8 Tests hat der Roboter nur 11 Teile sortiert. Wir berechnen das arithmetische Mittel der Ergebnisse, um die durchschnittliche Punktzahl zu ermitteln:



$$m_a = \frac{\overbrace{(16+16+\dots+16)}^{9\text{-mal}} + \overbrace{(14+14+\dots+14)}^{13\text{-mal}} + \overbrace{(11+11+\dots+11)}^{8\text{-mal}}}{30} = \frac{9 \cdot 16 + 13 \cdot 14 + 8 \cdot 11}{30} = \frac{414}{30} = 13,8.$$

Was stellen wir fest?

Unter den 30 Ergebnissen erscheint 16 9-mal, 14 13-mal und 11 8-mal. Wir werden sagen, die Werte 16, 14 und 11 haben ein Gewicht (eine Häufigkeit) von 9, 13 bzw. 8.

Wenn in einem gegebenen numerischen Datensatz die Werte a , b und c jeweils die Gewichte m , n und p haben, dann wird das arithmetische Mittel der $m + n + p$ Werte *gewichtetes arithmetisches Mittel* der Zahlen a , b und c mit den Gewichten m , n , p genannt und kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$m_{ga} = \frac{\overbrace{(a+a+\dots+a)}^{m \text{ Glieder}} + \overbrace{(b+b+\dots+b)}^{n \text{ Glieder}} + \overbrace{(c+c+\dots+c)}^{p \text{ Glieder}}}{m+n+p} = \frac{m \cdot a + n \cdot b + p \cdot c}{m+n+p}.$$

Der Begriff des gewichteten Mittelwerts kann auch auf den Fall ausgedehnt werden, dass die Gewichte positive reelle Zahlen sind (nicht unbedingt natürliche Zahlen).

Merke dir!

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$. Die reelle Zahl:

$$m_{ga} = \frac{p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \dots + p_n \cdot a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n},$$

heißt das *gewichtete arithmetische Mittel* der reellen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, mit den Gewichten $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Wenn $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, erhält man das arithmetische Mittel $m_a = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{n}$.

Wenn $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, dann ist $a_1 \leq m_{ap} \leq a_n$.

Beispiele

- In Frankreich setzt sich die Note eines Lyzeumsabsolventen in der Abiturprüfung 2024 zusammen aus: dem Durchschnitt C (ständige Überprüfung) seiner Noten der letzten zwei Jahre in bestimmten Fächern (je nach dem Klassenprofil und den gewählten Wahlfächern) mit dem Gewicht 40, den Noten FS und FO , die er im Vorjahr in den schriftlichen und mündlichen Arbeiten der französischen Sprachprüfung erzielt hatte, die jeweils das Gewicht 5 haben, und den Noten in der Abschlussprüfung, und zwar: in Philosophie die Note F mit dem Gewicht 8, in der „großen mündlichen Prüfung“ (in einem während des Lyzeums gewählten Wahlfachs) die Note MO mit dem Gewicht 10 und in zwei weiteren Fächern, S_1 und S_2 , mit dem Gewicht von jeweils 16.

Die Noten an französischen Schulen reichen von 0 bis 20, und eine Mittelnote von mindestens 16 in der Abiturprüfung wird mit dem Zeugnis „sehr gut“ bewertet.

Die Mittelnote (Durchschnittsnote) eines französischen Abiturienten im Jahr 2024 wurde nach der folgenden Formel berechnet:

$$\text{Abiturmittelnote} = \frac{C \cdot 40 + FS \cdot 5 + FO \cdot 5 + F \cdot 8 + MO \cdot 10 + S_1 \cdot 16 + S_2 \cdot 16}{40 + 5 + 5 + 8 + 10 + 16 + 16}.$$



Jean-Paul erreichte die Mittelnote 16,5 in der ständigen Überprüfung, 16 und 18 in der schriftlichen Prüfung bzw. in der mündlichen Französischprüfung, 16 in Philosophie, 17 in der „großen mündlichen Prüfung“ und die Noten 14 und 18 in den weiteren Fächern. Jean-Pauls Mittelnote für das Abitur ist:

$$\frac{16,5 \cdot 40 + 16 \cdot 5 + 18 \cdot 5 + 16 \cdot 8 + 17 \cdot 10 + 14 \cdot 16 + 18 \cdot 16}{40 + 5 + 5 + 8 + 10 + 16 + 16} = \frac{1640}{100} = 16,4.$$

2. Das gewichtete arithmetische Mittel der Zahlen 4 und -6 mit den Gewichten 5 bzw. 3 beträgt:

$$m_{ga} = \frac{4 \cdot 5 + (-6) \cdot 3}{5 + 3} = \frac{20 - 18}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

3. Das gewichtete arithmetische Mittel der Zahlen $2\sqrt{5}$, $8\sqrt{5}$ und $6\sqrt{5}$ mit den Gewichten $0,5$, $\frac{3}{4}$ bzw. $\frac{2}{3}$ ist:

$$m_{ga} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 0,5 + 8\sqrt{5} \cdot \frac{3}{4} + 6\sqrt{5} \cdot \frac{2}{3}}{0,5 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5} + 6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}} = \frac{11\sqrt{5}}{\frac{23}{12}} = 11\sqrt{5} \cdot \frac{12}{23} = \frac{132\sqrt{5}}{23}.$$

Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen

Problemstellung

Dina hat folgende Aufgabe zu lösen:

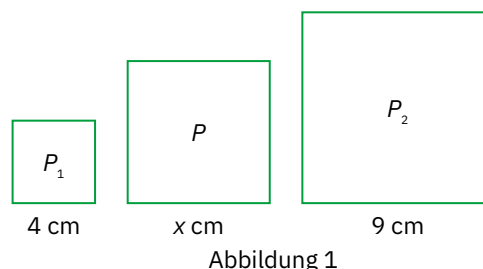
Wie lang ist die Seite x des mittleren Quadrats P , sodass das Verhältnis zwischen der Seite des kleinen Quadrats P_1 und der Seite des Quadrats P gleich dem Verhältnis zwischen der Seite von P und der Seite des großen Quadrats P_2 ist (Abbildung 1)?

Was stellen wir fest?

Die Bedingung der Aufgabe lautet $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$; mit anderen Worten: x ist der gemeinsame Wert der Innenglieder einer

Verhältnisgleichung, bei der die Außenglieder 4 und 9 sind, und die Innenglieder gleich sind. Wir erhalten $x^2 = 4 \cdot 9 = 36$, also $x = \sqrt{36} = 6$ cm.

Allgemeiner ausgedrückt: Wenn $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ eine Verhältnisgleichung mit positiven Gliedern ist, dann ist $x = \sqrt{a \cdot b}$.



Merke dir!

Das geometrische Mittel (oder proportionale Mittel) der positiven Zahlen a und b ist gleich der Quadratwurzel ihres Produkts:

$$m_g(a, b) = \sqrt{a \cdot b}.$$

Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, kann das geometrische Mittel kurz mit m_g bezeichnet werden.

Beispiele

- Das geometrische Mittel der Zahlen 10 und 40 ist $m_g = \sqrt{10 \cdot 40} = \sqrt{400} = 20$.
- Das geometrische Mittel der Zahlen $\frac{7}{3}$ und $0,(\overline{7})$ ist $m_g = \sqrt{\frac{7}{3} \cdot 0,(\overline{7})} = \sqrt{\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{49}{27}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 7}{3\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Bemerkungen

- Das geometrische Mittel von zwei positiven Zahlen liegt zwischen der kleineren und der größeren der beiden Zahlen:

wenn $0 < a \leq b$, dann $a \leq \sqrt{a \cdot b} \leq b$ (mit Gleichheit für $a = b$).

Beispiele:

a. Für $a = 8$ und $b = 18$ ergibt sich $m_g = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{144} = 12$ und $a < \sqrt{ab} < b$.

b. Für $x = \frac{5}{4}$ und $y = \frac{1}{5}$ ergibt sich $m_g = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ und $x > \sqrt{xy} > y$.

c. Für $p = \sqrt{3}$ und $q = \sqrt{3}$ ergibt sich $m_g = \sqrt{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ und $p = \sqrt{pq} = q$.

2. Das geometrische Mittel von zwei positiven reellen Zahlen ist kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Zahlen:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \text{ für jedes } a, b > 0.$$

Diese Beziehung, bei der Gleichheit herrscht, wenn $a = b$ ist, wird als *Ungleichheit der Mittelwerte* bezeichnet.

- Beispiele:**
- a. Das geometrische Mittel der Zahlen 27 und 75 ist $m_g = \sqrt{27 \cdot 75} = \sqrt{2025} = 45$, und das arithmetische Mittel ist $m_a = \frac{27+75}{2} = 51$. Offensichtlich ist $m_g < m_a$.
 - b. Das geometrische Mittel der Zahlen 6 und 8 ist $m_g = \sqrt{6 \cdot 8} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ und ihr arithmetisches Mittel ist $m_a = 7$. Die Beziehung $4\sqrt{3} < 7$ ist überprüft (da $4\sqrt{3} = \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$).

Mathe-Kultur

Das geometrische Mittel in der Praxis. Das Aspektverhältnis (Bildformat)

Das Aspektverhältnis (englisch *aspect ratio*) eines Bildschirms ist das Verhältnis zwischen den Dimensionen des Bildschirms, genauer gesagt, zwischen seiner Breite und seiner Höhe. Im Laufe der Jahre wurden verschiedene Formate verwendet (4:3-Fernsehformat, CinemaScope 2,35:1-Format usw.). Heutzutage wird üblicherweise das Breitbildformat (widescreen) mit einem Seitenverhältnis von 16:9 verwendet.

Recherchiert im Internet, um herauszufinden, wie der amerikanische Ingenieur Kerns Powers das geometrische Mittel nutzte, um dieses Format zu wählen.



Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Das arithmetische Mittel von drei reellen Zahlen ist gleich $\sqrt{80}$. Wenn zwei der Zahlen $\sqrt{20}$ bzw. $\sqrt{245}$ sind, bestimmt die dritte Zahl.

Lösung:

Wir bezeichnen die unbekannte Zahl mit x . Das arithmetische Mittel der drei Zahlen ist: $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{245} + x}{3} = \sqrt{80}$.

Wir heben die Faktoren aus den Wurzeln heraus und erhalten: $\frac{2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} + x}{3} = 4\sqrt{5}$.

Außerdem ist $9\sqrt{5} + x = 3 \cdot 4\sqrt{5}$, d. h., $9\sqrt{5} + x = 12\sqrt{5}$. Wir erhalten $x = 12\sqrt{5} - 9\sqrt{5}$, also $x = 3\sqrt{5}$.

2. Bestimmt x , wenn bekannt ist, dass das gewichtete Mittel der Zahlen $\frac{2}{3}$, 5^{-1} und x , mit den Gewichten 6, 5 bzw. 4 gleich 1,4 ist.

Lösung:

Das gewichtete Mittel der drei Zahlen ist: $\frac{\frac{2}{3} \cdot 6 + 5^{-1} \cdot 5 + x \cdot 4}{6 + 5 + 4} = 1,4$.

Wir berechnen und erhalten $\frac{4 + 1 + 4x}{15} = 1,4$, woraus folgt, dass $5 + 4x = 15 \cdot 1,4$, also ist $5 + 4x = 21$.

Daraus folgt, dass $4x = 16$ ist, was $x = 4$ bedeutet.

3. Bestimmt die natürlichen Zahlen x und y , wenn bekannt ist, dass das geometrische Mittel der Zahlen 2^x und 5^y gleich 20 ist.

Lösung:

Das geometrische Mittel der Zahlen 2^x und 5^y ist $\sqrt{2^x \cdot 5^y} = 20$. Das bedeutet, dass $2^x \cdot 5^y = 20^2$ ist, d. h., $2^x \cdot 5^y = 2^4 \cdot 5^2$. Da x und y natürliche Zahlen sind, ist $x = 4$ und $y = 2$.

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Berechne das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel der folgenden Zahlen:

- | | | | |
|----------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| a. 4 und 8; | b. $\frac{2}{3}$ und $\frac{7}{3}$; | c. $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{4}$; | d. 3,6 und 6,4; |
| e. 0,16 und 4; | f. $\sqrt{5}$ und $\sqrt{45}$; | g. $\sqrt{18}$ und $\sqrt{50}$; | h. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ und $\frac{\sqrt{108}}{2}$. |

2. Berechnet das gewichtete Mittel der Zahlen:
 - a. 4 und 6 mit den Gewichten 2 bzw. 8;
 - b. 5, 6 und 12 mit den Gewichten 3, 5 bzw. 2;
 - c. -10 und 3 mit den Gewichten 4 bzw. 16;
 - d. 0,4 und 1,(6) mit den Gewichten 0,5 bzw. 1,5.
3. Berechnet das gewichtete Mittel der Zahlen a und b mit den Gewichten p_1 , bzw. p_2 :
 - a. $a=5\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{3}$, $p_1=3$, $p_2=6$;
 - b. $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{32}$, $p_1=4$, $p_2=2$;
 - c. $a=\sqrt{24}$, $b=-\sqrt{54}$, $p_1=5$, $p_2=3$;
 - d. $a=0,1\sqrt{7}$, $b=2,5\sqrt{7}$, $p_1=10$, $p_2=6$.
4. Betrachtet die Zahlen $a=2\sqrt{72}+\sqrt{128}+\sqrt{50}$ und $b=2\sqrt{8}+\sqrt{32}-3\sqrt{18}+\sqrt{200}$. Berechnet das geometrische Mittel der Zahlen a und b .
5. Berechnet das geometrische Mittel der Zahlen a und b , wenn $a=3\cdot\sqrt{1,5\cdot 4+2\sqrt{576}}$ und $b=\sqrt{0,(6)\cdot 3+2\sqrt{121}}$.
6. Berechnet das gewichtete Mittel der Zahlen a und b mit den Gewichten p_1 bzw. p_2 , wenn:

$$a=[2\cdot 0,(6)+1,(6)]\cdot 3\sqrt{3}, b=0,2\cdot [(3\sqrt{5}+\sqrt{20})\cdot \sqrt{15}-(\sqrt{24}+\sqrt{54})\cdot \sqrt{2}], p_1=2, p_2=4.$$
7. Überprüft die Beziehung $m_g \leq m_a$ für die folgenden Zahlenpaare:
 - a. 15 und 24;
 - b. $2\frac{3}{4}$ und 4;
 - c. $\sqrt{2}$ und $\sqrt{18}$;
 - d. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ und $\sqrt{3}$.
8. Bestimmt die reelle Zahl x , wenn das arithmetische Mittel der Zahlen $4\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$ und x gleich $7\sqrt{3}$ ist.
9. Bestimmt die positive reelle Zahl x , wenn das geometrische Mittel der Zahlen 6 und x gleich $6\sqrt{3}$ ist.
10. Das gewichtete Mittel der Zahlen $\frac{2}{3}$, 1,5 und x mit den Gewichten 6,4 bzw. 5 ist 2. Bestimmt die reelle Zahl x .
11. Anfang Dezember verpacken Angestellte im Supermarkt verschiedene Arten von Baumbonbons gleichmäßig in 1 kg-Packungen. Wenn bekannt ist, dass sie 25 kg Pralinen zu 60 Lei pro Kilogramm, 35 kg Fondant zu 56 Lei pro Kilogramm, 40 kg Karamellbonbons zu 42 Lei pro Kilogramm und 60 kg Gelee zu 35 Lei pro Kilogramm zur Verfügung haben, so bestimmt den Preis für eine Packung.
12. Das geometrische Mittel von zwei natürlichen Zahlen ist 7. Bestimmt die Zahlen.



Test

1. Berechnet das arithmetische Mittel und das geometrische Mittel der folgenden Zahlen:

$$a=3\sqrt{50}-3\sqrt{32}+\sqrt{98} \text{ und } b=2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-2\sqrt{200}.$$
(3 Pkte.)
2. Wählt die richtige Antwort aus. Das gewichtete Mittel der Zahlen $\frac{5}{6}$, $1\frac{2}{5}$ und 2,4 mit den Gewichten 12, 10 bzw. 5 ist:
 - a. $\frac{4}{3}$;
 - b. 1;
 - c. $\frac{1}{5}$;
 - d. $\frac{3}{4}$.(3 Pkte.)
3. Das geometrische Mittel der Zahlen $5\sqrt{3}$ und x ($x \geq 0$) ist $2\sqrt{15}$. Bestimmt die reelle Zahl x .
 (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

9. Lektion: Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$

Schlüsselwörter

Gleichung

Lösungsmenge

Quadrat

Lösungen

Wurzel

Problemstellung

Abbildung 1 zeigt ein Quadrat, dessen Seitenlänge mit x bezeichnet ist. Wir bestimmen den Wert der reellen Zahl x und wissen, dass der Flächeninhalt des Quadrats 1369 m^2 beträgt.

Der Flächeninhalt eines Quadrats ist das Quadrat seiner Seitenlänge, also $x^2 = 1369$.

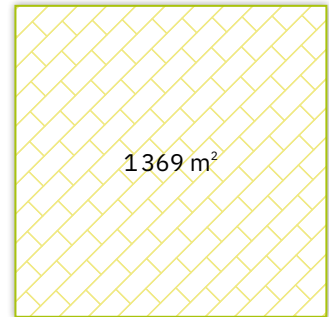
Wir stellen fest, dass eine Zahl, die zum Quadrat 1369 ergibt, $\sqrt{1369} = 37$ ist.

Wir haben $37^2 = (-37)^2 = 1369$, also könnten wir denken, dass $x = 37$ oder $x = -37$ ist.

Da die Seitenlänge eines Quadrats keine negative Zahl sein kann, ist die einzige Möglichkeit $x = 37$.

Was stellen wir fest?

Für jede positive reelle Zahl a wird die Gleichheit $x^2 = a$ durch zwei entgegengesetzte reelle Zahlen bestätigt: $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.



$x \text{ m}$
Abbildung 1

Merke dir!

Sei a eine reelle Zahl. Die Gleichung $x^2 = a$ in der Menge der reellen Zahlen zu lösen, heißt, alle reellen Werte von x zu bestimmen, für die die Gleichheit $x^2 = a$ gilt.

Die Werte von x , die die Gleichheit $x^2 = a$ erfüllen, werden als *Lösungen der Gleichung* bezeichnet. Die Menge der Lösungen der Gleichung (die Lösungsmenge) wird gewöhnlich mit S oder L bezeichnet.

Beispiele

Löst die folgenden Gleichungen in der Menge der reellen Zahlen:

1. $x^2 = 25$;

2. $3x^2 = 21$;

3. $5x^2 = 0$;

4. $-2x^2 = 32$.

Lösung:

1. Es gibt zwei reelle Zahlen, deren Quadrat 25 ist, nämlich $\sqrt{25} = 5$ und $-\sqrt{25} = -5$. Die Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -5$. Wir können auch schreiben, dass die Menge der Lösungen der Gleichung $S = \{-5, 5\}$ ist.

2. Wenn $3x^2 = 21$ ist, dann ist $x^2 = 21 : 3$, d. h., $x^2 = 7$, also $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

3. Aus $5x^2 = 0$ folgt, dass $x^2 = 0 : 5$, d. h., $x^2 = 0$. Es gibt nur eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 0 ist, und das ist 0. Also ist $x = 0$. Wir können $S = \{0\}$ schreiben.

4. Wir erhalten $x^2 = 32 : (-2)$, d. h., $x^2 = -16$. Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -16 ist, da das Quadrat jeder reellen Zahl größer oder gleich 0 ist. Die Gleichung hat keine Lösung. Wir schreiben $S = \emptyset$ (die leere Menge).

Bemerkung

Sei a eine beliebige reelle Zahl. Dann:

1. Wenn $a < 0$ ist, hat die Gleichung $x^2 = a$ keine Lösung.

2. Wenn $a = 0$ ist, hat die Gleichung $x^2 = a$ eine einzige Lösung $x = 0$.

3. Wenn $a > 0$ ist, hat die Gleichung $x^2 = a$ zwei Lösungen: $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.



Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Löst die folgenden Gleichungen, wobei x eine reelle Zahl ist:

a. $0,2x^2 + 0,8 = 4$;

b. $5(x^2 + \sqrt{3}) = \sqrt{75}$;

c. $(x-1)^2 = 16$;

d. $x^2 = 2 - \sqrt{5}$.

Lösung:

a. $0,2x^2 + 0,8 = 4 \Leftrightarrow 0,2x^2 = 4 - 0,8 \Leftrightarrow 0,2x^2 = 3,2 \Leftrightarrow x^2 = 3,2 : 0,2 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x \in \{-4; 4\}$;

b. Zuerst heben wir die Faktoren aus der Wurzel heraus: $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu:
 $5(x^2 + \sqrt{3}) = 5\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} : 5 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{3} - \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

c. $(x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow x-1 = 4$ oder $x-1 = -4 \Leftrightarrow x = 5$ oder $x = -3 \Leftrightarrow x \in \{-3; 5\}$;

d. $x^2 = 2 - \sqrt{5}$. Man beachte, dass $2 - \sqrt{5} < 0$ ist, es gibt also keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich $2 - \sqrt{5}$ ist. Daher hat die Gleichung keine reellen Lösungen.

2. Ein Grundstück hat die Form eines Quadrats mit einem Flächeninhalt von 64 m^2 . Um wie viele Meter sollte jede Seite des Grundstücks vergrößert werden, damit der Flächeninhalt des neuen Grundstücks um 36 m^2 größer ist als der des ursprünglichen Grundstücks?

Lösung:

Das Grundstück ist ein Quadrat. Daraus folgt, dass $Fl_{\text{Grundstück}} = l^2$, wobei l die Seite des Quadrats ist.

Dies ergibt $l^2 = 64 \text{ m}^2$, also $l = 8 \text{ m}$, da $l > 0$.

Der Flächeninhalt des vergrößerten Grundstücks beträgt $64 \text{ m}^2 + 36 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^2$.

Das neue Grundstück ist also ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 100 m^2 . Die Seite des neuen Grundstücks beträgt also 10 m (da $100 = 10^2$).

Da $10 \text{ m} - 8 \text{ m} = 2 \text{ m}$, bedeutet dies, dass jede Seite des Grundstücks um 2 Meter vergrößert werden muss, um die Aufgabe zu lösen.

Die Lösung der Aufgabe kann mithilfe der beigefügten Gleichung wie folgt umgeschrieben werden:

Wenn man x als die Anzahl der Meter angibt, um die jede Seite des Grundstücks vergrößert werden muss, erhält man die Gleichung

$(\sqrt{64} + x)^2 = 64 + 36$, d. h., $(8 + x)^2 = 100$. Da $x > 0$ ist, ergibt sich $8 + x = 10$, also $x = 2 \text{ m}$.

Vorgeschlagene Aufgaben



1. Gebt an, welche der folgenden Gleichungen die Lösung $x = 1$ zulassen:

a. $x^2 = 2$;

b. $5x^2 = 5$;

c. $x^2 + 9 = 11$;

d. $-x^2 + 14 = 15$;

e. $(x+4)^2 + 4 = 5^2 + 2^2$.

2. Löst die Gleichungen, wobei x eine natürliche Zahl ist:

a. $x^2 = 36$;

b. $x^2 = 100$;

c. $x^2 = -25$;

d. $2x^2 = 18$;

e. $x^2 + 2 = 27$;

f. $x^2 = 8$.

3. Löst die Gleichungen, wobei x eine negative ganze Zahl ist:

a. $x^2 = 16$;

b. $3x^2 = 75$;

c. $x^2 + 3 = 3$;

d. $x^2 - 12 = 37$;

e. $3x^2 = 36$;

f. $-x^2 = 9$.

4. Löst die Gleichungen, wobei x eine reelle Zahl ist:

a. $x^2 = 81$;

b. $4x^2 = 900$;

c. $2x^2 + 7 = 9$;

d. $-x^2 - 4 = -4$;

e. $6x^2 : 5 = 12$;

f. $20 : x^2 = 10$.

5. Bestimmt die Seite eines Quadrats mit dem Flächeninhalt 196 m^2 .

6. Löst die Gleichungen, wobei x eine reelle Zahl ist:

a. $x^2 = 1,69$;

b. $2x^2 = 1,28$;

c. $0,5x^2 = 0,98$;

d. $-1,3x^2 = 5,2$.

7. Löst die Gleichungen, wobei x eine reelle Zahl ist:

a. $x^2 = \frac{144}{49}$;

b. $x^2 + \frac{3}{4} = 1$;

c. $\frac{x^2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$;

d. $-\frac{5}{6}x^2 = -\frac{10}{27}$.

8. Löst die Gleichungen, wobei x eine reelle Zahl ist:

a. $0,25x^2 + 5,32 = 5,41$;

b. $x^2 \cdot 0,3 = 5,3$;

c. $1,5x^2 : 2 = 0,7$;

d. $-x^2 + 2 = 0,2$.

9. Löst die Gleichungen, wobei x eine reelle Zahl ist:

a. $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{12}$;

b. $3\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8} = \sqrt{50}$;

c. $4(\sqrt{5}x^2 - \sqrt{5}) = \sqrt{80}$;

d. $0,5x^2 + \sqrt{0,25} = 1$.

Selbstbewertung

1. Löst die folgenden Gleichungen, wobei x eine reelle Zahl ist:

- a. $x^2 = 9$; b. $5x^2 = 125$; c. $0,2x^2 + 10 = 25$.

(3 Pkte.)

2. Wählt die richtige Antwort aus. Die positive reelle Zahl, die die Lösung der Gleichung $7(\sqrt{6}x^2 - \sqrt{54}) = 6\sqrt{294}$ ist, ist:

- a. 6; b. 3; c. $\sqrt{6}$; d. 1.

(3 Pkte.)

3. Die Fläche eines Grundstücks wird in 3 gleiche Parzellen aufgeteilt, die jeweils die Form eines Quadrats haben. Bestimmt die Seitenlänge des Quadrats, wenn der Flächeninhalt des ursprünglichen Grundstücks 675 m^2 beträgt.

(3 Pkte.)

Bemerkung: Für jeden richtig beantworteten Unterpunkt wird 1 Punkt vergeben. 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

Wiederholung und Bewertung

Die Potenz mit ganzzahligem Exponenten einer reellen Zahl • Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen • Rationalisieren des Nenners eines Bruchs • Gewichtetes arithmetisches Mittel • Geometrisches Mittel • Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$

Schreibt ins Heft für die Aufgaben 1–8 den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht. Schreibt für die Aufgaben 9–14 die vollständigen Lösungen auf.

1. Das Quadrat der Zahl $\sqrt{3}$ ist:

- a. 9; b. 3; c. 6; d. 1,5.

2. Das geometrische Mittel der Zahlen 4 und 9 ist:

- a. 6; b. 6,5; c. 13; d. $\sqrt{13}$.

3. Durch Rationalisieren des Nenners des Bruchs $\frac{3}{\sqrt{3}}$ erhält man:

- a. 3; b. -3; c. $\sqrt{3}$; d. $-\sqrt{3}$.

4. Durch Berechnen der Zahl $(-\sqrt{2})^3$ erhält man:

- a. 4; b. $-2\sqrt{2}$; c. $2\sqrt{2}$; d. 8.

5. Durch Berechnen der Zahl $(\sqrt{5})^4 : (\sqrt{5})^2$ erhält man:

- a. $\sqrt{5}$; b. $(\sqrt{5})^6$; c. 5; d. 25.

6. Durch Berechnen der Zahl $[(-3\sqrt{5})^4]^0$ erhält man:

- a. $-3\sqrt{5}$; b. $3\sqrt{5}$; c. 0; d. 1.

7. Durch Berechnen der Zahl $(-\sqrt{4})^{-2}$ erhält man:

- a. $\frac{1}{16}$; b. 16; c. 4; d. $\frac{1}{4}$.

8. Die Zahl $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$ ist:

- a. natürlich; b. ganz;
c. rational; d. irrational.

9. Welche der folgenden Aussagen ist wahr (W) und welche ist falsch (F)?

a. $\left[(\sqrt{3})^2\right]^3 = (\sqrt{3})^5$

b. $(\sqrt{4})^3 = 8$

c. $(\sqrt{5})^0 = 1$

10. Ordnet jedem Ausdruck in der Spalte A die richtige Antwort in der Spalte B zu:

A	B
A. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$	a. 1
B. $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$	b. 25
C. $[(2\sqrt{5} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}]^3$	c. $\sqrt{20}$
	d. $\sqrt{80}$

11. Schreibt den Kehrwert der Zahl $-\frac{\sqrt{5}}{10}$.

12. Berechnet das gewichtete arithmetische Mittel der Zahlen $\sqrt{20}$ und $\sqrt{245}$ mit den Gewichten 2 bzw. 3.

13. Löst die Gleichung, wobei x eine reelle Zahl ist:
 $2x^2 + 15 = 35$.

14. Das geometrische Mittel von zwei natürlichen Zahlen ist 12. Eine der Zahlen ist 9. Bestimmt die andere Zahl.

Beobachtungsbogen

► Ich war daran interessiert, Neues über Lösungsmethoden von Aufgaben zu lernen.

► Meine Teilnahme am Matheunterricht wurde von meinen Mitschülern und der Lehrkraft geschätzt.



E2

Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

1. Lektion

Umformen einer Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Identitäten

2. Lektion

Gleichungen der Form $ax + b = 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge einer Gleichung. Äquivalente Gleichungen

3. Lektion

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

4. Lektion

Lösen von Aufgaben mithilfe von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen

Wiederholung und Bewertung





Drohnen sind in der Luft, während ihre Piloten sicher am Boden sind. Sie funktionieren dank der Fähigkeit des Menschen, eine Reihe von Aktionen (Abheben, Wenden, Landen) mithilfe linearer Gleichungen zu programmieren. Diese Gleichungen werden zur Berechnung von Geschwindigkeit, Entfernung und Zeit der Bewegung eines Objekts verwendet.

1. Lektion: Umformen einer Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Identitäten

Schlüsselwörter

Gleichung

äquivalent

Glieder

Operationen

Die Gleichheitsbeziehung. Wiederholung und Ergänzungen

Zwei reelle Zahlen a und b sind gleich, wenn die Zahlen a und b denselben Punkt auf der Zahlenachse darstellen. Wir schreiben $a = b$. Wir erinnern uns daran, dass die Gleichheitsbeziehung in der Menge der rationalen Zahlen reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Diese Eigenschaften gelten auch für die Menge der reellen Zahlen.

Die Gleichheitsbeziehung in $\mathbb{R}$ hat also die folgenden Eigenschaften:

- 1. Reflexivität:** $x = x$ für jede reelle Zahl x (mit anderen Worten: jede reelle Zahl ist gleich sich selbst).
- 2. Symmetrie:** Wenn x und y zwei reelle Zahlen sind, für die gilt: $x = y$, dann ist $y = x$.
- 3. Transitivität:** Wenn x, y, z drei reelle Zahlen sind, für die gilt: $x = y$ und $y = z$, dann ist $x = z$.

Im Allgemeinen versteht man unter Gleichung eine Aussage, wo zwischen zwei mathematische Ausdrücke ein Ist-gleich-Zeichen ($=$) geschrieben wird, d. h., dass die Ausdrücke denselben Wert haben.

Bei einer Gleichung wird der Ausdruck, der links vom Gleichheitszeichen steht, als *linkes Gleichungsglied* bezeichnet, und der Ausdruck, der rechts vom Gleichheitszeichen steht, als *rechtes Gleichungsglied*.

Beispiel: $\underbrace{6 \cdot 5 - \sqrt{16}}_{\text{linkes Glied}} : 2 = \underbrace{3 \cdot 6 + 5 \cdot 2}_{\text{rechtes Glied}}.$

Bemerkungen

1. Eine Aussage (eine Behauptung) mit einem Gleichheitszeichen kann wahr oder falsch sein.

Beispiele: $2 + 8 = 13 - \sqrt{9}$ ist wahr und $15\sqrt{2} : 3 = 2 \cdot 4$ ist falsch.

2. In bestimmten Fällen sind einige der Glieder einer Gleichung reelle Zahlen, die durch Buchstaben dargestellt werden, wie z. B. a, b, c, x, y, z usw. Diese Buchstaben, die Variablen genannt werden, treten an die Stelle von reellen Zahlen. In solchen Fällen muss die Menge der Werte, die die Variablen annehmen können, angegeben werden. Wird die Menge nicht spezifiziert, ist die Menge der Werte der Variablen $\mathbb{R}$.

Beispiele:

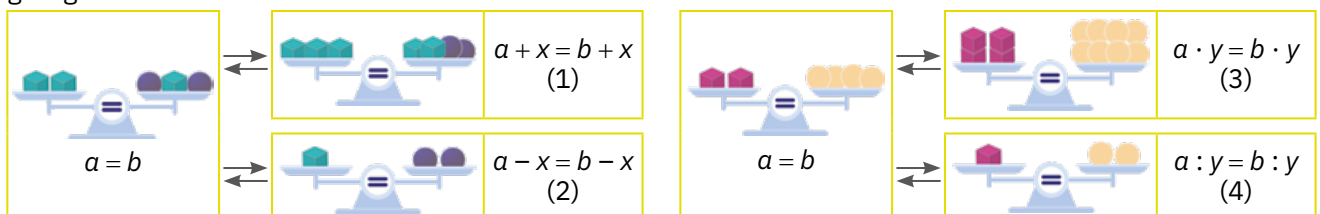
- $\sqrt{a^2} - b + c = a - (b - c)$, wobei $a, b, c \in \mathbb{N}$;
- $a + a^2 = a^3 + a^4$, wobei $a \in \{-1, 0, 1\}$;
- $a \cdot b + 3 = \sqrt{64} - 5 + b \cdot a$, wobei $a, b, c \in \mathbb{Q}$;
- $x^2 + 2x + 1 = 1 + x(x + 2)$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

Umwandlung einer Gleichung in eine äquivalente Gleichung

Mathe im Alltag

Die folgenden schematischen Zeichnungen zeigen, dass ein Würfel so viel wiegt wie zwei Kugeln.

Zwei beliebige Würfel auf diesen Bildern haben die gleiche Masse; ebenso sind die Massen zweier beliebiger Kugeln gleich.



- Fügt man beiden Waagschalen je einen Würfel hinzu, bleibt die Waage im Gleichgewicht (Beziehung (1)).
- Nimmt man aus beiden Waagschalen je einen Würfel heraus, bleibt die Waage im Gleichgewicht (Beziehung (2)).
- Verdoppelt man die Anzahl der Würfel auf der ersten Waagschale und die Anzahl der Kugeln auf der zweiten Waagschale, bleibt das Gleichgewicht erhalten (Beziehung (3)).
- Wenn wir die Anzahl der Würfel auf der ersten Waagschale halbieren und die Anzahl der Kugeln auf der zweiten Waagschale halbieren, bleibt das Gleichgewicht erhalten (Beziehung (4)).

Aus den vorangegangenen Bildern können wir ersehen, dass, wenn a, b, x reelle Zahlen sind, $a = b$ ist, dann gilt die Gleichung $a + x = b + x$, aber auch umgekehrt: wenn die Gleichung $a + x = b + x$ gilt, dann gilt die Gleichung $a = b$.

Wir sagen, dass die Gleichungen $a = b$ und $a + x = b + x$ äquivalent sind, und schreiben $a = b \Leftrightarrow a + x = b + x$. Das Zeichen $\Leftrightarrow$ bedeutet „äquivalent“.

Merke dir!

Wenn eine Gleichung gegeben ist, erhält man äquivalente Gleichungen durch die folgenden Umformungen:

- die gleiche reelle Zahl von beiden Gliedern der Gleichung addieren oder subtrahieren;
- Multiplizieren oder Dividieren beider Glieder der Gleichung mit einer von null verschiedenen reellen Zahl;
- Erheben zur Potenz mit von null verschiedenem ganzen Exponenten beider Glieder einer Gleichung zwischen zwei positiven Zahlen;
- Ziehen der Quadratwurzel aus beiden Gliedern einer Gleichung zwischen nichtnegativen reellen Zahlen.

Mit anderen Worten: Zwischen der Gleichheitsbeziehung und den Operationen der reellen Zahlen bestehen folgende Äquivalenzen, die als *Kompatibilitätseigenschaften* bezeichnet werden:

Allgemeine Regel	Beispiel
$a = b \Leftrightarrow a + x = b + x$, unabhängig von $x \in \mathbb{R}$	$a = b \Leftrightarrow a + \sqrt{5} = b + \sqrt{5}$
$a = b \Leftrightarrow a - x = b - x$, unabhängig von $x \in \mathbb{R}$	$a = b \Leftrightarrow a - 3,7 = b - 3,7$
$a = b \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x$, unabhängig von $x \in \mathbb{R}$, mit $x \neq 0$	$a = b \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{3} = b \cdot \sqrt{3}$
$a = b \Leftrightarrow a : x = b : x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, mit $x \neq 0$	$a = b \Leftrightarrow \frac{a}{-25} = \frac{b}{-25}$
Wenn $a > 0$, $b > 0$ und $n \in \mathbb{Z}^*$, dann $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$.	$n + 2 = m + 1 \Leftrightarrow (n + 2)^2 = (m + 1)^2$, $n, m \in \mathbb{N}$
Wenn $a \geq 0$ und $b \geq 0$ ist, dann ist $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.	$n + 5 = m - 1 \Leftrightarrow \sqrt{n + 5} = \sqrt{m - 1}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$

Merke dir!

Aus zwei Gleichungen lassen sich neue Gleichungen wie folgt ableiten:

- wenn die beiden Gleichungen Glied für Glied addiert oder subtrahiert werden;
- wenn die beiden Gleichungen Glied für Glied multipliziert oder dividiert werden (falls möglich).

Mit anderen Worten: Für beliebige reelle Zahlen a, b, c und d gilt:

- wenn $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$, dann $\begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \\ a \cdot c = b \cdot d \end{cases}$;
- wenn $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$, wobei $c, d \neq 0$, dann $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Beispiele

Wenn x, y, z, t, u, v reelle Zahlen sind, für die gilt: $x + y = 35$, $u - v = -25$ und $z - t = -5$, dann:

- $(x + y) + (u - v) = 35 + (-25) \Leftrightarrow x + y + u - v = 10$
- $(x + y) - (u - v) = 35 - (-25) \Leftrightarrow x + y - u + v = 60$
- $(x + y) \cdot (z - t) = 35 \cdot (-5) \Leftrightarrow (x + y) \cdot (z - t) = -175$
- $\frac{x + y}{z - t} = \frac{35}{-5} \Leftrightarrow \frac{x + y}{z - t} = -7$
- $\frac{u - v}{z - t} = \frac{-25}{-5} \Leftrightarrow \frac{u - v}{z - t} = 5$

Identitäten

Merke dir!

Eine Aussage mit dem Gleichheitszeichen und einer oder mehreren Variablen (reelle Zahlen, die durch Buchstaben dargestellt werden), die für jeden Wert der Variablen in der Wertemenge wahr ist, wird als *Identität* bezeichnet.

Beispiele

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, wobei a, b, c reelle Zahlen sind, ist eine Identität.
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, wobei a und b reelle Zahlen sind, ist eine Identität.
- Die Aussage $a + \sqrt{25} = 7$ ist keine Identität, da z. B. für $a = 4$, die Aussage $4 + 5 = 7$ falsch ist.



Gelöste Übungen und Aufgaben



1. Betrachtet die Zahlen: $a = 1,5$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = \sqrt{12}$. Bestimmt, ohne die Operationen auszuführen, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a. $a + 3 = c + 3$; b. $\frac{a}{2} = \frac{c}{3}$; c. $a + b = c + d$; d. $a : b = c : d$; e. $-\frac{3}{2}b = -\frac{3}{2}d$.

Lösung:

Beachtet zunächst, dass $a = c$ und $b = d$ ist.

- a. Wir addieren 3 zu beiden Gliedern von $a = c$ und erhalten $a + 3 = c + 3$.
 b. Dividiert man beide Glieder von $a = c$ durch 2, erhält man $\frac{a}{2} = \frac{c}{2}$. Da $c \neq 0$, ist, haben wir $\frac{c}{2} \neq \frac{c}{3}$, also $\frac{a}{2} \neq \frac{c}{3}$.
 c. Da $a = c$ und $b = d$ ist, ist $a + b = c + d$.
 d. Da $a = c$ und $b = d$ ist und b und d von null verschieden sind, folgt daraus, dass $a : b = c : d$.
 e. Wir multiplizieren beide Glieder der Gleichung $-\frac{3}{2}$ mit $b = d$ und erhalten $-\frac{3}{2}b = -\frac{3}{2}d$.

Die Aussagen **a**, **c**, **d** und **e** sind also wahr und **b** ist falsch.

2. Betrachtet die reellen Zahlen a , b und c so, dass $a + 2b = 5$ und $b - 3c = -7$. Bestimmt:

a. $a + 3b - 3c$; b. $a + b + 3c$; c. $3a + 8b - 6c$; d. $a + 6c$.

Lösung:

- a. Addiert man die beiden Gleichungen Glied für Glied, erhält man $(a + 2b) + (b - 3c) = 5 + (-7)$, d. h., $a + 3b - 3c = -2$.
 b. Subtrahiert man die beiden Gleichungen Glied für Glied, erhält man $(a + 2b) - (b - 3c) = 5 - (-7)$, d. h., $a + b + 3c = 12$.
 c. Multipliziert man die Glieder der ersten Gleichung mit 3, erhält man $3a + 6b = 15$. Multipliziert man die Glieder der zweiten Gleichung mit 2, erhält man $2b - 6c = -14$. Dann addiert man die beiden Gleichungen Glied für Glied: $(3a + 6b) + (2b - 6c) = 15 + (-14)$, was $3a + 8b - 6c = 1$ ergibt.
 d. Multipliziert man die Glieder der zweiten Gleichung mit 2, erhält man $2b - 6c = -14$. Dann subtrahiert man die Gleichungen $a + 2b = 5$ und $2b - 6c = -14$. Man erhält $(a + 2b) - (2b - 6c) = 5 - (-14)$, also $a + 6c = 19$.
 3. Zeigt, dass die Gleichung $\sqrt{(n+2)^2} + \sqrt{16} = 2(n+3) - n$ eine Identität ist, unabhängig davon, wie groß die natürliche Zahl n ist.

Lösung:

Da $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt daraus, dass $n + 2 > 0$ ist, also $|n + 2| = n + 2$. Die linke Seite der Gleichung wird umgeschrieben:

$$\sqrt{(n+2)^2} + \sqrt{16} = |n+2| + 4 = n+2+4 = n+6 \quad (1).$$

Wenn man auf der rechten Seite der Gleichung rechnet, erhält man $2(n+3) - n = 2n+6 - n = n+6 \quad (2)$.

Aus den Beziehungen (1) und (2) ergibt sich unter Anwendung der Transitivitätseigenschaft der Gleichheitsbeziehung: $\sqrt{(n+2)^2} + \sqrt{16} = 2(n+3) - n$, unabhängig von $n \in \mathbb{N}$.

Vorgeschlagene Aufgaben



1. Es seien die reellen Zahlen a und b , sodass $a + b = 2$ ist. Multipliziert beide Glieder der gegebenen Gleichung mit 2. Welche Gleichung ergibt sich?
 2. Gegeben ist die Gleichung $a - 2b = 5$, wobei a und b reelle Zahlen sind. Schreibt die Gleichungen auf, die man erhält, wenn man beide Teile der Gleichung der Reihe nach mit folgenden Zahlen multipliziert:
 a. 2; b. 3; c. 4; d. 10; e. -2; f. -5.
 3. Betrachtet die reellen Zahlen x und y so, dass $2x + 2y = 8$ ist. Bestimmt:
 a. $x + y$; b. $3x + 3y$; c. $5x + 5y$; d. $-x - y$; e. $-2x - 2y$; f. $-9x - 9y$.
 4. Entscheidet, ob die folgenden Gleichungen wahr oder falsch sind:
 a. $\sqrt{16} = 4$; b. $\sqrt{25} = -5$; c. $\frac{1}{2} = 0,25$; d. $-\frac{3}{4} = -0,75$; e. $1,(2) = \frac{10}{9}$; f. $\sqrt{324} = 18$.

5. Betrachtet die Zahlen: $a = \frac{1}{3}$, $b = \sqrt{18}$, $c = 0, (3)$, $d = 3\sqrt{2}$. Bestimmt, ohne die Operationen auszuführen, ob die folgenden Gleichungen wahr oder falsch sind:
 a. $a + 2 = c + 2$; b. $b - 5 = c - 5$; c. $3a = 4c$; d. $a + b = c + d$; e. $b : 5 = c : 5$.
6. Es seien die reellen Zahlen a, b, c , so, dass $a + b = 3$, $b + c = 5$ und $a + c = 8$. Bestimmt:
 a. $a + 2b + c$; b. $2a + 2b + 2c$; c. $a + b + c$; d. $a - c$; e. $b - c$.
7. Sei die Gleichung $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Schreibt zu dieser Gleichung drei äquivalente Gleichungen. Addiert, multipliziert bzw. teilt die beiden Glieder der gegebenen Gleichung mit derselben von null verschiedenen reellen Zahl.
8. Begründet die folgenden Äquivalenzen mit den Eigenschaften der Gleichheitsbeziehung:
 a. $2x - 5 = 11 \Leftrightarrow 2x = 11 + 5 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$;
 b. $\frac{x}{2} - 1 = 7 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 7 + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 8 \Leftrightarrow x = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow x = 16$;
 c. $4x - 5 = 2x + 9 \Leftrightarrow 4x - 2x = 9 + 5 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 14 : 2 \Leftrightarrow x = 7$.
9. Es seien die reellen Zahlen x und y so, dass $x + y = 4$ und $x - y = 2$. Zeigt, dass $x = 3$.
10. Zeigt, dass, wenn x und y reelle Zahlen sind, sodass $0,1x - 0,2y = 0$ ist, dann ist $x = 2y$.
11. Wenn a und b reelle Zahlen sind, sodass $3a + 2b + 12 = 4x$ und $a + 2b = 2x$ ist, zeigt, dass $a + 6 = x$ ist.
12. Beweist die Identität $\sqrt{(2n+3)^2} + \sqrt{4} = 2(n+3) - 1$, unabhängig davon, wie groß die natürliche Zahl n ist.

Test

1. Entscheidet, ob die folgenden Gleichungen wahr oder falsch sind:
 a. $\frac{9}{2} = 9,2$; b. $\sqrt{49} = 7$; c. $2\sqrt{5} = 5\sqrt{2}$; d. $-3\sqrt{2} = -\sqrt{18}$. (3 Pkte.)
2. Wenn a, b, c reelle Zahlen sind, sodass $a + b = 8$, $b + c = 11$ und $a + c = 9$, dann ist $a + b + c$ gleich:
 A. 10; B. 12; C. 14; D. 16. (3 Pkte.)
 Schreibt den Buchstaben der richtigen Antwort in eure Hefte.
3. Es seien die reellen Zahlen x, y, z , sodass $x + 2y = 5$, $y + 2z = 10$ und $2x + z = 6$. Bestimmt:
 a. $3x + 3y + 3z$; b. $x + y - 2z$; c. $4y - z$; d. $2x - y - z$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



2. Lektion: Gleichungen der Form $ax + b = 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge einer Gleichung. Äquivalente Gleichungen

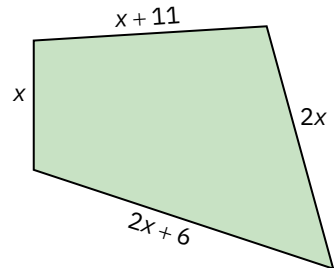
Schlüsselwörter

Gleichung	äquivalent	Lösung	Unbekannte	Koeffizient	freies Glied
-----------	------------	--------	------------	-------------	--------------

Problemstellung

Ein Innenhof hat die Form des Vierecks in der nebenstehenden Abbildung. Die Seitenlängen des in der Abbildung dargestellten Vierecks sind in Metern angegeben.

- Bestimmt die natürliche Zahl x , wenn bekannt ist, dass die Länge des Zauns um den Hof 83 Meter beträgt.
- Bestimmt die rationale Zahl x , wenn ihr wisst, dass die Länge des Zauns um den Innenhof 94 Meter beträgt. Ist x eine natürliche Zahl?
- Gibt es eine reelle Zahl x , sodass die Länge des Zauns um den Hof 11 Meter beträgt?



Lösung:

Der Umfang des Quadrats ist gleich $x + (x + 11) + 2x + (2x + 6) = 6x + 17$ (Meter) und entspricht der Länge des Zauns.

- Wenn die Länge des Zauns 83 Meter beträgt, ergibt sich die Beziehung $6x + 17 = 83$. Dann ist $6x = 83 - 17$, d. h., $6x = 66$, also $x = 11$, und 11 ist eine natürliche Zahl.
- Wenn die Länge des Zauns 94 Meter beträgt, ergibt sich $6x + 17 = 94$, also $6x = 77$, d. h., $x = \frac{77}{6}$, das nicht eine natürliche Zahl ist.
- Wir erhalten die Beziehung $6x + 17 = 11$, was bedeutet, dass $6x = -6$ ist, also $x = -1$, was unmöglich ist, weil x , das eine Länge darstellt, eine positive Zahl ist. Es gibt also keine (notwendigerweise positive) reelle Zahl, bei der die Länge des Zauns gleich 11 Meter ist.

Was stellen wir fest?

Um die Lösung der Aufgabe zu bestimmen, haben wir eine Gleichung gelöst. Bei der Ermittlung der endgültigen Antwort war es notwendig, die Menge zu berücksichtigen, in der die Gleichung gelöst wird. Beachtet, dass eine Gleichung nicht immer Lösungen hat.

Die Gleichung $ax + b = 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge einer Gleichung

Merke dir!

Eine Gleichung der Form $ax + b = 0$, wobei a und b reelle Zahlen sind, $a \neq 0$, wird als *Gleichung ersten Grades* mit einer Unbekannten bezeichnet.

Die Zahl x wird als die *Unbekannte der Gleichung* bezeichnet, und die reellen Zahlen a und b werden als *Koeffizienten* bezeichnet: a ist der Koeffizient der Unbekannten, und b wird als *freies Glied* bezeichnet.

Der Name Gleichung ersten Grades kommt daher, dass die Unbekannte x in der Gleichung mit dem Exponenten 1 erscheint.

Beispiele

- Die Gleichung $2x + 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, ist eine Gleichung ersten Grades mit der Unbekannten x . Der Koeffizient der Unbekannten ist 2, und das freie Glied ist 5.
- Die Gleichheit $2 \cdot 4 - 1 = 7$ ist keine Gleichung.

Merke dir!

Eine reelle Zahl wird als *Lösung* einer Gleichung bezeichnet, wenn das Ersetzen der Unbekannten durch diese Zahl in der gegebenen Gleichung zu einer wahren Aussage führt.

Eine Gleichung in einer Menge von reellen Zahlen zu lösen, bedeutet, alle Lösungen zu bestimmen.

Diese Lösungen bilden die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung, die gewöhnlich mit S bezeichnet wird.

Wenn nach einer Gleichung eine Angabe der Form $x \in M$ folgt, wobei $M \subset \mathbb{R}$ ist, gibt dies die Menge an, in der sie unbekannte Werte annimmt. Wir sagen, dass die gegebene Gleichung auf der Menge M definiert ist oder dass sie auf der Menge M gelöst wird. Wir sagen auch, dass M der Definitionsbereich der Gleichung ist.

Wird keine Angabe gemacht, ist $M = \mathbb{R}$.

Beispiel

Welche der folgenden Gleichungen lässt die Lösung -4 zu?

1. $3x + 12 = 0, x \in \{-5, -4, -1, 0\}$.

2. $\frac{3}{4}x + 3 = 0, x \in \mathbb{R}$.

3. $-x + 4 = 0, x \in \mathbb{Z}$.

Antwort:

1. $3 \cdot (-4) + 12 = 0 \Leftrightarrow -12 + 12 = 0$, wahr, also ist -4 die Lösung.

2. $\frac{3}{4} \cdot (-4) + 3 = 0 \Leftrightarrow -3 + 3 = 0$, wahr, also ist -4 die Lösung.

3. $-(-4) + 4 = 0 \Leftrightarrow 4 + 4 = 0 \Leftrightarrow 8 = 0$, falsch, also ist -4 keine Lösung.

Algorithmus zum Lösen der Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten

Betrachten wir die Gleichung $ax + b = 0$, wobei a und b reelle Zahlen sind, $a \neq 0$.

Schritt 1: Zieht b von beiden Gliedern der Gleichung ab und bringt die Gleichung in die Form $ax = -b$ (mit anderen Worten: Man lässt die Unbekannte im linken Glied stehen und bringt den freien Term ins rechte Glied der Gleichung, wobei das Vorzeichen geändert wird).

Schritt 2: Man teilt die beiden Glieder der Gleichung $ax = -b$ durch a und findet die Lösung $x = -\frac{b}{a}$.

Schritt 3: Man schreibt die Menge der Lösungen der Gleichung auf: $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$.

Grundsätzlich finden die folgenden Äquivalenzen statt:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Beispiele: 1. $2x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{2} \Leftrightarrow x = -3 \Leftrightarrow S = \{-3\}$.

2. $\sqrt{3} \cdot x - 3\sqrt{12} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x = 3\sqrt{12} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 3 \cdot \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 6 \Leftrightarrow S = \{6\}$.

Äquivalente Gleichungen

Merke dir!

Zwei Gleichungen, die auf derselben Menge definiert sind, werden als äquivalent bezeichnet, wenn sie dieselben Lösungen haben. Um eine Gleichung zu erhalten, die einer gegebenen Gleichung äquivalent ist, können wir die folgenden Regeln anwenden:

- wir bringen, mit verändertem Vorzeichen, Terme von einer Seite der Gleichung auf die andere;
- wir addieren/subtrahieren die gleiche Zahl von beiden Seiten der Gleichung;
- wir multiplizieren/teilen beide Seiten der Gleichung mit einer von null verschiedenen reellen Zahl.

Beispiele

1. Sind die Gleichungen $2x - 4 = 0, x \in \mathbb{R}$, und $3x - 6 = 0, x \in \mathbb{R}$, äquivalent?

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow S = \{2\}.$$

$$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow S = \{2\}.$$

Wir stellen fest, dass die beiden Gleichungen auf der gleichen Menge (auf $\mathbb{R}$) definiert sind und die gleiche Lösungsmenge haben, sodass die Gleichungen äquivalent sind.

2. Sind die Gleichungen $\sqrt{2}x - \sqrt{6} = 0, x \in \mathbb{R}$, und $\sqrt{3}x + 9 = 0, x \in \mathbb{R}$, äquivalent?

$$\sqrt{2}x - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = \sqrt{6} : \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \Leftrightarrow S = \{\sqrt{3}\}.$$

$$\sqrt{3}x + 9 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x = -9 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} \cdot -9}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -3\sqrt{3} \Leftrightarrow S = \{-3\sqrt{3}\}.$$

Wir stellen fest, dass die beiden Gleichungen auf derselben Menge, nämlich auf $\mathbb{R}$, definiert sind, aber sie haben nicht dieselbe Lösungsmenge. Folglich sind diese Gleichungen nicht äquivalent.



Gleichungen, die auf $ax + b = 0$ reduzierbar sind**Merke dir!**

Häufig findet man Gleichungen, in denen die Unbekannte x nur in der ersten Potenz vorkommt, die aber nicht die Form $a \cdot x + b = 0$ (1) oder $a \cdot x = b$ (2) haben.

Mithilfe der Eigenschaften der Gleichheitsbeziehung kann man zeigen, dass einige dieser Gleichungen einer Gleichung der Form (1) oder (2) entsprechen. Wir werden sagen, dass diese Gleichungen auf Gleichungen ersten Grades *reduzierbar* sind.

Um eine Gleichung zu lösen, die auf eine Gleichung ersten Grades *reduzierbar* ist, geht man folgendermaßen vor:
Schritt 1: Bringt die Gleichung in eine einfachere Form, indem ihr verschiedene arithmetische Tricks anwendet (auf denselben Nenner bringen, Nenner weglassen, Klammern auflösen usw.).

Schritt 2: Trennt die Terme, wobei die Terme, die die Unbekannte enthalten, in der Regel auf der linken Seite und die freien Terme (die die Unbekannte nicht enthalten) auf der rechten Seite stehen, und bringt die Gleichung in die Form $a \cdot x = b$.

Schritt 3: Bestimmt die Lösung(en) und schreibt die Lösungsmenge der Gleichung auf.

Schließlich kann die Lösung anhand der ursprünglichen Gleichung überprüft werden, um das gefundene Ergebnis zu rechtfertigen.

Beispiel

Um die Gleichung $\frac{x-2}{3} + \frac{1}{2} = x - 0,5 - \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ in der Menge der den ganzen Zahlen zu lösen, geht man wie folgt vor:

Schritt 1: Man bringt die Gleichung mithilfe verschiedener Rechenricks in eine einfachere Form.

a. Man wandelt die Terme in gewöhnliche Brüche um und bringt die Brüche auf denselben Nenner:

$$\frac{x-2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{x}{1} - \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{x}{1} - \frac{1}{2} - \frac{3}{1} \Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6x}{6} - \frac{3}{6} - \frac{18}{6}.$$

b. Man multipliziert beide Glieder der Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner und lässt die Nenner weg:

$$\frac{2(x-2)}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6x}{6} - \frac{3}{6} - \frac{18}{6} \quad | \cdot 6 \Leftrightarrow 2(x-2) + 3 = 6x - 3 - 18.$$

c. Man hebt die Klammern auf, indem man die Distributivität der Multiplikation bezüglich der Subtraktion nutzt, und führt die Rechnungen durch: $2(x-2) + 3 = 6x - 3 - 18 \Leftrightarrow 2x - 4 + 3 = 6x - 21 \Leftrightarrow 2x - 1 = 6x - 21$.

Schritt 2: Man bringt auf die linke Seite die Terme, die die Unbekannte enthalten, und auf die rechte Seite die Terme, die die Unbekannte nicht enthalten (die freien Terme), und schreibt die Gleichung in der Form $a \cdot x = b$: $2x - 1 = 6x - 21 \quad | +1 \Leftrightarrow 2x = 6x - 20 \quad | -6x \Leftrightarrow -4x = -20$.

Schritt 3: Man bestimmt die Lösung(en) und schreibt die Lösungsmenge der Gleichung auf, wobei die Menge berücksichtigt wird, in der die Gleichung gelöst wird: $-4x = -20 \quad | :(-4) \Leftrightarrow x = \frac{-20}{-4} \Leftrightarrow x = 5$.

Da $x = 5$ und $5 \in \mathbb{Z}$ ist, ist die Lösungsmenge der Gleichung in der Aussage $S = \{5\}$.

Wir führen die Überprüfung durch (dies hilft uns, mögliche Fehler zu korrigieren).

$$\frac{5-2}{3} + \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{3}{3} + \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} - \frac{3}{1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad (\text{wahr}).$$

Bemerkungen

Es gibt Situationen, in denen wir eine Gleichung der Form $ax + b = 0$ erhalten, ohne zu wissen, ob die reelle Zahl a gleich null ist.

1. Wenn $a \neq 0$ ist, erhalten wir durch äquivalente Transformationen nacheinander: $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, was eine reelle Zahl ist und die einzige Lösung der Gleichung ist. Wir schreiben $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.
2. Wenn $a = 0$ ist, wird die Gleichung $0 \cdot x + b = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -b$, mit $b \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
 - a. Wenn $b = 0$ ist, wird die Gleichung $0 \cdot x = 0$, was für jede reelle Zahl x gilt, also $S = \mathbb{R}$;
 - b. Wenn $b \neq 0$ ist, gilt die Beziehung $0 \cdot x = -b$ nicht für jede reelle Zahl x , und dann ist $S = \emptyset$.

Beispiele

Wir lösen die folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{3} \cdot x - 2 = 10$;

2. $2(x - \sqrt{9}) = 2x - 6$;

3. $2(x - 3) = 3x - 8 - x$.

Lösung:

1. $\sqrt{3} \cdot x - 2 = 10 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow S = \{4\sqrt{3}\}.$
2. $2(x - \sqrt{9}) = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - 6 = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - 2x = 6 - 6 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \Leftrightarrow S = \mathbb{R}.$
3. $2(x - 3) = 3x - 8 - x \Leftrightarrow 2x - 6 = 2x - 8 \Leftrightarrow 2x - 2x = 6 - 8 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -2 \Leftrightarrow S = \emptyset.$

Schätzen der Lösung einer Gleichung

Die Lösung einer Gleichung zu schätzen, bedeutet, sich der Lösung anzunähern oder, in einem äquivalenten Ausdruck, die Größenordnung oder den Wert der Lösung mit verschiedenen Methoden zu schätzen. Schätzungen werden häufig in der Geschäftswelt und in der Wirtschaft verwendet, wenn zu viele Variablen beteiligt sind, um zu bestimmen, wie sich komplexere Situationen entwickeln werden.

Beispiele

1. Betrachten wir die Gleichung $4x - \sqrt{9\,999} = 0$. Diese wird umgeschrieben in $4x = \sqrt{9\,999}$, wobei $x = \frac{\sqrt{9\,999}}{4}$.

Da $\sqrt{9\,999} \approx \sqrt{10\,000} = 100$ ist, schätzen wir, dass die Lösung x der Gleichung ungefähr gleich ist mit $\frac{100}{4}$, d. h., $x \approx 25$.

Wir finden, ggf. mithilfe des Taschenrechners, heraus, dass $\frac{\sqrt{9\,999}}{4} = 24,9987\dots$, was bestätigt, dass die Schätzung dem genauen Wert der Lösung recht nahe kommt.

2. Die Gleichung $1998x = 40\,007$ hat die Lösung $x = \frac{40\,007}{1998}$. Wir können schreiben $x = \frac{40\,000 + 7}{2\,000 - 2}$.

Wir stellen fest, dass die Zahlen 2 und 7 viel kleiner sind als 2 000 und 40 000. Wir können erkennen, dass die Werte 2 und 7 *vernachlässigbar* sind (in Größenordnungen) im Vergleich zu 2 000 und 40 000, also

$$x = \frac{40\,000 + 7}{2\,000 - 2} \approx \frac{40\,000}{2\,000} = 20.$$

Diese Schätzung ist nahe genug am exakten Wert der Lösung, denn $\frac{40\,007}{1998} \approx 20,0235\dots$

**Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken**

1. Löst die Gleichungen:

a. $4(x + 3) - 10 = 2x + 12;$

b. $2x - 1 = 0, x \in \mathbb{Q};$

c. $\sqrt{2}x + \sqrt{18} = \sqrt{32}, x \in \{-2, -1, 1, 2\}.$

Lösung:

a. $4(x + 3) - 10 = 2x + 12 \Leftrightarrow 4x + 12 - 10 = 2x + 12 \Leftrightarrow 4x + 2 = 2x + 12 \Leftrightarrow 4x - 2x = 12 - 2 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5 \Leftrightarrow S = \{5\}.$

Probe: $4(5 + 3) - 10 = 2 \cdot 5 + 12 \Leftrightarrow 4 \cdot 8 - 10 = 22 \Leftrightarrow 22 = 22$ (wahr).

b. $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$

Probe: $2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$ (wahr).

c. $\sqrt{2}x + \sqrt{18} = \sqrt{32} \Leftrightarrow \sqrt{2}x + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} : \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1.$
Da $1 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow S = \{1\}.$

Probe: $\sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{18} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$ (wahr).

2. Löst die Gleichungen.

a. $2(x + 3) - 5 = x + 6;$

b. $\frac{5x - 3}{4} - \frac{3x - 1}{3} = 1 \frac{5}{12} + \frac{4x - 1}{6};$

c. $|2x + 3| = 5.$

Lösung:

a. $2(x + 3) - 5 = x + 6 \Leftrightarrow 2x + 6 - 5 = x + 6 \Leftrightarrow 2x + 1 = x + 6 \Leftrightarrow 2x - x = 6 - 1 \Leftrightarrow x = 5 \Leftrightarrow S = \{5\}.$

Probe: $2(5 + 3) - 5 = 5 + 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 8 - 5 = 11 \Leftrightarrow 11 = 11$ (wahr).



b. $\frac{5x-3}{4} - \frac{3x-1}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{12} + \frac{4x-1}{6} \Leftrightarrow \frac{15x-9}{12} - \frac{12x-4}{12} = \frac{17}{12} + \frac{8x-2}{12} \Leftrightarrow (15x-9) - (12x-4) = 17 + (8x-2) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 15x-9-12x+4=17+8x-2 \Leftrightarrow 3x-5=8x+15 \Leftrightarrow 3x-8x=15+5 \Leftrightarrow -5x=20 \Leftrightarrow x=-4 \Leftrightarrow S=\{-4\}.$
Probe: $\frac{5 \cdot (-4)-3}{4} - \frac{3 \cdot (-4)-1}{3} = \frac{17}{12} + \frac{4 \cdot (-4)-1}{6} \Leftrightarrow \frac{-23}{4} - \frac{-13}{3} = \frac{17}{12} + \frac{-17}{6} \Leftrightarrow \frac{-69}{12} + \frac{52}{12} = \frac{17}{12} + \frac{-34}{12} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\frac{17}{12} = -\frac{17}{12} \text{ (wahr).}$

c. $|2x+3|=5 \Leftrightarrow 2x+3=5 \text{ oder } 2x+3=-5 \Leftrightarrow 2x=5-3 \text{ oder } 2x=-5-3 \Leftrightarrow 2x=2 \text{ oder } 2x=-8 \Leftrightarrow x=1 \text{ oder } x=-4 \Rightarrow S=\{-4; 1\}.$

Probe: $|2 \cdot (-4) + 3| = 5 \Leftrightarrow |-8 + 3| = 5 \Leftrightarrow |-5| = 5 \text{ (wahr).}$
 $|2 \cdot 1 + 3| = 5 \Leftrightarrow |2 + 3| = 5 \Leftrightarrow |5| = 5 \text{ (wahr).}$

3. Löst die Gleichung $\frac{5}{x-3} = \frac{2}{x}.$

Lösung:

Es gelten die Bedingungen: $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ und $x \neq 0$. Da wir die Menge, in der die Gleichung gelöst wird, nicht angeben, ziehen wir $\mathbb{R}$ in Betracht. Aus den beiden Bedingungen leiten wir ab, dass $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$. Wir haben:

$$\frac{5}{x-3} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 5x = 2 \cdot (x-3) \Leftrightarrow 5x = 2x-6 \Leftrightarrow 5x-2x=-6 \Leftrightarrow 3x=-6 \Leftrightarrow x=-2.$$

Da $x=-2$ und $-2 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$ ist, folgern wir, dass $S=\{-2\}$.

4. Löst die Gleichung $(3x-6)(2x+5)(5x+20)(\sqrt{3}x-3)=0$ in der Menge:

- a. $\mathbb{N}$; b. $\mathbb{Z}$; c. $\mathbb{Q}$; d. $\mathbb{R}$.

Lösung:

Wir wissen, dass ein Produkt von Faktoren dann und nur dann gleich 0 ist, wenn (mindestens) einer der Faktoren 0 ist.

$$(3x-6)(2x+5)(5x+20)(\sqrt{3}x-3)=0 \Leftrightarrow 3x-6=0 \text{ oder } 2x+5=0 \text{ oder } 5x+20=0 \text{ oder } \sqrt{3}x-3=0 \Leftrightarrow 3x=6$$

$$\text{oder } 2x=-5 \text{ oder } 5x=-20 \text{ oder } \sqrt{3}x=3 \Leftrightarrow x=2 \text{ oder } x=-2,5 \text{ oder } x=-4 \text{ oder } x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \{-4; -2,5; \sqrt{3}; 2\}.$$

- a. In $\mathbb{N}$, $S=\{2\}$. b. In $\mathbb{Z}$, $S=\{-4; 2\}$. c. In $\mathbb{Q}$, $S=\{-4; -2,5; 2\}$. d. In $\mathbb{R}$, $S=\{-4; -2,5; \sqrt{3}; 2\}$.

Vorgeschlagene Aufgaben



1. Gebt an, welche der folgenden Beziehungen Gleichungen sind:

- a. $x-8=0$; b. $x+9$; c. $2 \cdot 3+8=14$; d. $x+6 < 10$; e. $\frac{x}{2}+5=0$.

2. Übertrag in eure Heft und füllt dann die Tabelle nach dem Muster aus:

Gleichung	$3y-1=0$	$2x+3=0$	$-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}=0$	$b+1,7=0$	$\sqrt{5}x-4\sqrt{2}=0$
Unbekannte	y				
Koeffizient der Unbekannten	3				
Freies Glied	-1				

3. Schreibt die Gleichung $ax+b=0$ für:

- a. $a=3, b=1$; b. $a=-2, b=5$; c. $a=\frac{5}{4}, b=-2$; d. $a=\sqrt{3}, b=1,4$; e. $a=-\frac{2}{3}, b=\sqrt{6}$.

4. Nennt zwei Beispiele für:

- a. Gleichungen mit dem Koeffizienten der Unbekannten gleich 2;
b. Gleichungen mit dem freien Glied gleich -3;
c. Gleichungen mit entgegengesetzten Koeffizienten.

5. Prüft, ob:

- a. die Zahl 1 die Lösung der Gleichung $2x-2=0$ ist;
b. die Zahl 1,5 eine Lösung der Gleichung $4x-5=0$ ist;

- c. die Zahl -2 eine Lösung der Gleichung $3x + 6 = 0$ ist; d. die Zahl $\frac{1}{2}$ die Lösung der Gleichung $4x - 4 = 0$ ist;
e. die Zahl $\sqrt{5}$ eine Lösung der Gleichung $\sqrt{20}x = 10$ ist.

6. Gebt an, welche der folgenden Gleichungen die Lösung 3 zulassen:

- a. $3x = 9$; b. $5y - 3 = 12$; c. $\frac{y}{3} + 0,5 = 2$; d. $-\sqrt{3}x + \sqrt{27} = 0$; e. $\frac{x}{4} + \frac{1}{4} = -1$.

7. Löst die Gleichungen:

- a. $2x = 6, x \in \{-2, -1, 0, 3\}$; b. $y + 2 = 0, y \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; c. $3z - 4 = 0, z \in \mathbb{N}$;
d. $-x + 0,4 = 0, x \in \mathbb{Q}$; e. $\sqrt{2}a - \sqrt{18} = 0, a \in \mathbb{N}$; f. $0,5b - \sqrt{2} = 0, b \in \mathbb{R}$.

8. Löst die Gleichungen und überprüft die Lösung:

- a. $2x + 5 = x + 7$; b. $x + 8 = 12 - x$; c. $5 - 3x = 12 - 4x$;
d. $2x + 1 + x = 4x - 10$; e. $2x + 3 = 2x + 8 + x$; f. $2(x + 4) = 16$.

9. Bestimmt, ob die folgenden Gleichungen äquivalent sind:

- a. $3(x + 1) - 2 = 4, x \in \mathbb{R}$, und $2(2x - 1) + 3 = 5, x \in \mathbb{R}$;
b. $3x + 4(x + 1) = 4(x - 1) + 5, x \in \mathbb{R}$, und $2(x + 2) + 3(x - 2) = 3x - 6, x \in \mathbb{R}$.

10. Löst die Gleichungen:

- a. $\frac{x}{6} = \frac{5}{2}$; b. $\frac{12}{5} = \frac{2x}{3}$; c. $\frac{x+1}{3} = \frac{7}{2}$; d. $5 = \frac{4x-5}{3}$; e. $x - 1 = \frac{2x+1}{3}$.

11. Löst die Gleichungen:

- a. $x - 0,3 = 2,5$; b. $3x = 1,44$; c. $1,2x + 4 = 2,8$;
d. $2,6 - x = 1,8$; e. $4,5 + 3x = -x + 9$; f. $3,6(x + 1) - 1 = 2x + 2,6$.

12. Löst die Gleichungen:

- a. $\sqrt{3}x = \sqrt{75}$; b. $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{20} + \sqrt{4}$; c. $2\sqrt{7}x + 4 = \sqrt{7}x + 11$;
d. $\sqrt{12}x + \sqrt{27}x = 12 + \sqrt{3}x$; e. $\sqrt{2}(x + 1) - \sqrt{8} = x(\sqrt{2} - 2)$; f. $\sqrt{2}(x - \sqrt{3}) = \sqrt{54} + 2\sqrt{2}x$.

13. Löst die Gleichungen:

- a. $\frac{2x-5}{4} - x - \frac{1}{2} = 1$; b. $\frac{7x-2}{3} - \frac{2x+1}{2} = x + 1$; c. $\frac{3x+1}{2} + 2 = \frac{3}{2} + \frac{2x-4}{2}$;
d. $\frac{5}{2}(x+1) + 1\frac{2}{3} = 3\frac{1}{6}$; e. $\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}x\right) : \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$; f. $1\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\right)\right] = 5$.

14. Löst die Gleichungen in der Menge der ganzen Zahlen:

- a. $|3x + 7| = 11$; b. $\frac{8}{x-2} = \frac{6}{x}$; c. $(x - 4) \cdot (2x + 5)(\sqrt{2}x + \sqrt{18}) = 0$.

Test

1. Gebt ein Beispiel für:

- a. Gleichung mit einem freien Glied gleich 7;
b. Gleichung, bei der der Koeffizient der Unbekannten gleich -2 ist;
c. Gleichung, bei der die Koeffizienten entgegengesetzte ganze Zahlen sind.

(3 Pkte.)

2. Schreibt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, in eure Hefte.

Die Gleichung $7(x + 1) + 2(5 - x) = 5 + 2(x + 3)$ hat eine Lösung:

- A. -2 ; B. -1 ; C. 1 ; D. 2 .

(3 Pkte.)

3. Löst die Gleichungen:

- a. $1,5x + 4 = x - 2$; b. $\frac{x}{2} - 5 + \frac{x-7}{8} = \frac{1-x}{2} + \frac{x}{4}$; c. $2x(3 + \sqrt{2}) - 6x = \sqrt{50} - \sqrt{2}$.

(3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



3. Lektion: Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Schlüsselwörter

System

äquivalent

Gleichung

unbekannt

Lösung

Die Gleichung mit zwei Unbekannten



Problemstellung

Ein Rechteck (das nicht quadratisch ist) hat einen Umfang von 16 Metern. Bestimmt die Länge und die Breite des Rechtecks, wobei bekannt ist, dass sie in Metern ausgedrückt sind als:

- a. natürliche Zahlen; b. reelle Zahlen.

Lösung:

Wenn das Rechteck L Meter lang und l Meter breit ist, dann ist $L > l > 0$, und der Umfang U (ausgedrückt in Metern) ergibt sich aus der Beziehung $U = 2L + 2l$. Also $2(L + l) = 16$, also $L + l = 8$.

- a. Wenn $L, l \in \mathbb{N}$, dann hat die Aufgabe drei Lösungen: $L = 7$ m, $l = 1$ m oder $L = 6$ m, $l = 2$ m oder $L = 5$ m, $l = 3$ m.
b. Wenn $L, l \in \mathbb{R}$, gibt es unendlich viele Möglichkeiten, nämlich $L = 8 - t$ Meter und $l = t$ Meter, wobei t eine reelle Zahl ist, sodass $0 < t < 4$. Zum Beispiel: $L = 6,1$ Meter, $l = 1,9$ Meter oder $L = 5,28$ Meter, $l = 2,72$ Meter oder $L = 4,75$ Meter, $l = 3,25$ Meter usw.

Was stellen wir fest?

Je nach der Menge, in der wir sie lösen, hat die Gleichung $L + l = 8$ drei Lösungen oder unendlich viele Lösungen.



Merke dir!

Eine Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei a, b und c reelle Zahlen sind, mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$, nennt man *eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten*.

Die reellen Zahlen x und y werden als *Unbekannte* der Gleichung, die Zahlen a und b als *Koeffizienten*, und c wird als *freies Glied* bezeichnet.

Ein Paar (x_0, y_0) reeller Zahlen, für das die Gleichung $ax_0 + by_0 + c = 0$ gilt, nennt man *Lösung* der Gleichung $ax + by + c = 0$.

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten zu lösen, bedeutet, die Menge S der Lösungen der Gleichung zu bestimmen. Eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.



Beispiel

Eine Lösung der Gleichung $x + 2y - 5 = 0$ ist das Paar $(1, 2)$, denn $1 + 2 \cdot 2 - 5 = 0$. Das Paar $(2, 1)$ ist keine Lösung, denn $2 + 2 \cdot 1 - 5 \neq 0$. Man bemerkt, dass die Gleichung noch andere Lösungen hat:

- das Paar $(3, 1)$ ist eine Lösung, da $3 + 2 \cdot 1 - 5 = 0$;
- das Paar $(5, 0)$ ist eine Lösung, da $5 + 2 \cdot 0 - 5 = 0$.

Gleichungssysteme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten



Merke dir!

Ein Paar von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten der Form

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ wobei } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

wird als *lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten* bezeichnet.

Die reellen Zahlen a_1, b_1, a_2, b_2 sind die *Koeffizienten der Unbekannten*, c_1, c_2 sind die *freien Terme (Glieder)*, und x und y sind die *Unbekannten des Systems*.

Ein Paar (x_0, y_0) reeller Zahlen wird als *Lösung des Systems* bezeichnet, wenn es eine Lösung für jede Gleichung des Systems ist (mit anderen Worten, es ist eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen des Systems).



Beispiel

Es sei das lineare Gleichungssystem mit zwei Unbekannten: $\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 8x - 2y = 10 \end{cases}$.

- Setzt man die Unbekannte x mit 2 und die Unbekannte y mit 3 in die Gleichungen des Systems ein, erhält man:
 $2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19$ (wahr), also ist das Paar (2, 3) eine Lösung der ersten Gleichung;
 $8 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$ (wahr), also ist das Paar (2, 3) die Lösung der zweiten Gleichung.
 Das Paar (2, 3) ist also die Lösung des Systems, weil es die Lösung jeder Gleichung ist.
- Ersetzt man die Unbekannte x durch -3 und die Unbekannte y durch 5 in den Gleichungen des Systems, so erhält man:
 $2 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19$ (wahr), also ist das Paar $(-3, 5)$ eine Lösung der ersten Gleichung;
 $8 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 = 10 \Leftrightarrow -34 = 10$ (falsch), also ist $(-3, 5)$ keine Lösung der zweiten Gleichung.
 Folglich ist das Paar $(-3, 5)$ keine Lösung des Systems, da es keine Lösung der beiden Gleichungen des Systems ist (obwohl dieses Paar immer noch eine Lösung der ersten Gleichung ist).

Merke dir!

Ein Gleichungssystem zu lösen, bedeutet, die Menge S der Lösungen zu bestimmen.

Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der beiden Gleichungen. Zwei lineare Gleichungssysteme werden als äquivalent bezeichnet, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben.

Wenn man eine oder beide Gleichungen eines Systems in äquivalente Gleichungen umwandelt, erhält man ein System, das dem gegebenen System entspricht. Um auszudrücken, dass zwei Systeme äquivalent sind, können wir das Symbol $\Leftrightarrow$ („äquivalent“ zu lesen) verwenden.

Beispiel: $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 18x + 15y = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 9 \\ 6x + 5y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 9 \cdot (-2) \\ 6x + 5y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 2y = -18 \\ 6x + 5y = 27 \end{cases}$

Methoden zur Lösung von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten

Substitutionsmethode

Merke dir!

Die *Substitutionsmethode* ist eine Methode zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten, die darin besteht, eine Unbekannte in einer der Gleichungen des Systems durch ihren Ausdruck in Bezug auf die andere Unbekannte zu ersetzen, die sich aus der anderen Gleichung ergibt.

Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems durch die Substitutionsmethode

- Schritt 1: Man wählt aus einer Gleichung des Systems eine Unbekannte aus und drückt sie in Bezug auf die andere aus.
- Schritt 2: Man ersetzt in der anderen Gleichung die gewählte Unbekannte durch ihren in Schritt 1 ermittelten Ausdruck und erhält so eine Gleichung mit nur einer Unbekannten.
- Schritt 3: Man löst die Gleichung, in der die Substitution vorgenommen wurde, und ermittelt so eine der Unbekannten (eine der Komponenten der Lösung).
- Schritt 4: Man setzt den Wert der Unbekannten aus Schritt 3 in den Ausdruck aus Schritt 1 ein und bestimmt die andere Unbekannte (die andere Komponente der Lösung).
- Schritt 5: Man schreibt die Lösungsmenge des Systems auf.

Probe. Um die Richtigkeit der Berechnungen zu überprüfen und eventuelle Fehler zu korrigieren, ersetzt man die Komponenten der erhaltenen Lösung in den Anfangsgleichungen des Systems ein.

Substitution = Ersatz
(von lateinisch *substitutio*)



Beispiel

Um das Gleichungssystem $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ nach der Substitutionsmethode zu lösen, gehen wir wie folgt vor:

Schritt 1	In der zweiten Gleichung drücken wir y in Funktion von x aus.	$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow$
Schritt 2	In der ersten Gleichung ersetzen wir y durch $7 - 4x$ was eine Gleichung ersten Grades mit nur einer Unbekannten (nämlich x) ergibt.	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3(7 - 4x) = 1 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow$

Schritt 3	Wir lösen diese Gleichung und finden die Unbekannte x (eine Komponente der Lösung).	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 21 - 12x = 1 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x = -20 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow$
Schritt 4	Wir setzen den für x gefundenen Wert in die zweite Gleichung ein und finden die Unbekannte y (die andere Komponente der Lösung).	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 - 4 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$
Schritt 5	Wir schreiben die Menge der Lösungen des Systems.	$S = \{(2, -1)\}$

Probe: Wir ersetzen die Komponenten der erhaltenen Lösung in den Anfangsgleichungen des Systems.

In der ersten Gleichung: $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1 \Leftrightarrow 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (wahr)

In der zweiten Gleichung: $4 \cdot 2 + (-1) = 7 \Leftrightarrow 8 - 1 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$ (wahr)

Bemerkungen

1. Wenn nach der Substitution von y (oder x), die Gleichung für die Unbekannte x (oder y) keine Lösungen hat, dann hat das System keine Lösungen, also $S = \emptyset$.
2. Wenn die Substitution von y (oder x) eine Identität ergibt, dann reduziert sich das System auf eine einzige Gleichung, wobei die beiden Gleichungen äquivalent sind. In diesem Fall hat das System unendlich viele Lösungen.

Reduktionsmethode

Merke dir!

Die *Reduktionsmethode* ist ein Verfahren zur Lösung eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten, bei dem eine oder beide Gleichungen des Systems in äquivalente Gleichungen umgewandelt werden, sodass die Koeffizienten einer der Unbekannten in den beiden Gleichungen entgegengesetzt (oder gleich) werden, und anschließend die erhaltenen Gleichungen Glied für Glied addiert (oder subtrahiert) werden, um eine Gleichung mit nur einer Unbekannten zu erhalten.

Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mithilfe der Reduktionsmethode

- Schritt 1: Man multipliziert die beiden Glieder einer der beiden Gleichungen mit einer von null verschiedenen reellen Zahl und gegebenenfalls die Glieder der anderen Gleichung mit einer anderen reellen Zahl ungleich null, sodass die Koeffizienten einer der Unbekannten entgegengesetzt (oder gleich) werden.
- Schritt 2: Man addiert (bzw. subtrahiert) die beiden Gleichungen und erhält eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten, die man löst, indem man den Wert dieser Unbekannten (eine der Komponenten der Lösung) berechnet.
- Schritt 3: Man ersetzt in einer der Gleichungen des Systems die Unbekannte durch den im zweiten Schritt berechneten Wert und löst die erhaltene Gleichung, um den Wert der zweiten Unbekannten (die andere Komponente der Lösung) zu bestimmen.
- Schritt 4: Wenn man in den Schritten 2 und 3 die Werte $x = x_0$ und $y = y_0$ erhält, wobei $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, dann ist das Paar (x_0, y_0) die Lösung des Systems. Man schreibt die Menge der Lösungen des Systems $S = \{(x_0, y_0)\}$.

Probe: Man ersetzt x durch x_0 und y durch y_0 in den Anfangsgleichungen des Systems und bestimmt, ob das Paar (x_0, y_0) die Lösung des Systems ist.

Beispiel

Um das Gleichungssystem $\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ nach der Reduktionsmethode zu lösen, gehen wir wie folgt vor:

Schritt 1	Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit -3 , sodass sich die Glieder, die y enthalten, reduzieren.	$\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \cdot (-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ -12x - 3y = -21 \end{cases}$
Schritt 2	Wir addieren die zwei Gleichungen Glied für Glied und erhalten eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten, die wir lösen.	$-7x = -14 \Leftrightarrow x = 2$
Schritt 3	Wir ersetzen das unbekannte x durch den in Schritt 2 erhaltenen Wert in der zweiten Gleichung des ursprünglichen Systems und finden den Wert von y .	$4 \cdot 2 + y = 7 \Leftrightarrow 8 + y = 7 \Leftrightarrow y = -1$

Schritt 4 Wir schreiben die Menge der Lösungen des Systems.

$$S = \{(2, -1)\}.$$

Probe: Wir ersetzen die Komponenten der Lösung in den Anfangsgleichungen des Systems.

In der ersten Gleichung: $5 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 7 \Leftrightarrow 10 - 3 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$ (wahr).

In der zweiten Gleichung: $4 \cdot 2 + (-1) = 7 \Leftrightarrow 8 - 1 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$ (wahr).

Bemerkungen

1. Für die Lösung eines Gleichungssystems mit zwei Unbekannten können wir eine der beiden vorgestellten Methoden wählen. Welche Methode auch immer gewählt wird, bleibt die Lösung dieselbe.
2. Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten kann eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung haben.

Beispiele

1. Das System $\begin{cases} 3x - 2y = 19 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$ hat eine eindeutige Lösung $S = \{(5, -2)\}$, die mithilfe der Reduktionsmethode oder durch der Substitutionsmethode erhalten wurde.
2. Das System $\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ hat unendlich viele Lösungen, da die beiden Gleichungen äquivalent sind, und das System reduziert sich auf eine Gleichung mit zwei Unbekannten mit der Lösungsmenge $S = \{(2t + 3, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
3. Das System $\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 8x + 6y = 22 \end{cases}$ hat keine Lösung, denn wenn man die erste Gleichung mit 2 multipliziert und dann die zweite Gleichung subtrahiert, ergibt sich die Beziehung $0 \cdot x + 0 \cdot y = 12$, die durch kein Paar (x, y) reeller Zahlen übergeprüft wird. Daher ist $S = \emptyset$.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Bestimmt die reelle Zahl t , für die das Paar $(t; t - 2)$ eine Lösung von $2x - 3y = 1$ ist.

Lösung:

Das Paar $(t; t - 2)$ ist dann und nur dann eine Lösung der Gleichung $2x - 3y = 1$, wenn das Einsetzen von $x = t$ und $y = t - 2$ in die gegebene Gleichung eine wahre Aussage ergibt. Wir erhalten der Reihe nach:

$$2t - 3(t - 2) = 1 \Leftrightarrow 2t - 3t + 6 = 1 \Leftrightarrow -t = -5 \Leftrightarrow t = 5.$$

Probe: Für die reelle Zahl $t = 5$ ist das Paar $(t; t - 2) = (5; 3)$. Da $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1$ ist, folgern wir, dass das Paar $(5; 3)$ eine Lösung der Gleichung $2x - 3y = 1$ ist. Also passt $t = 5$.

2. Löst die Systeme:

a. $\begin{cases} 9x + y = -15; \\ 6x + 5y = 3 \end{cases};$

b. $\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 5; \\ \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = 0 \end{cases};$

c. $\begin{cases} 2(x + 1) - 3(y + 1) = 2 \\ 3(x + y) - 2(y - 1) = 2,8(3) \end{cases}.$

Lösung:

- a. Wenn eine der Unbekannten den Koeffizienten 1 oder -1 hat, ist es besser, die *Substitutionsmethode* anzuwenden. $9x + y = -15 \Leftrightarrow y = -9x - 15$. Indem man y für $-9x - 15$ in der zweiten Gleichung einsetzt, löst man die resultierende Gleichung:

$$6x + 5 \cdot (-9x - 15) = 3 \Leftrightarrow 6x - 45x - 75 = 3 \Leftrightarrow -39x = 78 \Leftrightarrow x = -2. \text{ Daraus folgt: } y = -9 \cdot (-2) - 15 = 18 - 15 = 3.$$

Das System hat eine eindeutige Lösung $S = \{(-2, 3)\}$.

Probe: $9 \cdot (-2) + 3 = -18 + 3 = -15$ (wahr), also ist $(-2; 3)$ die Lösung der Gleichung $9x + y = -15$.

$6 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = -12 + 15 = 3$ (wahr), also ist $(-2; 3)$ die Lösung der Gleichung $6x + 5y = 3$. Da es sich um Lösungen beider Gleichungen handelt, ist das Paar $(-2; 3)$ tatsächlich eine Lösung des Systems.

- b. Wenn einige der Koeffizienten irrationale Zahlen sind, ist es besser, die *Reduktionsmethode* anzuwenden.

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 5 & | \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = 0 & | \cdot \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \sqrt{6} \cdot y = 5\sqrt{2} \\ 3x - \sqrt{6} \cdot y = 0 \end{cases}.$$

Addiert man Glied für Glied, ergibt sich $5x = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Setzt man in die erste Gleichung ein, erhält man:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot y = 5 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{3} \cdot y = 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot y = 3 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}.$$

Das System hat eine eindeutige Lösung $S = \{(\sqrt{2}; \sqrt{3})\}$.

Probe: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 + 3 = 5$ bzw. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} - \sqrt{6} = 0$.

Da beide Gleichungen gelöst sind, ist das Paar $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ die Lösung des Systems.

$$\begin{aligned} \text{c. } \begin{cases} 2(x+1) - 3(y+1) = 2 \\ 3(x+y) - 2(y-1) = 2,8(3) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2-3y-3=2 \\ 3x+3y-2y+2=\frac{283-28}{90} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x+y+2=\frac{17}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x+y=\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=3 \\ 9x+3y=\frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Addiert man Glied f\"ur Glied, erh\"alt man: } 11x = \frac{3}{1} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 11x = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Substituiert} \\ &\text{man in der Gleichung } 3x+y=\frac{5}{6}, \text{ so ergibt sich } \frac{3}{2}+y=\frac{5}{6} \Leftrightarrow y=\frac{5}{6}-\frac{3}{2} \Leftrightarrow y=\frac{5}{6}-\frac{9}{6} \Leftrightarrow y=-\frac{4}{6} \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}. \\ &\text{Also } S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Vorgeschlagene Aufgaben

- Geht an, welche der folgenden Beziehungen Gleichungen mit zwei Unbekannten darstellen:
 - $x+y=2$;
 - $2x+5-7=0$;
 - $3y+2y=10$;
 - $2a+1,5b-2=0$.
- Pr\"uft, ob das Paar $(1, 2)$ eine L\"osung der Gleichung ist:
 - $x+y-3=0$;
 - $2x+y+4=0$;
 - $x+3y-7=0$;
 - $4x-3y+1=0$.
- F\"ur Gleichungen der Form $ax+by+c=0$, $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, schreibt die Gleichungen in eure Hefte und f\"ullt dann die Tabelle entsprechend dem Muster aus:

Gleichung	$x-2y-4=0$	$3x+y+1=0$	$-x+\frac{1}{2}y+5=0$	$\sqrt{2}x+2y-\sqrt{3}=0$	$\sqrt{3}x-y=0$
a	1				
b	-2				
c	-4				

- Sei die Gleichung $x+2y-8=0$.
 - Schreibt zwei Paare von reellen Zahlen auf, die L\"osungen der gegebenen Gleichung sind.
 - Schreibt zwei Paare von reellen Zahlen auf, die keine L\"osungen der gegebenen Gleichung sind.
- Sei die Gleichung $ax+by+4=0$, wobei a und b reelle Zahlen sind.
 - Bestimmt b f\"ur $a=1$ so, dass das Paar $(2, -3)$ eine L\"osung der Gleichung ist.
 - Bestimmt a und b , f\"ur die $(-1, -1)$ und $(0, -4)$ L\"osungen der Gleichung sind.
- Geht an, welche der folgenden Beziehungen Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten darstellen:
 - $\begin{cases} x-1=3; \\ 2x=4 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} 2x-y=3; \\ x+3y=5 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} x=5 \\ 2x+3y=16 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} x^2-9=0 \\ x+3=6 \end{cases}$.
- Pr\"uft, ob das Paar $(2, 3)$ eine L\"osung des Gleichungssystems ist:
 - $\begin{cases} 2x+y=7; \\ x+4y=14 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} x+3y=11; \\ 2x+y=10 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} -x+2y=5; \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} 0,5x+3y=10 \\ 2x-\frac{1}{3}y=3 \end{cases}$.
- L\"ost folgende Gleichungssysteme durch Substitution:
 - $\begin{cases} x+4y=8; \\ 2x+3y=11 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} -2x+y=-2; \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} -2x+3y=-2; \\ 3x+y=14 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} 2x+4y=14 \\ x-2y=5 \end{cases}$.
- L\"ost folgende Gleichungssysteme mithilfe der Reduktionsmethode:
 - $\begin{cases} x+y=7; \\ x-y=1 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} -x+2y=-1; \\ -2x+3y=3 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} 2x+4y=-4; \\ -3x+5y=-16 \end{cases}$;
 - $\begin{cases} 5x+3y=4 \\ 2x+4y=10 \end{cases}$.

10. Löst die folgenden Gleichungssysteme:

a. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = 3 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y = -1 \end{cases};$

b. $\begin{cases} 0,5x + 0,2y = 0 \\ 1,5x - y = 6 \end{cases};$

c. $\begin{cases} 3(x-2) + 0,25y = -1 \\ \frac{x+2}{4} + \frac{5y}{18} = -0,1 \end{cases};$

d. $\begin{cases} 2(x+1) + y = 6 \\ x - 2(y+1) = -20 \end{cases}.$

11. Schreibt ein System von zwei Gleichungen mit zwei reellen Koeffizienten und zwei Unbekannten mit einziger Lösung:

a. $x = 2$ und $y = 5$;

b. $x = -1$ und $y = \sqrt{3}$;

c. $x = 0$ und $y = -\sqrt{2}$;

d. $x = 1 - \sqrt{3}$ und $y = 0$.

12. Bestimmt die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme in der Menge der reellen Zahlen:

a. $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases};$

b. $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases};$

c. $\begin{cases} \sqrt{6}x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}x + y = -2 \end{cases};$

d. $\begin{cases} 0,4x - 3,2y = 7 \\ 0,1x - 0,8y = 1,8 \end{cases}.$

13. Bestimmt die ganzen Zahlen k und n so, dass $|2k - 3n| + (-k + 2n)^2 = 1$ ist.

14. Löst die folgenden zwei Gleichungssysteme:

a. $\begin{cases} \sqrt{2}x + 5y = 15 \\ \sqrt{8}x + 2y = 6 \end{cases};$

b. $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{18}y = 9 \\ \sqrt{12}x + \sqrt{2}y = 8 \end{cases};$

c. $\begin{cases} \sqrt{63}x - \sqrt{3}y = 30 \\ \sqrt{7}x + \sqrt{27}y = 50 \end{cases};$

d. $\begin{cases} \sqrt{5}x + 3y = 5 - \sqrt{27} \\ \sqrt{10}x - \sqrt{12}y = 5\sqrt{2} + 6 \end{cases}.$

Test

1. Prüft, ob das Paar $(2, 4)$ Lösung ist für:

a. die Gleichung $2x + y - 9 = 0$;

b. das Gleichungssystem $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + 5y = 24 \end{cases}$. (3 Pkte.)

2. Die Lösung des Gleichungssystems $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ ist:

A. $S = \{(2, 2)\}$;

B. $S = \{(-2, 2)\}$;

C. $S = \{(2, -2)\}$;

D. $S = \{(-2, -2)\}$. (3 Pkte.)

Schreibt den Buchstaben der richtigen Antwort in eure Hefte.

3. Es sei das Gleichungssystem $\begin{cases} 2(x-1) + 3y = -5 \\ 4x + 3(y+2) = -3 \end{cases}$.

a. Löst das Gleichungssystem nach der Substitutionsmethode.

b. Löst das Gleichungssystem nach der Reduktionsmethode.

(3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



4. Lektion: Lösen von Aufgaben mithilfe von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen

Schlüsselwörter

Aufgabe

Unbekannte

Gleichung

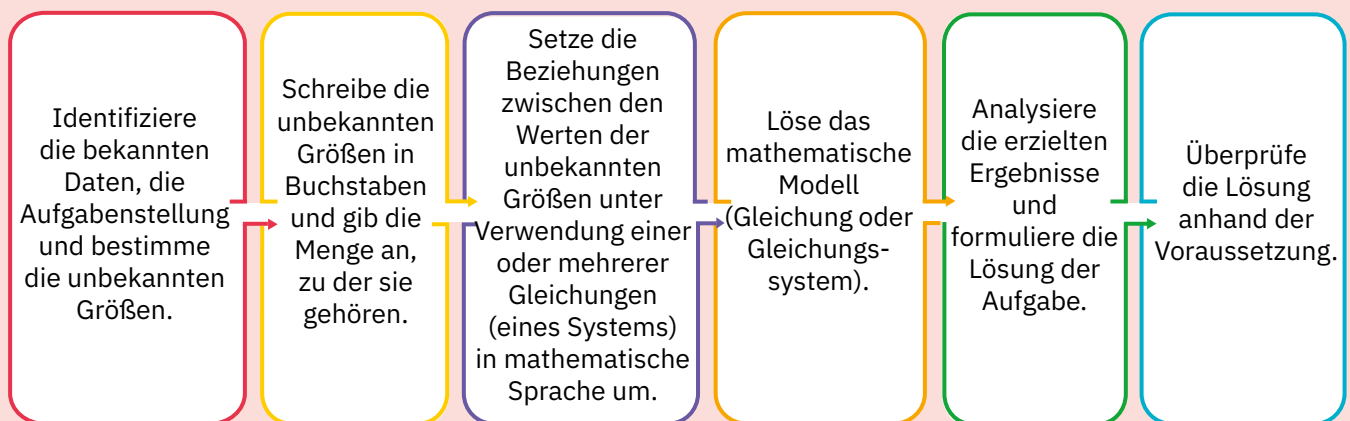
Gleichungssystem

Lösung

Bei praktischen Aufgaben lassen sich die Beziehungen zwischen bekannten und unbekannten Daten häufig durch eine oder mehrere lineare Gleichungen ausdrücken. Die Lösung der Aufgabe besteht also in der Lösung einer Gleichung oder einer Reihe von Gleichungen (d. h. eines Systems).

Merke dir!

Die Strategie zur Verwendung von Gleichungen und Systemen zum Lösen von Aufgaben besteht darin, die folgenden Schritte sorgfältig zu durchlaufen:



Problemstellung

Ein Makler investierte 60 Prozent des von ihm verwalteten Geldes in Staatsanleihen und 25 Prozent in Aktien. Es blieben 12 000 Lei übrig. Wie viel Geld hat der Makler ursprünglich verwaltet?

Lösung:

Wir bezeichnen mit s den Betrag (ausgedrückt in Lei), den er ursprünglich hatte. In Staatsanleihen investierte er $60\% \cdot s$ und in Aktien $25\% \cdot s$. Wir erhalten die Gleichung $s = 60\% \cdot s + 25\% \cdot s + 12\,000$ Lei.

Da $s = 1 \cdot s = \frac{100}{100} \cdot s = 100\% \cdot s$, können wir schreiben:

$$100\% \cdot s = (60\% + 25\%) \cdot s + 12\,000 \Leftrightarrow 100\% \cdot s = 85\% \cdot s + 12\,000 \Leftrightarrow 15\% \cdot s = 12\,000 \Leftrightarrow s = 12\,000 : 15\% \Leftrightarrow$$

$$s = 12\,000 : \frac{15}{100} \Leftrightarrow s = 12\,000 \cdot \frac{100}{15} \Leftrightarrow s = 80\,000, \text{ zu Beginn hatte der Makler } 80\,000 \text{ Lei in Verwaltung.}$$

Wir überprüfen die Lösung. Er hat $60\% \cdot 80\,000 \text{ Lei} = \frac{60}{100} \cdot 80\,000 \text{ Lei} = 48\,000 \text{ Lei}$ in Staatsanleihen und

$$25\% \cdot 80\,000 \text{ Lei} = \frac{25}{100} \cdot 80\,000 \text{ Lei} = 20\,000 \text{ Lei.}$$

Damit bleiben $80\,000 \text{ Lei} - 48\,000 \text{ Lei} - 20\,000 \text{ Lei} = 12\,000 \text{ Lei}$, was die Richtigkeit der Lösung bestätigt.



Problemstellung

Vlad und Tavi gehen in den Supermarkt, um Äpfel und Orangen zu kaufen. Keiner von ihnen bewahrt den Kassenzettel auf. Vlad sagt: „Für 2 Kilo Äpfel und 4 Kilo Orangen habe ich 22 Lei bezahlt.“

Tavi sagt: „Ich habe 3 Kilo Äpfel und 2 Kilo Orangen gekauft, für die ich 17 Lei bezahlt habe.“

Berechne, wie viel ein Kilo Äpfel und wie viel ein Kilo Orangen kostet, wenn man davon ausgeht, dass diese Aussagen wahr sind.

Lösung:

Wir schreiben x (Lei) für den Preis für ein Kilo Äpfel und y (Lei) für den Preis für ein Kilo Orangen.

Die Aussage von Vlad zeigt, dass $2x + 4y = 22$ ist, und die von Tavi, dass $3x + 2y = 17$ ist. Wir können ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten bilden, das wir z. B. mit der *Reduktionsmethode* lösen:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ 3x + 2y = 17 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ -6x - 4y = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ -4x = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2 \cdot 3 + 4y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

So kostet ein Kilo Äpfel 3 Lei und ein Kilo Orangen 4 Lei.

Probe: $3 \cdot 3 \text{ Lei} + 2 \cdot 4 \text{ Lei} = 17 \text{ Lei}$, und $2 \cdot 3 \text{ Lei} + 4 \cdot 4 \text{ Lei} = 22 \text{ Lei}$.

Problemstellung

Eine Hausfrau hat eine 25 %-ige und eine 30 %-ige Salzlösung. Wie viele Liter von jeder Lösung muss sie mischen, um 20 Liter 28 %-ige Sole zu erhalten?

Lösung:

Wir werden das gewichtete arithmetische Mittel anwenden: $m_{ga} = \frac{c_1 \cdot x + c_2 \cdot y}{x + y}$, wobei x für die Menge der Lösung mit der Konzentration c_1 , y ist die Menge der Lösung mit der Konzentration c_2 , und c_l ist die Konzentration der Mischung. Wir erhalten das System:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 28\% = \frac{25\% \cdot x + 30\% \cdot y}{x + y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 25\% \cdot x + 30\% \cdot y = 28\%(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 25x + 30y = 28 \cdot 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 5x + 6y = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 5y = -100 \\ 5x + 6y = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$$

Die Hausfrau muss 8 Liter Salzlösung mit einer Konzentration von 25 % und 12 Liter mit einer Konzentration von 30 % mischen.

Kritisches Denken (vergleichende Lösung mithilfe einer Gleichung/eines Gleichungssystems)

Während der *Grünen Woche* beschlossen die 27 Schüler einer Klasse, sich an einer Aktion zur Säuberung eines verschmutzten Gebiets zu beteiligen. An diesem Tag kamen drei weitere Freunde hinzu: ein Mädchen und zwei Jungen. Die Anzahl der Jungen betrug zwei Drittel der Anzahl der Mädchen. Wie viele Jungen und wie viele Mädchen waren in dieser Klasse?

**Löst die Aufgabe mithilfe einer Gleichung:**

Wir bezeichnen mit $x \in \mathbb{N}^*$ die Anzahl der Jungen in der Klasse. Dann ist die Anzahl der Mädchen gleich $27 - x$. Da ein weiteres Mädchen und zwei Jungen mitmachen, ergibt sich, dass die Anzahl der teilnehmenden Jungen gleich $x + 2$ und die der Mädchen gleich $28 - x$ ist.

Wir erhalten die Gleichung $x + 2 = \frac{2}{3} \cdot (28 - x)$, die wir

lösen, um die Unbekannte x zu bestimmen:

$$x + 2 = \frac{2}{3} \cdot (28 - x) \quad | \cdot 3 \Leftrightarrow 3 \cdot (x + 2) = 2 \cdot (28 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 56 - 2x \Leftrightarrow 5x = 50 \Leftrightarrow x = 10.$$

Es sind also 10 Jungen in der Klasse und $27 - 10 = 17$ Mädchen.

Probe: $10 + 17 = 27$; $10 + 2 = 12$; $17 + 1 = 18$ bzw. $\frac{2}{3} \cdot 18 = 2 \cdot 6 = 12$.

Löst die Aufgabe mithilfe eines Gleichungssystems:

Wir bezeichnen mit M die Anzahl der Mädchen und mit J die Anzahl der Jungen in der Klasse, wobei $M, J \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $M + J = 27$.

Ein weiteres Mädchen und zwei Jungen nahmen an der Aktion teil, sodass es insgesamt $M + 1$ Mädchen und $J + 2$ Jungen waren. Wir erhalten das System:

$$\begin{cases} M + J = 27 \\ J + 2 = \frac{2}{3} \cdot (M + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = 27 - J \\ 3 \cdot (J + 2) = 2 \cdot (M + 1) \end{cases}$$

Ersetzt man in der zweiten Gleichung M durch $27 - J$, erhält man: $3J + 6 = 54 - 2J + 2 \Leftrightarrow 5J = 50 \Leftrightarrow J = 10$. Daraus ergibt sich: $M = 27 - J = 27 - 10 = 17$.

Es sind 10 Jungen und 17 Mädchen in der Klasse.





Projekt

Neben dem, was wir in dieser Lektion gelernt haben, gibt es eine ganze Reihe von Strategien und Methoden zum Lösen der Aufgaben, die in die folgenden zwei Kategorien eingeteilt werden können:

- arithmetische Methoden: die Methode der Zurückführung zur Einheit, die Vergleichsmethode, die grafische Methode, die Methode des umgekehrten Rechenweges, die Methode der falschen Voraussetzung;
- algebraische Methoden: Gleichungen und Gleichungssysteme.

Projektaufgabe

- I. Schreibt für jede der Aufgaben 1–4 je zwei Lösungen: eine mit arithmetischen und eine mit algebraischen Methoden. Vergleicht die beiden Lösungswege und gebt die Vor- und Nachteile jeder Methode aus eurer eigenen Sicht an.

Bei eurer Analyse könnt ihr die folgenden Punkte berücksichtigen:

- wie schnell ihr die Lösung findet;
- wie einfach es ist, sie zu überprüfen;
- wie leicht ihr die Lösung einem Gesprächspartner (möglicherweise mündlich) präsentieren könnt.

- II. Erfindet zwei Aufgaben, eine mit einer einzigen Unbekannten und eine mit zwei Unbekannten, und löst sie nach der von euch bevorzugten Methode.

Zur Durchführung des Projekts werden Teams von 4–5 Schülern gebildet.

Ressourcen: Ihr könnt die im Internet öffentlich zugänglichen Ressourcen verwenden.

Präsentation: Erstellt eine PowerPoint-Präsentation mit Text und Bildern.

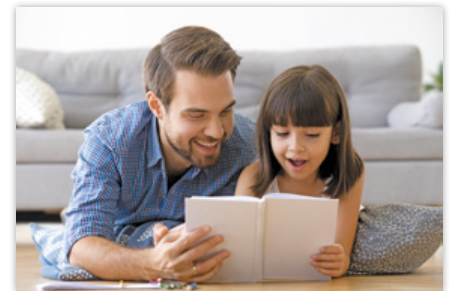
Bewertung: Man beachtet die Qualität der Analyse, die Originalität und Qualität der vorgeschlagenen Aufgaben, die Genauigkeit der Präsentation, die Teamarbeit, die von den anderen Teilnehmern nach der Präsentation des Projekts geäußerten Meinungen und die Qualität der Antworten auf eure Fragen.

1. George ist 30 und seine Tochter Adina ist 4 Jahre alt.

- a. Ist es möglich, dass George nach einer bestimmten Anzahl von Jahren ein Jahr mehr als das Dreifache von Adinas Alter haben wird? Begründet eure Antwort.
- b. Bestimmt, in wie vielen Jahren Adina ein Drittel des Alters ihres Vaters haben wird.

Die Lösungsmethoden, die ihr in Punkt b verwenden werdet:

- grafische Methode;
- Lösen mithilfe von Gleichungen.



2. In einer Buchhandlung hat jedes Blatt Buntpapier den gleichen Preis. Auch jeder Buntstift hat denselben Preis. Um Materialien für ein Projekt zu kaufen, gehen Adi und Eva in diese Buchhandlung. Der Junge kauft 4 Bögen Buntpapier und 7 Buntstifte, wofür er 47 Lei bezahlt. Eva kauft 6 Bögen Buntpapier und 5 Buntstifte, wofür sie 43 Lei bezahlt. Rechnet aus, wie viel ein Blatt Buntpapier und wie viel ein Buntstift kosten.

Die Lösungsmethoden, die ihr anwenden werdet:

- Vergleichsmethode;
- mit einem Gleichungssystem unter Verwendung der Reduktionsmethode.

3. Eine Theaterkarte kostet 55 Lei und eine Kinokarte 32 Lei. Radio Mathe verschenkt im Namen eines Sponsors 12 Eintrittskarten für die Gewinner eines Gewinnspiels im Wert von 545 Lei. Wie viele Karten jeder Art werden verschenkt?

Die Lösungsmethoden, die ihr anwenden werdet:

- Methode der falschen Voraussetzung;
- mithilfe eines Gleichungssystems und der Substitutionsmethode.

4. Julia gibt eine Geldsumme in drei Tagen aus. Am ersten Tag gibt sie 30 Prozent des Betrags aus, am zweiten Tag gibt sie zwei Fünftel des verbleibenden Betrags aus und am dritten Tag gibt sie die restlichen 630 Lei aus.

- a. Ist es möglich, dass der ursprüngliche Betrag 1 200 Lei beträgt? Begründet eure Antwort.

- b. Berechnet, wie viel Iulia ursprünglich hatte.

Die Lösungsmethoden, die ihr in Punkt b verwenden werdet:

- die Methode des umgekehrten Rechenweges;
- Lösen mit einer Gleichung.

Untersuchung

Der Gewinnschwellenwert für ein Unternehmen, das Eier verkauft

1. Etappe

Dein Geschäftsplan sieht vor, 15 Hühner einer bestimmten Rasse im Garten deiner Familie zu züchten und die produzierten Eier zu verkaufen. Die Kosten für die Gründung des Unternehmens belaufen sich auf 825 Lei für einen Hühnerstall und 25 Lei für jede Henne. Das Hühnerfutter kostet 10 Lei pro Tag und du hoffst, dass jede Henne ein Ei pro Tag legt. Dein Ziel ist es, jedes Ei für einen Leu zu verkaufen.



Dein Unternehmen ist kostendeckend, wenn der Gesamtumsatz den Gesamtkosten entspricht.

1. In wie vielen Tagen wirst du die Gewinnzone erreichen?
(Vorausgesetzt, du schaffst es, alle Eier zu verkaufen, ohne welche zu verlieren).
2. Zeichne mithilfe der in der 6. Klasse erworbenen Kenntnisse ein Liniendiagramm, das zeigt, wie sich Kosten und Gewinn in den ersten 80 Tagen entwickeln werden.

2. Etappe

Nach einigen Nachforschungen findest du heraus, dass Hühner dieser Rasse nur an vier von fünf Tagen Eier legen, aber du erfährst, dass du für 45 Lei pro Stück spezielle Hühner einer anderen Rasse kaufen kannst, die nicht nur jeden Tag ein Ei legen, sondern alle vier Tage zwei Eier pro Tag. Du erzählst deinen Eltern von deinem Plan und erhältst ein Geschenk von 1 440 Lei, um den Stall und 15 Hühner zu kaufen. Berechne, wie viele Hühner jeder Rasse du kaufen kannst.

Ausweitung

1. Deine Schwester ist nicht begeistert davon, dass du als Einziger den Hof für das Geschäft nutzt und verlangt 10 % des Gewinns. Rechne aus, wie viel sie in 365 Tagen verdienen wird.
2. An deinem Geburtstag bekommst du 1 490 Lei. Würdest du im ersten Jahr, das kein Schaltjahr ist, mehr verdienen, wenn du einen weiteren Hühnerstall und 15 Hühner kaufst, oder wenn du sie zu einer 6%igen Vergütung investierst? Wenn du einen anderen Geldbetrag erhalten würdest, untersuche, wie dies deine beste Option bestimmen würde.

Ausweitung +

Denke an ein Unternehmen und beschreibe die Kosten und Preise von Produkten und Dienstleistungen. Berechne, wann du die Gewinnschwelle erreichen wirst.

Tausche mit einem Mitschüler Geschäftspläne aus und versuche, Änderungen zu entwickeln, die sich auf das Geschäft des anderen auswirken würden. Untersuche, wie sich die von deinem Mitschüler vorgeschlagenen Änderungen auf deinen Gewinn auswirken und wann du die Gewinnschwelle erreichst.

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Der Club *Freunde der Berge* hat 45 Mitglieder, die entweder Bergsteiger oder Skifahrer sind. Es gibt 23 mehr Skifahrer als Bergsteiger. Bestimmt die Anzahl der Bergsteiger im Club.
2. Bei einer zweistelligen Zahl zur Basis 10 ist die Zehnerstelle doppelt so groß wie die Einerstelle. Bestimmt diese Zahl, wenn bekannt ist, dass die Summe der Ziffern 12 ergibt.
3. Eine Zahl wird um 4 vergrößert, und das Ergebnis wird um das Fünffache erhöht. Das neue, um 5 verkleinerte Ergebnis wird durch 4 geteilt und ergibt 2 533 und den Rest 3. Bestimmt die ursprüngliche Zahl.
4. Die Differenz von zwei natürlichen Zahlen ist 392. Teilt man die größere Zahl durch die kleinere Zahl, so ergibt sich der Quotient 12 und der Rest 7. Bestimmt die beiden Zahlen.
5. In 15 Jahren wird Anna 4-mal so alt sein wie vor 6 Jahren. Wie alt ist Anna jetzt?
6. In einem Wohnblock gibt es 118 Zimmer in 50 Zweizimmer- und Dreizimmerwohnungen.
 - a. Ist es möglich, dass es in dem Wohnblock 28 Dreizimmerwohnungen gibt? Begründet eure Antwort.
 - b. Bestimmt die Anzahl der Zweizimmer- und Dreizimmerwohnungen in diesem Block.
7. Im Rahmen eines Umweltprojekts sammelt eine Schule 8 Container Altpapier und 5 Container Plastikmüll mit einem Gesamtgewicht von 918 Kilogramm. Vier Altpapiercontainer wiegen genauso viel wie 6 Plastikcontainer. Bestimmt, wie viel ein Altpapier- und wie viel ein Plastikcontainer wiegen.
8. Sechs Goldfische und 8 Pfauenfische kosten 124 Lei, und vier Goldfische und 7 Pfauenfische kosten 101 Lei. Wenn jeder Goldfisch bzw. jeder Pfauenfisch den gleichen Preis hat, berechne, wie viel ein Pfauenfisch kostet.
9. Wenn in einer Klasse die Schüler zu zweit in einer Bank sitzen, bleiben zwei Bänke leer und ein Schüler sitzt allein in der Bank. Wenn dieselben Schüler zu dritt in einer Bank sitzen, würden sieben Bänke leer bleiben.
 - a. Ist es möglich, dass es in dieser Klasse 25 Schüler und 15 Bänke gibt? Begründet eure Antwort.



- b. Wie viele Schüler und wie viele Bänke gibt es in dieser Klasse?
10. In einem Mathematikwettbewerb wurden 10 Aufgaben vorgeschlagen. Für jede richtige Antwort erhält man 10 Punkte, für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen. Ilie hat 76 Punkte erhalten. Bestimmt die Anzahl der Aufgaben, die Ilie in diesem Wettbewerb richtig gelöst hat.
11. Paul hat 40 Aktien gekauft: einige in einer Textilfabrik für je 15 € und einige in einer Brotfabrik für je 12 €, insgesamt also 552 €. Wie viele Aktien von jeder Art hat er gekauft?
12. In einem Geschäft werden T-Shirts zum Verkauf angeboten. Am ersten Tag werden 30 Prozent der T-Shirts verkauft, am zweiten Tag werden zwei Siebtel der restlichen T-Shirts verkauft, und am dritten Tag werden die restlichen 30 T-Shirts verkauft. Wie viele T-Shirts wurden in diesem Geschäft zum Verkauf angeboten?
13. Ein Tourist wandert eine Strecke in drei Tagen. Am ersten Tag legt er ein Viertel der Länge der Strecke und weitere 4 km zurück. Am zweiten Tag legt er drei Fünftel der restlichen Strecke zurück, und am dritten Tag legt er den Rest der Strecke, also 8 km, zurück.
- a. Ist es möglich, dass die am zweiten Tag zurückgelegte Strecke gleich 15 km ist? Begründet eure Antwort.
- b. Bestimmt die Länge der zurückgelegten Strecke.
14. Ein Eichhörnchen legt die Strecke Bau – Haselstrauch – Bau in 4 Minuten zurück. Ohne Haselnüsse läuft es 6 Meter pro Sekunde und mit Haselnüssen 3 Meter pro Sekunde. Bestimmt die Entfernung vom Bau zum Haselstrauch.
15. Ein 35 dm langer Zug fährt über eine Brücke. Der letzte Wagen verlässt die Brücke nach 7 Minuten. Wäre die Geschwindigkeit um 100 Meter pro Minute höher, dann hätte der letzte Wagen die Brücke nach 6 Minuten verlassen. Wie lang ist die Brücke?
16. Ein Apotheker hat zwei Flaschen mit Borsäurelösung: eine mit 6%iger Konzentration und eine mit 3%iger Konzentration. Bestimmt, wie viele Milliliter von jeder Lösung der Apotheker mischen muss, um 600 Milliliter einer 4%igen Lösung zu erhalten.
17. In einer Meinungsumfrage wurde festgestellt, dass zwei Drittel der Verbraucher das Produkt Y und der Rest das Produkt X bevorzugen. Nach einer Werbekampagne für das Produkt X ergab eine neue Umfrage unter denselben Verbrauchern, dass ein Fünftel der Verbraucher, die ursprünglich das Produkt Y bevorzugten, nun das Produkt X wählen. Nach der letzten Umfrage ist die Zahl derer, die das Produkt X bevorzugen, um 60 kleiner als die Zahl derer, die das Produkt Y bevorzugen. Wie viele Verbraucher haben an dieser Umfrage teilgenommen?
18. Dividiert man die Zahl $\overline{abc}$, die in der Basis 10 geschrieben ist, durch die Zahl $\overline{ac}$, erhält man den Quotienten 8 und den Rest 1.
- a. Ist es möglich, dass $\overline{ac}$ gleich 25 ist? Begründet eure Antwort.
- b. Bestimmt die Zahlen $\overline{abc}$.
19. Am 8. März kauft Dan 3 Nelkensträuße und 7 Tulpensträuße, also insgesamt 56 Blumen. Jeder Nelkenstrauß hat die gleiche Anzahl von Blumen, eine Primzahl, und auch jeder Tulpenstrauß hat die gleiche Anzahl von Blumen, ebenso eine Primzahl. Bestimme die Anzahl der Nelken in jedem Strauß.
20. Stelle drei Aufgaben zusammen: eine, die mithilfe einer Gleichung zu lösen ist, und zwei, die mithilfe eines Gleichungssystems unter Verwendung der *Substitutionsmethode* und der *Reduktionsmethode* zu lösen sind.



Selbstbewertung

1. In einer Klasse sind 28 Schüler. Es gibt dreimal so viele Mädchen wie Jungen. Wie viele Mädchen und Jungen sind in der Klasse? (3 Pkte.)
2. In einem Blumenladen kosten 7 Tulpen und 3 Rosen 55 Lei, 5 Tulpen und 7 Rosen kosten 83 Lei.
- a. Ist es möglich, dass eine Rose 12 Lei kostet? Begründet eure Antwort.
- b. Bestimmt den Preis einer Rose und den Preis einer Tulpe. (3 Pkte.)
3. Alex hat eine Geldsumme an vier Tagen ausgegeben. Am ersten Tag hat er 25 % des gesamten Betrages ausgegeben, am zweiten Tag 35 % des verbliebenen Betrages, am dritten Tag 8 Lei weniger als am zweiten Tag, und am vierten Tag hat er die restlichen 62 Lei ausgegeben. Berechnet, wie viel Geld Alex an den vier Tagen ausgegeben hat. (3 Pkte.)

Bemerkung: Für jeden richtig beantworteten Unterpunkt werden 1,5 Punkte vergeben. Von Amts wegen wird 1 Punkt vergeben.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



Wiederholung und Bewertung

Gleichungen • Gleichungen mit einer Unbekannten • Gleichungen mit zwei Unbekannten • Gleichungssysteme • Aufgaben, die mithilfe von Gleichungen oder Gleichungssystemen gelöst werden

Für die Aufgaben 1–9 schreibt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, in eure Hefte. Schreibt für die Übungen 10–17 die vollständigen Lösungen auf.

1. $\sqrt{12}$ ist gleich:
a. 6; b. $2\sqrt{3}$; c. $\sqrt{6}$; d. $\sqrt{3}$.
2. Wenn $a + b = 5$ ist, dann ist $3a + 3b$ gleich:
a. 5; b. 10; c. 15; d. 20.
3. Die Lösung von $2x - 6 = 0$ ist die Zahl:
a. 1; b. 2; c. 3; d. 4.
4. Die Zahl -2 ist die Lösung der Gleichung:
a. $2x + 1 = 0$; b. $3x = 6$;
c. $x - 2 = 0$; d. $3x + 6 = 0$.
5. Ein Beispiel für eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist:
a. $x + 2y = 2$; b. $3a + 5 = 8$;
c. $4y^2 = 9$; d. $4 + 5 = 9$.
6. Eine Lösung der Gleichung $2x + y - 4 = 0$ ist das Paar:
a. (3, 0); b. (2, 1); c. (0, 2); d. (1, 2).
7. Die Summe einer Zahl und ihres Doppelten ist 24. Die gesuchte Zahl ist:
a. 6; b. 7; c. 8; d. 9.
8. Wenn $0,5x = 8$ ist, dann ist x gleich:
a. 4; b. 8; c. 12; d. 16.
9. Es sei das System $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 1,5y = 5 \\ -3x + y = 13 \end{cases}$, wobei $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Die Lösung des Systems ist:
a. $(-3; 2)$; b. $(3; 4)$; c. $(-3; 4)$; d. $(3; -4)$.
10. Welche der folgenden Aussagen ist richtig und welche ist falsch?
a. 5 ist die Lösung von $2(x + 3) - 5 = x + 6$.
b. Das Paar (1, 2) ist eine Lösung von $3x - 2y + 2 = 0$.
c. -2 ist die Lösung von $|4x + 7| = 1$.

11. Verbindet jede Gleichung in Spalte A mit der Lösung in Spalte B:

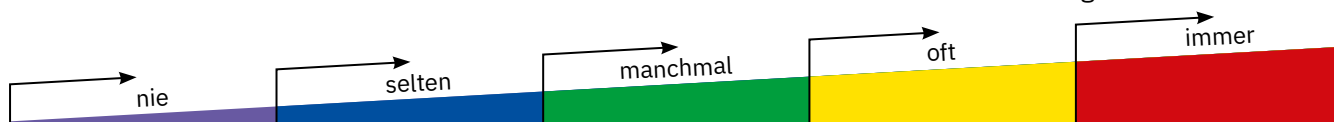
A	B
i. $3x - 8 = 5x + 10$	a. 14
ii. $\frac{x}{4} = \frac{7}{2}$	b. -9
iii. $1,2x - 4 = 2$	c. 0,5
	d. 5

12. Löst das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 17 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases}, \text{ wobei } x, y \in \mathbb{R}.$$
13. Eine Bluse wird um 10 % billiger und kostet 135 Lei. Wie hoch war der Preis der Bluse vor der Preissenkung?
14. Die Differenz zweier Zahlen ist 75. Die Summe der ersten Zahl und des Doppelten der zweiten Zahl ist 210. Bestimmt die beiden Zahlen.
15. Auf einer Ausstellung gibt es 65 Autos und Motorräder. Berechnet, wie viele Autos und wie viele Motorräder ausgestellt sind, wenn ihr wisst, dass es insgesamt 210 Räder gibt.
16. In den Winterferien fahren die 27 Schüler der Klasse 7A zum Skilaufen ins Skilager Straja. Zu ihnen kommen ein Junge und vier Mädchen aus der Klasse 7B dazu, sodass drei Fünftel der Anzahl der Mädchen die Anzahl der Jungen darstellt.
a. Ist es möglich, dass die Anzahl der Mädchen in der Klasse 7A gleich 15 ist? Begründet eure Antwort.
b. Wie viele Jungen sind in der Klasse 7A?
17. Ein Tourist hat eine Bergstrecke an vier Tagen zurückgelegt. Am ersten Tag legte er 25 % der Länge des Weges zurück, am zweiten Tag ein Drittel der restlichen Strecke, am dritten Tag 1 km mehr als am zweiten Tag und am vierten Tag die restlichen 4 km.
a. Prüft, ob der Tourist am zweiten Tag ein Viertel der Strecke zurückgelegt hat. Begründet eure Antwort.
b. Berechnet die Gesamtstrecke, die er in den vier Tagen zurückgelegt hat.

Beobachtungsbogen

- Ich war daran interessiert, Neues über Lösungsmethoden von Aufgaben zu lernen.
- Meine Teilnahme am Matheunterricht wurde von meinen Mitschülern und der Lehrkraft geschätzt.





E3

Elemente der Datenverarbeitung

1. Lektion

Kartesisches Produkt zweier nicht leerer Mengen. Orthogonales Achsensystem in der Ebene.

Darstellung von Paaren reeller Zahlen in einem orthogonalen Achsensystem.

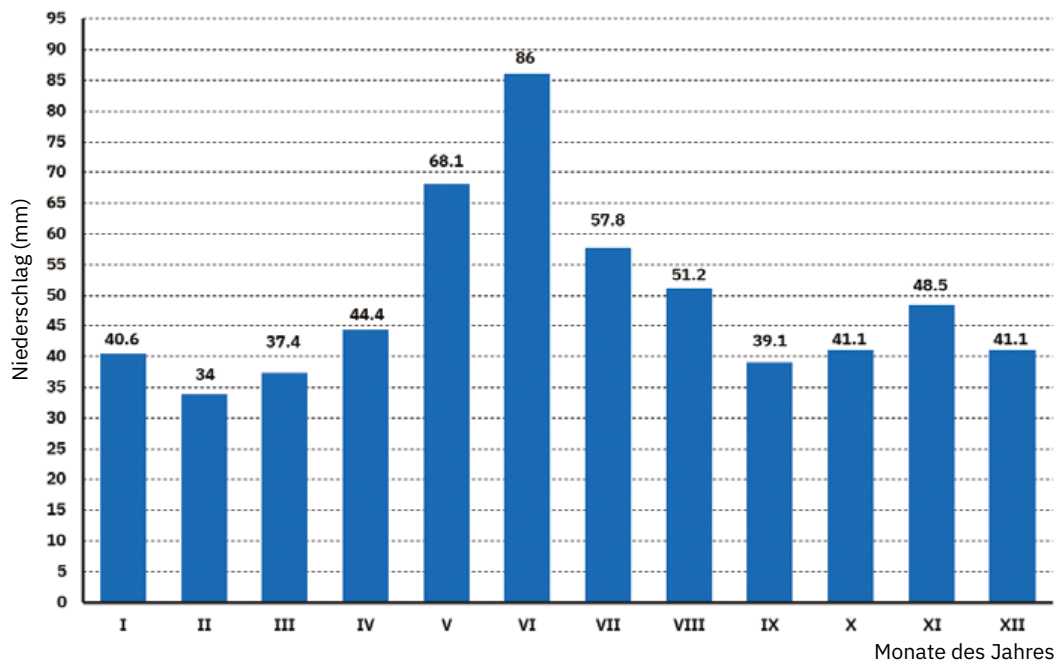
Darstellung von Punkten in einem orthogonalen Achsensystem.

Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene

2. Lektion

Darstellung und Interpretation von funktionalen Abhängigkeiten durch Tabellen, Diagramme und Grafiken. Häufigkeitspolygon

Wiederholung und Bewertung



Monatlicher Niederschlag an der Station Bukarest-Filaret, mehrjährige Mittelwerte

Die visuelle Darstellung von Daten hilft uns, große Mengen von Daten, Trends und Beziehungen zwischen Daten zu verstehen. Die Verwendung von Diagrammen im Alltag ist nützlich, um Analysen durchzuführen und schnelle Entscheidungen zu treffen.

Die Grafik der mehrjährigen Durchschnittswerte der aufgezeichneten Niederschläge zeigt die Entwicklung des Klimas in Rumänien: die Dürreperioden haben sich verlängert und die Niederschlagsmengen haben zugenommen.

1. Lektion: Kartesisches Produkt zweier nicht leerer Mengen. Orthogonales Achsensystem in der Ebene. Darstellung von Paaren reeller Zahlen in einem orthogonalen Achsensystem. Darstellung von Punkten in einem orthogonalen Achsensystem. Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene

Schlüsselwörter

Kartesisches Produkt

Zahlenpaare

Entfernung

Achsensystem

Punkte

Kartesisches Produkt zweier nicht leerer Mengen

Problemstellung

Vlad hat zwei Würfel, einen gelben und einen roten. Es stellt sich die Frage: Wie viele Zahlenpaare können beim Würfeln der beiden Würfel herauskommen?

Wenn zum Beispiel der gelbe Würfel die Fläche mit einem Punkt zeigt, kann der rote Würfel die Fläche mit einem Punkt oder die Fläche mit 2 Punkten oder 3, 4, 5 oder 6 Punkten zeigen. Wir können also 6 Paare bilden, bei denen der gelbe Würfel einen Punkt zeigt. Wenn der gelbe Würfel zwei Punkte zeigt, können wir ebenfalls 6 Paare bilden.

Da die Würfel 6-seitig sind, bedeutet dies, dass es insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Paare gibt.

Was stellen wir fest?

Wenn du zwei Würfel wirfst, erhältst du 36 Zahlenpaare. In jedem Paar steht die erste Zahl für die Punkte auf dem ersten Würfel und die zweite Zahl für die Punkte auf dem zweiten Würfel.



Merke dir!

Bei zwei nicht leeren Mengen A und B bezeichnet (a, b) ein geordnetes Paar von Elementen, bei dem das erste Element aus der Menge A und das zweite Element aus der Menge B stammt.

Wir bezeichnen mit dem kartesischen Produkt zweier Mengen A und B die Menge aller geordneten Paare (a, b) , wobei $a \in A$ und $b \in B$ ist. Wir schreiben $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$.

Beispiele

1. Wenn $A = \{x, y\}$ und $B = \{m\}$, dann können wir die folgenden geordneten Paare bilden, wobei das erste Element aus A und das zweite Element aus B stammt: $(x, m), (y, m)$.

Die geordneten Paare, bei denen das erste Element von B und das zweite Element von A ist, sind: $(m, x), (m, y)$.

Dann ist $A \times B = \{(x, m), (y, m)\}$, und $B \times A = \{(m, x), (m, y)\}$.

Wir stellen fest, dass die Menge A zwei Elemente hat, die Menge B ein Element und die Mengen $A \times B$ und $B \times A$ jeweils zwei Elemente haben. Mit anderen Worten: $\text{card} A = 2$, $\text{card} B = 1$, und $\text{card}(A \times B) = 2 \cdot 1$ und $\text{card}(B \times A) = 1 \cdot 2$.

2. Wenn $A = \{1, 2\}$ und $B = \{0, 1, 3\}$, dann können wir die folgenden geordneten Paare bilden, wobei das erste Element aus A und das zweite Element aus B stammt: $B: (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 3)$.

Die geordneten Paare, bei denen das erste Element von B und das zweite von A stammt, sind: $(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)$, also: $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 3)\}$,

$B \times A = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.

Beachtet, dass die Menge A zwei Elemente hat, die Menge B drei Elemente und die Mengen $A \times B$ und $B \times A$ jeweils sechs Elemente haben. Mit anderen Worten: $\text{card} A = 2$, $\text{card} B = 3$, und $\text{card}(A \times B) = 2 \cdot 3 = 6$ und $\text{card}(B \times A) = 3 \cdot 2 = 6$.

Bemerkungen

1. Die geordneten Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$.

2. Bei einem geordneten Paar kommt es auf die Reihenfolge an, in der die Elemente geschrieben werden. Genauer gesagt haben wir:

a. wenn $a \neq b$, dann $(a, b) \neq (b, a)$;

b. wenn $A \neq B$, dann $A \times B \neq B \times A$;

$(a, b) \neq (b, a)$ und $A \times B \neq B \times A$.

3. Wenn A und B eine endliche Anzahl von Elementen haben und $\text{card} A = m$ und $\text{card} B = n$, dann ist $\text{card}(A \times B) = m \cdot n$.

Orthogonales Achsensystem. Darstellung von Paaren reeller Zahlen in einem orthogonalen Achsensystem. Darstellung von Punkten in einem orthogonalen Achsensystem

Problemstellung

Betrachtet die folgenden Zeichnungen:

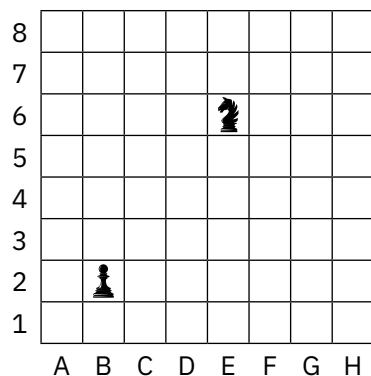


Abbildung 1

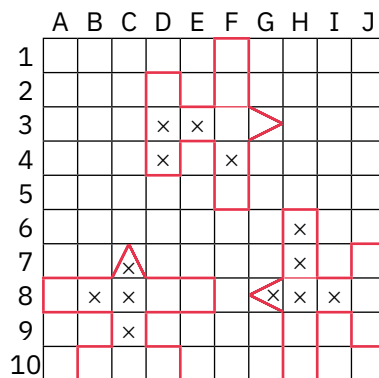


Abbildung 2

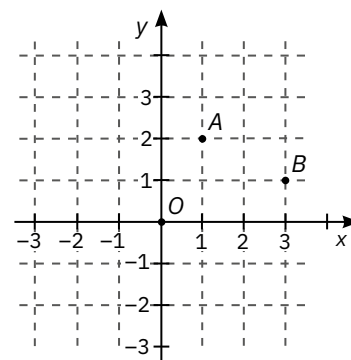


Abbildung 3

- Wie sind die Positionen der Schachfiguren in Abbildung 1?
- Luca und Vlad spielen „Aeroplanes“. Lucas Spielplan ist in Abbildung 2 dargestellt. Zwei Flugzeuge sind bereits im Cockpit „getroffen“. Welchen „Treffer“ sollte Vlad machen, um zu gewinnen?
- Könnst ihr die Positionen der Punkte A und B in Abbildung 3 charakterisieren?

Antwort:

- Der Bauer steht auf dem Feld B2 und der Springer auf dem Feld E6.
- Um zu gewinnen, muss Vlad die Spitze des letzten verbliebenen Flugzeugs, der G3, treffen.
- Die Punkte A und B liegen weder auf der Geraden Ox noch auf der Geraden Oy . Man beachte, dass der Punkt A im Schnittpunkt der Parallelen zur Geraden Oy , die durch den Punkt mit der Koordinate 1 auf Ox verläuft, und der Parallelen zu Ox , die durch den Punkt mit der Koordinate 2 auf Oy verläuft, liegt. Wir können also sagen, dass das Paar $(1, 2)$ A entspricht. In gleicher Weise entspricht das Paar $(3, 1)$ B.

Was stellen wir fest?

In der Praxis sind wir manchmal in der Situation, die Position von Objekten, Punkten usw. zu bestimmen. Wir haben gelernt, dass, wenn wir einen Ursprung, eine Richtung und eine Maßeinheit auf einer Geraden festlegen, wir einen Punkt auf der Geraden mit einer beliebigen reellen Zahl assoziieren können. Umgekehrt wird die Position eines beliebigen Punktes auf der Geraden durch eine reelle Zahl (die Koordinate des Punktes) charakterisiert. Als nächstes werden wir sehen, dass die Position eines jeden Punktes in der Ebene durch ein geordnetes Paar reeller Zahlen charakterisiert werden kann.

Merke dir!

Eine Gerade, auf der ein Punkt, der sogenannte Ursprung, eine Bewegungsrichtung und eine Maßeinheit festgelegt sind, wird als *Zahlenachse* bezeichnet.

Eine Menge, die aus einem geordneten Paar senkrechter Zahlenachsen mit einem gemeinsamen Ursprung und derselben Maßeinheit besteht, wird als *orthogonales Achsensystem* oder *kartesisches Koordinatensystem* bezeichnet.

Der gemeinsame Ursprung der beiden Achsen (der sogenannte Systemursprung) wird gewöhnlich mit O bezeichnet.

Typischerweise wird ein System orthogonaler Achsen wie in Abbildung 4 dargestellt. Die Pfeile geben die Bewegungsrichtung auf jeder Achse an. In der Regel wird die horizontale Achse, die sogenannte *x-Achse*, mit Ox bezeichnet, die vertikale Achse, die sogenannte *y-Achse*, mit Oy , und das orthogonale Achsensystem (Ox, Oy) wird kurz mit xOy bezeichnet.

In einem orthogonalen Achsensystem werden die Ox -Achse und jede zu ihr parallele Gerade als horizontale Geraden und die Oy -Achse und jede zu ihr parallele Gerade als vertikale Geraden bezeichnet.

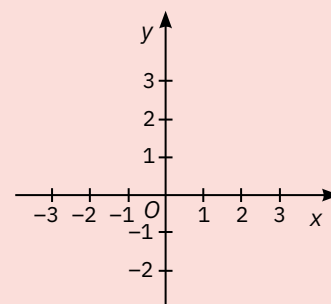


Abbildung 4



- Jedes geordnete Paar (a, b) reeller Zahlen kann in der Ebene durch einen Punkt M dargestellt werden, der im Schnittpunkt der durch den Koordinatenpunkt a auf Ox verlaufenden vertikalen Geraden mit der durch den Koordinatenpunkt b auf Oy verlaufenden horizontalen Geraden liegt. Der Punkt M wird die *geometrische Darstellung* des Paares (a, b) genannt.
- Jedem Punkt M in der Ebene kann ein Paar reeller Zahlen (a, b) zugeordnet werden, wobei a die Koordinate der Projektion des Punktes M auf die Achse Ox und b die Koordinate der Projektion des Punktes M auf die Achse Oy ist.

Die Zahlen a und b sind die *kartesischen Koordinaten* des Punktes M . Wir sagen, dass a die *Abszisse* und b die *Ordinate* des Punktes M ist.

In beiden Fällen bezeichnen wir $M(a, b)$ und lesen: Punkt M mit den Koordinaten a und b oder Punkt M mit der Abszisse a und der Ordinate b . Wir bezeichnen auch $M(x_M, y_M)$, wobei $x_M = a$ und $y_M = b$.

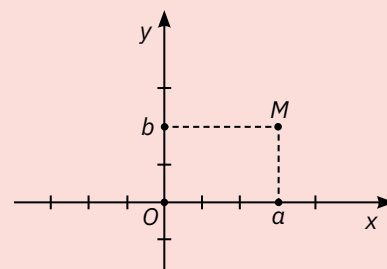


Abbildung 5

Beispiele

Wir betrachten ein System orthogonaler Achsen (eine kartesische Referenz) xOy .

- Um den Punkt $M(1, 2)$ im xOy -Rahmen darzustellen, gehen wir wie folgt vor (siehe Abbildung 6):
 - wir ziehen eine gestrichelte Gerade parallel zu Oy durch den Koordinatenpunkt 1 auf der Ox -Achse;
 - wir ziehen eine gepunktete Gerade parallel zu Ox durch den Koordinatenpunkt 2 auf der Achse Oy ;
 - der Schnittpunkt der beiden Parallelen ist $M(1, 2)$.
 Das Gleiche gilt für die Darstellung der Punkte $N(-2, 3)$, $P(-3, -1)$ oder $Q(4, -2)$ (Abbildung 6).
- Es seien die Punkte $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$ und $C(3, 0)$. Die waagerechte Gerade, die durch den 0-Koordinatenpunkt auf der Oy -Achse verläuft, ist die Ox -Achse, sodass der Punkt $A(-2, 0)$ der -2 -Koordinatenpunkt auf der Ox -Achse ist. Analog dazu sind die Punkte $B(1, 0)$ und $C(3, 0)$ die Koordinatenpunkte 1 bzw. 3 auf der Ox -Achse (Abbildung 7).
- Es seien die Punkte $D(0, 3)$ und $E(0, -2)$. Da die vertikale Gerade, die durch den 0-Koordinatenpunkt auf der Ox -Achse verläuft, die Oy -Achse ist, ist der Punkt $D(0, 3)$ der 3-Koordinatenpunkt auf der Oy -Achse. In ähnlicher Weise ist der Punkt $E(0, -2)$ der Punkt mit der Koordinate -2 auf der Oy -Achse (Abbildung 7).

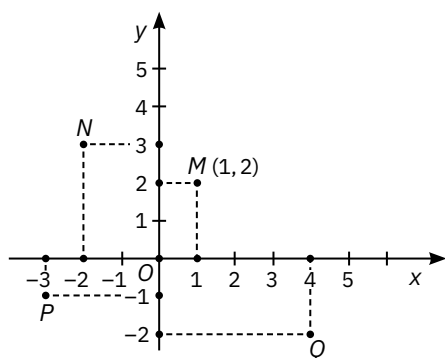


Abbildung 6

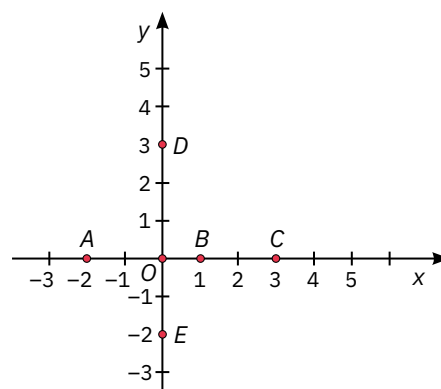


Abbildung 7

Bemerkungen

- Der Ursprung O des orthogonalen Achsensystems hat Koordinaten gleich 0. Wir schreiben $O(0,0)$.
- Der Punkt M liegt dann und nur dann auf der Ox -Achse, wenn die Ordinate des Punktes M gleich 0 ist. Also:
 - a. wenn $M(x_M, y_M) \in Ox$, dann $y_M = 0$;
 - b. wenn $a \in \mathbb{R}$, liegt der Punkt $M(a, 0)$ auf der Achse Ox .
- Der Punkt M liegt nur dann auf der Achse Oy , wenn die Abszisse des Punktes M gleich 0 ist. Also:
 - a. wenn $M(x_M, y_M) \in Oy$, dann $x_M = 0$;
 - b. wenn $b \in \mathbb{R}$, liegt der Punkt $M(0, b)$ auf der Achse.

Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene

Es sei daran erinnert, dass auf der Zahlenachse der Abstand zwischen dem Punkt A mit der Abszisse x_A und dem Punkt B mit der Abszisse x_B gleich $AB = |x_B - x_A|$ ist. Im Folgenden werden wir sehen, wie man den Abstand zwischen zwei Punkten berechnet, wenn ihre kartesischen Koordinaten bekannt sind.

Problemstellung

Betrachten wir die Punkte $A(2, 1)$ und $B(5, 5)$. Wir wollen die Länge der Strecke AB berechnen (Abbildung 8).

Zunächst bezeichnen wir mit C den Schnittpunkt der Parallelen durch A in Ox mit der Parallelen durch B in Oy . Daraus ergibt sich das Dreieck ACB , rechtwinklig in C , mit den Schenkelängen:

$$AC = x_C - x_A = 5 - 2 = 3 \text{ und } BC = y_B - y_C = 5 - 1 = 4.$$

Wendet man den Satz des Pythagoras auf das Dreieck ABC an, so erhält man: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, also $AB = 5$.

Beachtet, dass AB direkt wie folgt berechnet werden kann:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

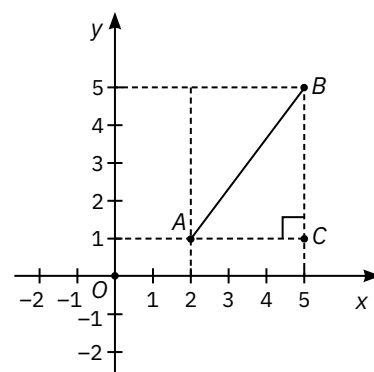


Abbildung 8

Merke dir!

Wenn $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ zwei Punkte in der Ebene sind, dann wird der Abstand zwischen den Punkten A und B wie folgt berechnet: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Problemstellung

Stellt die Punkte $A(-2, 1)$ und $B(4, 3)$ in einem orthogonalen Achsensystem xOy dar und bestimmt dann die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke AB mit der Bezeichnung M .

Lösung:

Wir stellen zunächst die Punkte A und B im System xOy dar.

Wir zeichnen das Segment AB und fixieren den Punkt M , den Mittelpunkt des Segments AB .

Wir konstruieren dann Parallelen durch die Punkte A, M, B zur Achse Oy und notieren ihre Schnittpunkte mit der Achse Ox mit A', M' bzw. B' (Abbildung 9).

Da $Oy \perp Ox$ ist, folgt daraus, dass $AA' \perp Ox$, $MM' \perp Ox$ und $BB' \perp Ox$.

Außerdem ist $AA' \parallel MM' \parallel BB'$, also ist $ABB'A'$ ein rechtwinkliges Trapez.

Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AB . Daraus folgt, dass der Punkt M' der Mittelpunkt des Strecke

$A'B'$ ist. Dann ist $A'M' = \frac{A'B'}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$, also $OM' = 1$.

MM' ist die Mittellinie des Trapezes $ABB'A'$. Daraus folgt: $MM' = \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$, also $OM'' = 2$.

Die Koordinaten des Punktes M sind also $(1, 2)$.

Was stellen wir fest?

Die Koordinaten des Punktes M können wie folgt berechnet werden: $x_M = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ und $y_M = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Analysiert, wie die vorhergehende Aufgabe zu lösen ist, und erläutere folgende Aussage:

Für zwei beliebige Punkte $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ sind die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke AB

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ und } y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Erarbeitet in Teams eine ähnliche Aufgabe und stellt die Lösung euren Mitschülern vor.

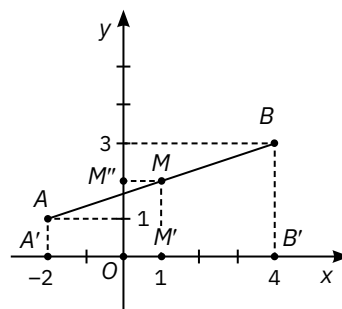


Abbildung 9

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Betrachtet die Mengen $A = \{1, 3, 5\}$ und $B = \{-1, 0, 3\}$.
 - a. Bestimmt die kartesischen Produkte $A \times B$, $B \times A$ und $A \times A$.
 - b. Bestimmt $\text{card}(A \times B)$, $\text{card}(B \times A)$ und $\text{card}(A \times A)$.
 - c. Stellt die Elemente der Menge $A \times B$ in einem orthogonalen Achsensystem xOy dar.



Lösung:

a. $A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 3), (3, -1), (3, 0), (3, 3), (5, -1), (5, 0), (5, 3)\}$.
 $B \times A = \{(-1, 1), (-1, 3), (-1, 5), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$.
 $A \times A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$.

b. $\text{card } A = 3$, $\text{card } B = 3$. Das ergibt $(A \times B) = \text{card}(B \times A) = 3 \cdot 3 = 9$ und $\text{card}(A \times A) = \text{card } A \cdot \text{card } A = 9$.

c. Wir stellen jedes Paar von reellen Zahlen der $A \times B$ -Menge in einem Achsensystem xOy dar und erhalten ein Diagramm wie in Abbildung 10.

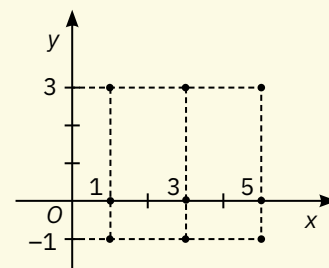


Abbildung 10

2. Es seien die Punkte $A(0, 3)$, $B(-3, -1)$ und $C(3, -1)$.

a. Stellt die Punkte A , B und C in einem orthogonalen Achsensystem xOy dar.

b. Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC .

c. Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

d. Bestimmt die Koordinaten des Punktes M , wobei M der Mittelpunkt der Seite AC ist.

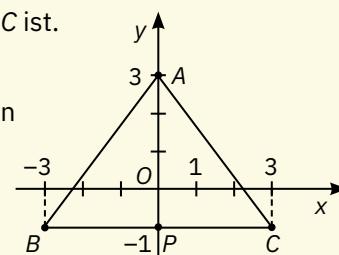


Abbildung 11

Lösung:

a. Wir tragen die Punkte im System xOy ein und erhalten ein Diagramm wie in Abbildung 11.

b. $AB = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$,

$AC = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

BC kann mit der Formel für den Abstand zwischen zwei Punkten berechnet werden oder, schneller, indem man feststellt, dass

$BC = |x_B| + |x_C| = |-3| + |3| = 6$.

Dann ist $U_{ABC} = AB + AC + BC = 5 + 5 + 6 = 16$.

c. Da $AB = AC$ ist, folgt daraus, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist, also ist AO die Höhe, die Seitenhalbierende usw.

Nimmt man P als Schnittpunkt zwischen der Gerade BC und der Achse Oy , so ergibt sich, dass AP die Höhe des Dreiecks ABC und $AP = AO + OP = 3 + 1 = 4$ ist. Wir haben $Fl_{ABC} = \frac{BC \cdot AP}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

d. Wenn M der Mittelpunkt der Seite AC ist, $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$ und $y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Also $M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

3. Bestimmt die Koordinaten der Symmetrie des Punktes $A(-2, 4)$ zum Punkt $M(1, 1)$.

Lösung:

Zunächst stellen wir die beiden Punkte in einem orthogonalen Achsensystem xOy dar, wie in Abbildung 12.

Die Symmetrie des Punktes A in Bezug auf den Punkt M ist ein Punkt A' , sodass M der Mittelpunkt der Strecke AA' ist (gemäß der Definition der Symmetrie eines Punktes in Bezug auf einen anderen Punkt).

Daraus folgt, dass $x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$, also $1 = \frac{-2 + x_{A'}}{2}$, d. h., $2 = -2 + x_{A'}$, also $x_{A'} = 4$.

Auf die gleiche Art und Weise: $y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$, also $1 = \frac{4 + y_{A'}}{2}$, d. h., $2 = 4 + y_{A'}$, also $y_{A'} = -2$. Dies ergibt den Punkt $A'(4, -2)$.

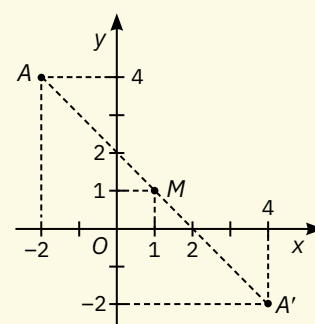


Abbildung 12

Vorgeschlagene Aufgaben

- Bestimmt die reellen Zahlen x , y und z , wobei ihr wisst, dass $(x, 2) = (3, 2)$, $(y, 4) = (-1, 4)$ und $(2, z) = (2, 1)$.
- Betrachtet die Mengen $A = \{1, 3\}$ und $B = \{0, 1\}$.
 - Bestimmt die kartesischen Produkte $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ und $B \times B$.
 - Berechnet $\text{card}(A \times B)$, $\text{card}(B \times A)$, $\text{card}(A \times A)$ und $\text{card}(B \times B)$.
- Betrachtet die Mengen $A = \{-2; -1; 1; 6\}$ und $B = \{2; \sqrt{5}\}$.
 - Bestimmt die kartesischen Produkte $A \times B$, $B \times A$ und $B \times B$.
 - Berechnet $\text{card}(A \times B)$, $\text{card}(B \times A)$, $\text{card}(A \times A)$ und $\text{card}(B \times B)$.

4. Menge A hat 5 Elemente und Menge B hat 8 Elemente. Wählt die richtige Antwort aus den folgenden Optionen. Die Menge $A \times B$ hat:

- A. 13 Elemente; B. 5^8 Elemente; C. 8^5 Elemente; D. 40 Elemente.

5. Zeichnet die Punkte $A(2, 4)$, $B(-1, 3)$, $C(-3, -2)$, $D(4, -4)$, $E(3, 0)$ und $F(0, -3)$ in einem orthogonalen Achsensystem.

6. Stellt die Punkte $A(1,5; 2)$, $B(-2,5; -1)$, $C(2,3; -1,5)$, $D\left(-\frac{5}{2}; -2,3\right)$, $E(-\sqrt{2}; 0)$ und $F(0; 4,5)$ in einem orthogonalen Achsensystem dar.

7. Bestimmt die Koordinaten der Punkte A , B , C , D , E und F in Abbildung 13.

8. Betrachtet die Punkte $A(1, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(4, -1)$.

- a. Zeichnet die Punkte A , B und C in einem orthogonalen Achsensystem.
b. Berechnet die Abstände AB , AC und BC .
c. Bestimmt die Koordinaten der Mittelpunkte der Strecken AB , AC und BC .

9. Betrachtet die Punkte $A(0, 4)$, $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$.

- a. Stellt die Punkte A , B und C in einem orthogonalen Achsensystem xOy dar.
b. Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC .
c. Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
d. Bestimmt die Koordinaten der Punkte M und N , wobei M der Mittelpunkt der Seite AC und N der Mittelpunkt der Seite AB ist.

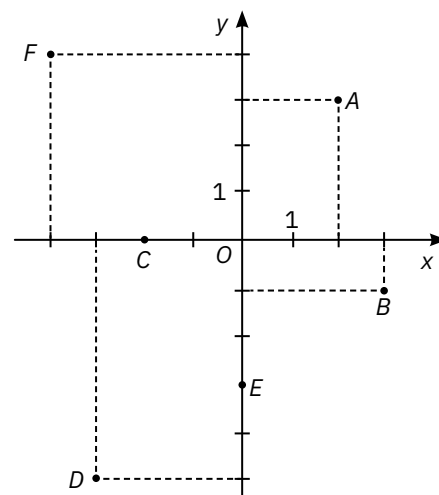


Abbildung 13

10. Betrachtet die Punkte $A(-2, 0)$, $B(1, 4)$, $C(1, -4)$.

- a. Stellt die Punkte A , B und C in einem orthogonalen Achsensystem xOy dar.
b. Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC .
c. Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
d. Bestimmt die symmetrischen Koordinaten der Punkte A und C zum Punkt B .

11. Betrachtet die Punkte $A(0, 3)$ und $B(x, 6)$. Bestimmt die reelle Zahl x , für die $AB = 5$ ist.

12. Bestimmt im orthogonalen Achsensystem xOy in Abbildung 14:

- a. die Koordinaten der Punkte M , N , P ;
b. das kartesische Produkt $A \times B$, wobei A die Menge ist, die aus den Abszissen der Punkte M , N , P besteht, und B die Menge ist, die aus den Ordinaten der Punkte M , N , P besteht.

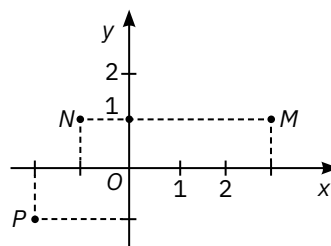


Abbildung 14

13. Abbildung 15 zeigt das kartesische Produkt $A \times B$. Bestimmt die Elemente von A und B .

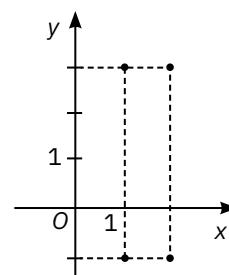


Abbildung 15

Test

1. Betrachtet die Mengen $A = \{0, 2, 3\}$ und $B = \{-1, 0\}$.

Bestimmt die kartesischen Produkte $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ und $B \times B$.

(3 Pkte.)

2. Betrachtet die Punkte $A(1, 3)$ und $B(-2, 1)$. Wählt die richtige Antwort. Nur ein Modell ist richtig. Die Symmetrie von Punkt A zu Punkt B ist Punkt:

- A. $A'(-1, 4)$; B. $A'(5, 1)$; C. $A'(-5, -1)$; D. $A'(-5, 1)$. (3 Pkte.)

3. Betrachtet die Punkte $A(3, -3)$, $B(-3, 5)$, $C(-3, -3)$.

- a. Stellt die Punkte A , B und C in einem orthogonalen Achsensystem xOy dar.
b. Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC .
c. Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

(3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



2. Lektion: Darstellung und Interpretation von funktionalen Abhängigkeiten durch Tabellen, Diagramme und Grafiken. Häufigkeitspolygon

Schlüsselwörter

funktionale Abhängigkeit

Tabelle

Diagramm

Frequenz

Grafik

Häufigkeitspolygon

Mathe im Alltag

Das Diagramm in Abbildung 1 zeigt die von einem Athleten an fünf Tagen zurückgelegten Kilometer.

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der an einem Tag zurückgelegten Kilometer und der Anzahl der an diesem Tag gefahrenen Kilometer.

Wie sieht diese Beziehung aus?

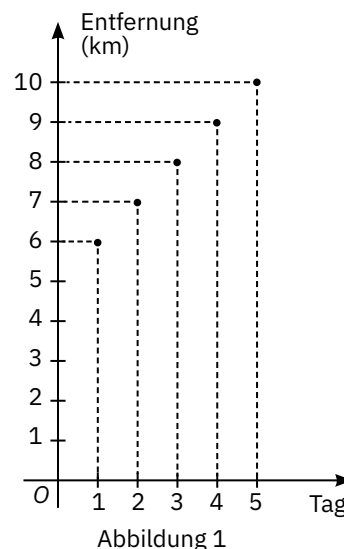
Antwort:

Am ersten Tag legte er 6 km zurück, am zweiten Tag 7 km, am dritten Tag 8 km usw.

Wir können sagen, dass die Anzahl der gefahrenen Kilometer um 5 höher ist als die Anzahl der an diesem Tag gefahrenen Kilometer.

Was stellen wir fest?

Im vorangegangenen Beispiel haben wir eine Entsprechung zwischen den Elementen zweier Mengen, der Menge der Tage und der Menge der zurückgelegten Kilometer herausgestellt.



Merke dir!

A und B seien zwei nicht leere Mengen. Wir sagen, dass es eine *funktionale Abhängigkeit* von A zu B gibt wenn jedes Element der Menge A mit einem einzigen Element der Menge B verbunden ist.

Im obigen Sinne wird die Regel, nach der jedes Element $a \in A$ mit einem eindeutigen Element $b \in B$ verbunden ist, als *Korrespondenzgesetz* oder *funktionale Beziehung* von Menge A zu Menge B bezeichnet. Man schreibt $a \rightarrow b$.

Bemerkung

1. Eine Regel, die eine Korrespondenz $a \rightarrow b$ zwischen den Elementen von A und B herstellt, wobei $a \in A$ und $b \in B$, ist eine funktionale Beziehung (Abhängigkeit) von A zu B , wenn:
 - a. jedem Element $a \in A$ ein Element $b \in B$ zugeordnet ist;
 - b. wenn $a \rightarrow b$ und $a \rightarrow c$, dann ist $b = c$. Mit anderen Worten, das Element $a \in A$ ist mit einem einzigen Element $b \in B$ verbunden.
2. Eine funktionale Abhängigkeit von Menge A zu Menge B kann durch eine Tabelle, ein Diagramm oder eine Grafik dargestellt werden.

Beispiele

1. Ein Kilo Äpfel kostet 2 Lei. Dann kosten 2 Kilo Äpfel 4 Lei, 3 Kilo Äpfel kosten 6 Lei, 5 Kilo Äpfel kosten 10 Lei. Wir können diese Daten in eine Tabelle der Form schreiben:

Masse in kg	1	2	3	5
Gezahlter Betrag in Lei	2	4	6	10

Notieren wir die Masse der Äpfel mit x und die bezahlte Summe mit y , ist die funktionale Beziehung $y = 2x$, wobei $x \in \{1, 2, 3, 5\}$. Die gleichen Daten können auch durch Diagramme (Abbildung 2) oder eine Grafik (Abbildung 3) dargestellt werden.

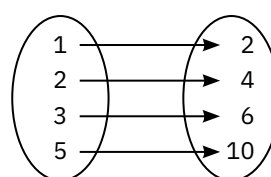


Abbildung 2

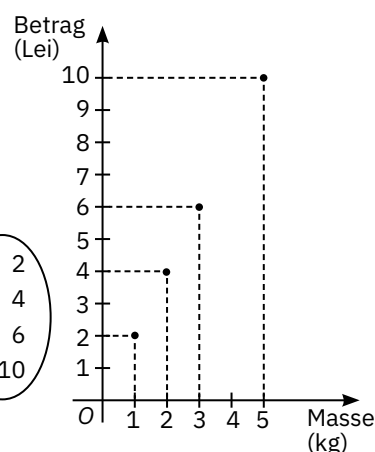


Abbildung 3

2. Ein Radfahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 km pro Stunde. Er wird also 15 km in 1,5 Stunden, 20 km in 2 Stunden, 30 km in 3 Stunden, 35 km in 3,5 Stunden, 60 km in 6 Stunden zurücklegen. Diese Daten können wie folgt in eine Tabelle eingetragen werden:

Zeit (Stunden)	1	1,5	2	3	3,5	6
Entfernung (km)	10	15	20	30	35	60

Wenn wir die Zeit (in Stunden) mit x und die vom Radfahrer zurückgelegte Strecke (in Kilometern) mit y bezeichnen, erhalten wir die funktionale Beziehung $y = 10x$. Wir können die Daten in der Tabelle durch Diagramme (Abbildung 4) oder eine Grafik (Abbildung 5) darstellen.

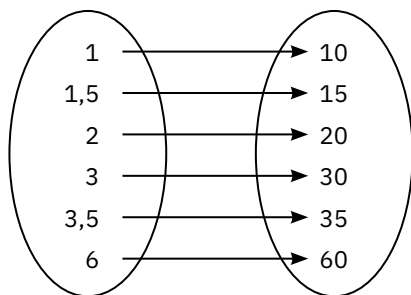


Abbildung 4

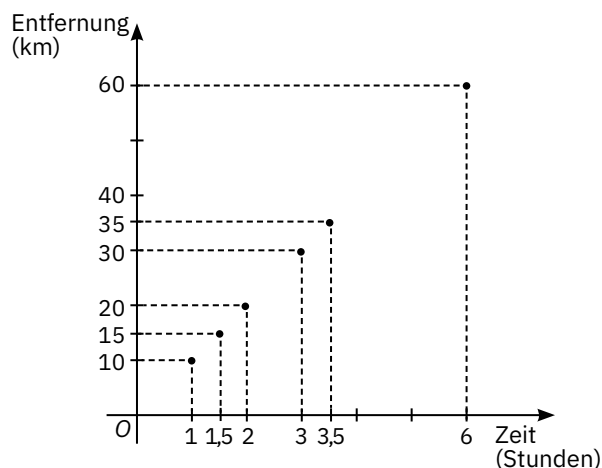


Abbildung 5

Mathe im Alltag

Schüler der Klasse 7A erzielen in einem Mathetest folgende Ergebnisse:

Note	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Schüler	1	2	4	5	7	4	2

Diese Ergebnisse können in einem Kreisdiagramm (Abbildung 6) oder einem Balkendiagramm (Abbildung 7) dargestellt werden.

Testergebnisse der Klasse 7A

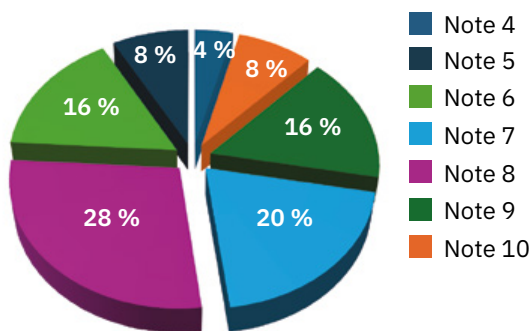


Abbildung 6

Anzahl der Noten

Testergebnisse der Klasse 7A

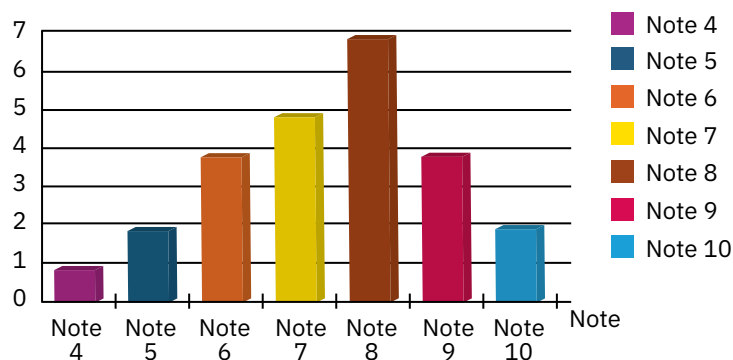


Abbildung 7

Was stellen wir fest?

Analysiert man die Ergebnisse der Schüler, so stellt man fest, dass die Note 4 nur einmal, die Noten 5 und 10 jeweils zweimal, die Noten 6 und 9 viermal usw. vorkommen. Die Zahl, die angibt, wie oft eine Note in den Klassenergebnissen vorkommt, wird als Häufigkeit bezeichnet.

Wir stellen die Ergebnisse wie in Abbildung 8 dar.

Verbindet man die Ergebnisse nach Strecken, erhält man ein Polygon, das sogenannte Häufigkeitspolygon.

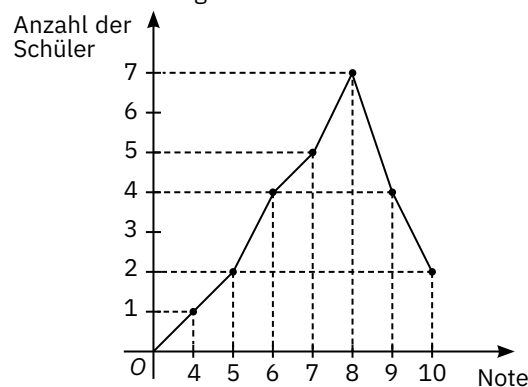


Abbildung 8

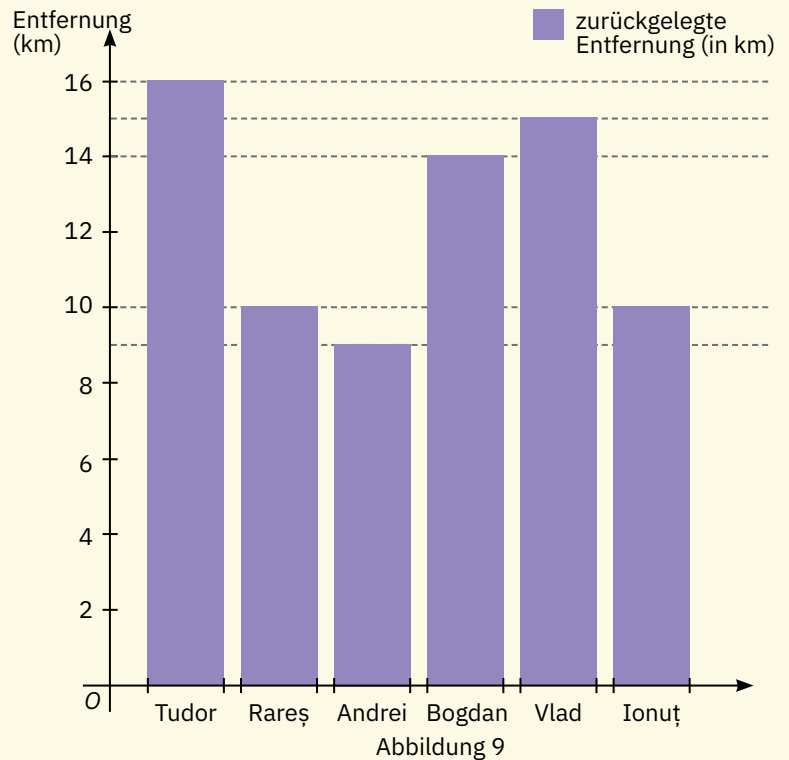


1. Das Diagramm in Abbildung 9 zeigt die von sechs Läufern während einer einstündigen Trainingseinheit zurückgelegten Strecken.

- Wie viele Kilometer hat Rareș zurückgelegt? Was ist mit Vlad?
- Welcher Läufer hat die meisten Kilometer zurückgelegt?
- Wie viele Kilometer hat Tudor mehr zurückgelegt als Andrei?

Lösung:

- Dem Diagramm zufolge legte Rareș 10 Kilometer und Vlad 15 Kilometer zurück.
- Tudor hat die meisten Kilometer zurückgelegt, 16.
- Andrei legte 9 Kilometer zurück, Tudor 16 Kilometer.
 $16 - 9 = 7$. Tudor hat also 7 Kilometer mehr zurückgelegt als Andrei.



2. Abbildung 10 zeigt die Verteilung der 800 Schüler einer Schule nach der Art ihres Schulweges.

- Wie viel Prozent der Schüler fahren mit dem Bus zur Schule?
- Wie viele Schüler gehen zu Fuß zur Schule?

Lösung:

- Die Gesamtzahl der Schüler beträgt 100 %.
 Der Prozentsatz derjenigen, die mit dem Bus zur Schule fahren, beträgt dann $100\% - (30\% + 20\% + 15\%) = 100\% - 65\% = 35\%$.
- Die Anzahl der Schüler, die zu Fuß zur Schule gehen, wird wie folgt berechnet:
 $15\% \text{ von } 800 = \frac{15}{100} \cdot 800 = 120$.

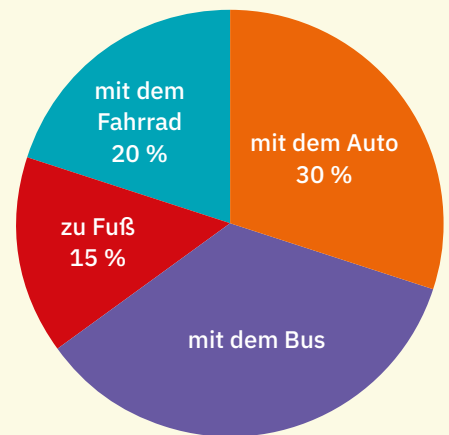


Abbildung 10

3. Bei einem Radiosender wird eine Umfrage mit der Frage durchgeführt:

Welches der folgenden Musikgenres hörst du am liebsten?

- Popmusik;
- Rock;
- Klassische Musik;
- Hip-Hop;
- House;
- Jazz;
- Volksmusik;
- Andere als die genannten?

Insgesamt haben 200 Personen an der Umfrage teilgenommen und die folgenden Antworten gegeben:

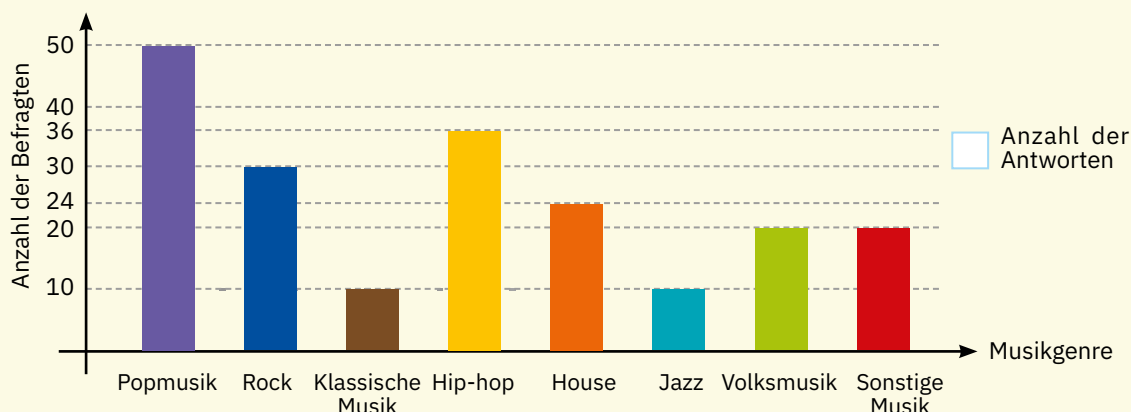
Pop: 50 Personen; 2. Rock: 30 Personen; 3. Klassische Musik: 10 Personen; 4. Hip-Hop: 36 Personen; 5. House: 24 Personen; 6. Jazz: 10 Personen; 7. Volksmusik: 20 Personen; 8. Sonstiges: 20 Personen.

- Wählt eine geeignete Methode (Diagramm oder Grafik), um die Antworten so darzustellen, dass die von den meisten Hörern bevorzugte Musikrichtung hervorgehoben wird.
- Wählt eine geeignete Form (Diagramm oder Grafik), um die Antworten so darzustellen, dass der prozentuale Anteil der von den meisten Zuhörern am meisten gehörten Musikrichtung ersichtlich wird.
- Wählt eine geeignete Form (Diagramm oder Grafik), um die Antworten so darzustellen, dass die Häufigkeit der Antworten für jedes Musikgenre hervorgehoben wird.

Lösung:

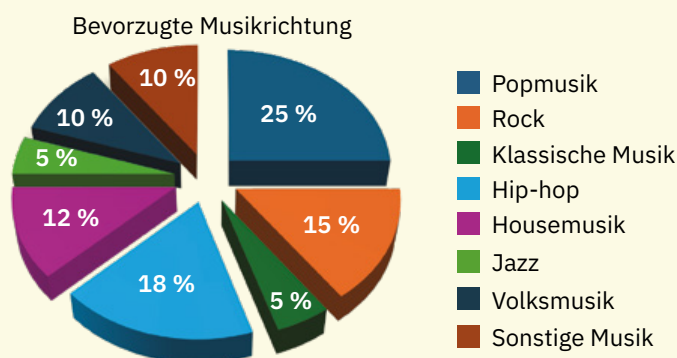
- a. Die bequemste Form der Darstellung ist in diesem Fall das Balkendiagramm (wie in Abbildung 11), da die bevorzugte Musikrichtung, in diesem Fall Popmusik, sofort hervorgehoben wird:

Abbildung 11



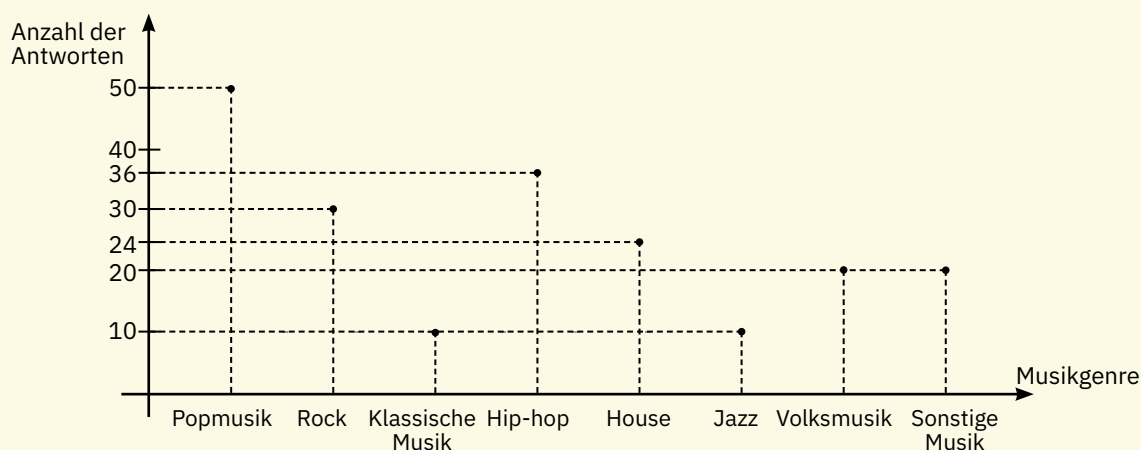
- b. Um die Prozentsätze hervorzuheben, ist ein Tortendiagramm nützlich, wie in Abbildung 12.

Abbildung 12



- c. Die Häufigkeit der Antworten wird durch eine Grafik, wie in Abbildung 13, besser verdeutlicht.

Abbildung 13



Projekt „Vermesser in der Schule“

Die Klasse wird in Gruppen von 3–4 Schülern aufgeteilt.

Jede Gruppe misst vier Räume in der Schule aus. Diese können ausgewählt werden: Klassenräume, Bibliothek, Labore, Sporthalle usw. Die Gruppen einigen sich zu Beginn auf die vier Räume.

Sobald die Räume ausgewählt sind, entscheidet jede Gruppe über ihren Materialbedarf, teilt die Aufgaben unter den Mitgliedern auf und nimmt dann Messungen vor.

Jede Gruppe muss die folgende Tabelle ausfüllen.

Halle	1	2	3	4
Länge (m)				
Breite (m)				
Umfang (m)				
Luft (m³)				

Bewertung des Projekts

Sobald die Messungen abgeschlossen sind, präsentieren die Gruppen die Ergebnisse. Die Ergebnisse werden verglichen, eventuelle Unterschiede werden analysiert und die Ergebnisse werden diskutiert.

Die Gruppe mit den meisten Abmessungen, die mit den tatsächlichen Raumgrößen übereinstimmen, gewinnt. Auf der Grundlage der aktuellen Ergebnisse können Schätzungen für die Umfänge und Flächen anderer Räume in der Schule vorgenommen werden.

Vorgeschlagene Aufgaben

- Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung der Schüler einer Klasse nach ihrem Durchschnitt in Mathematik im vorangegangenen Schuljahr.

Mittelnoten	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Schüler	1	4	4	5	5	4	3

Füllt die Lücken aus, sodass die Aussagen wahr sind.

- Die Anzahl der Schüler in dieser Klasse mit einem Durchschnitt von 8 ist gleich
 - Die Anzahl der Schüler in dieser Klasse mit einem Durchschnitt von mehr als 8 ist gleich
 - Die Anzahl der Schüler in dieser Klasse, die mindestens einen Notendurchschnitt von 6 und höchstens einen Notendurchschnitt von 8 erreicht haben, entspricht
- Die folgende Tabelle zeigt die Messungen, die an einer Wetterstation zur gleichen Zeit an jedem Tag einer Märzwoche vorgenommen wurden:

Tag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
Temperatur (°C)	13	11	9	10	13	16	12

Füllt die Lücken aus, sodass die Aussagen wahr sind.

- Die niedrigste in dieser Woche gemessene Temperatur betrug ... °C.
 - Der Unterschied zwischen der höchsten und der niedrigsten Temperatur betrug ... °C.
 - Die durchschnittliche Temperatur in dieser Woche betrug ... °C.
- Das Diagramm in Abbildung 14 zeigt die Abhängigkeit zwischen der von einem Bus zurückgelegten Strecke und der Zeit, in der die Strecke zurückgelegt wurde. Füllt die Lücke aus, um eine wahre Aussage zu erhalten.
Die Entfernung, die der Bus in 90 Minuten zurücklegt, beträgt ... Kilometer.
 - Das Diagramm in Abbildung 15 zeigt die Verteilung der 400 Schüler in einem Sportverein nach der Sportart, für die sie eingeschrieben sind.

Füllt die Lücken aus, sodass die Aussagen wahr sind.

- Der Prozentsatz der Schüler, die Handball spielen, beträgt ...%.
- Die Zahl der für Basketball eingeschriebenen Schüler beträgt

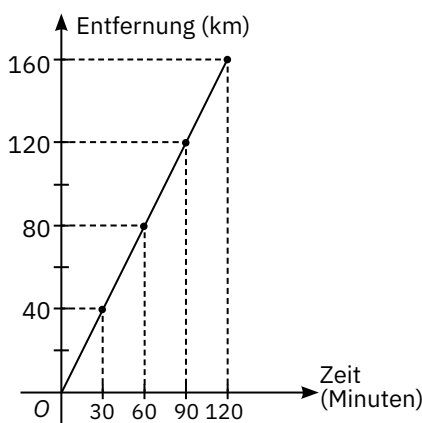


Abbildung 14

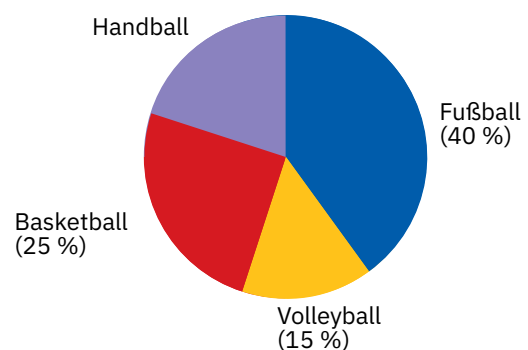


Abbildung 15

5. Ein Kilogramm Orangen kostet 4 Lei. Berechnet nun, wie viel Geld Dina zahlen müsste, wenn sie 2 kg, 4 kg, 5 kg, 9 kg, 15 kg bzw. 15 kg Äpfel kaufen wollte. Füllt die Ergebnisse in die folgende Tabelle ein:

Masse (in kg)	1	2	4	5	9	15
Preis (Lei)	4					

6. Ein Auto fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 Stundenkilometern. Füllt die folgende Tabelle entsprechend dem Muster aus:

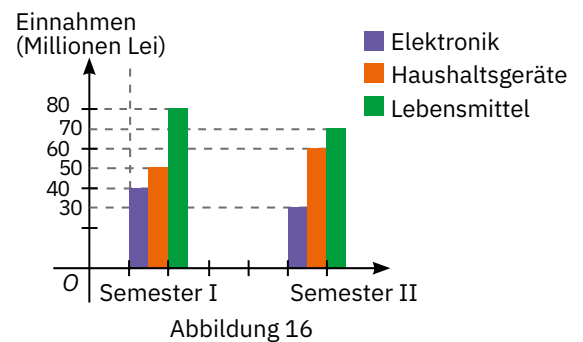
Zeit (Stunden)	1	2	4		8		12	
Entfernung (km)	90			450		900		1350

7. Füllt die folgende Tabelle aus:

Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks (cm)	3		5		9		18	
Umfang des gleichseitigen Dreiecks (cm)		12		21		42		72

8. Das Diagramm in Abbildung 16 zeigt die Einnahmen eines Geschäfts über zwei Halbjahreszeiträume.

- Wie viele Millionen Lei hat das Geschäft laut Tabelle in der ersten Jahreshälfte mit dem Verkauf von Elektronikprodukten verdient?
- In welchem Halbjahr hat das Geschäft laut der Grafik mehr Lebensmittel verkauft?
- In welchem Halbjahr ist das Einkommen höher und um wie viel?



9. Die Grafik in Abbildung 17 zeigt die Preisentwicklung einer Wohnung im Laufe eines Jahres.

- Wie hoch ist der Preis der Wohnung am Ende des Jahres?
- In welchen Monaten ist der Preis für die Wohnung gefallen?
- In welchem Monat ist der Preis am stärksten gesunken?
- In welchen Monaten haben die Preise stagniert?

10. Abbildung 18 zeigt die monatlichen Gewinne und Verluste eines Unternehmens in der ersten Hälfte eines Jahres.

- Seit wie vielen Monaten ist das Unternehmen in der Verlustzone?
- Wie hoch ist der Gewinn in den ersten beiden Monaten?
- Wie hoch ist der endgültige Gewinn nach sechs Monaten?

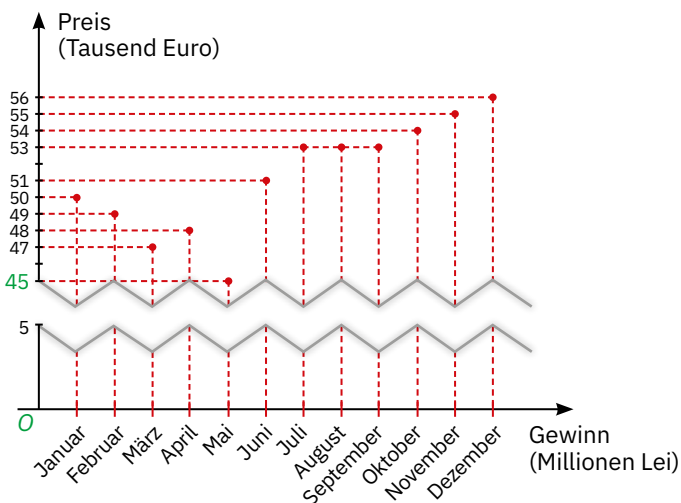


Abbildung 17

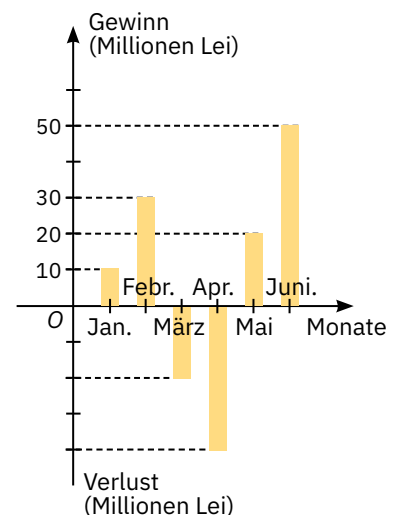


Abbildung 18

11. Um Sportteams an einer Schule zu gründen, beantworten die Schüler Fragebögen über ihre Lieblingssportarten. Eine der Fragen lautet:
Welcher der folgenden Sportarten ist dein Lieblingssport: 1. Fußball; 2. Basketball; 3. Handball; 4. Andere Sportart?
 Die 30 Schüler der Klasse 7A gaben folgende Antworten:
 1. Fußball – 12 Antworten; 2. Basketball – 9 Antworten; 3. Handball – 3 Antworten; 4. Andere Sportart – 6 Antworten.
- Wählt eine geeignete Methode (Diagramm oder Grafik), um die Antworten so darzustellen, dass die Lieblingssportart der meisten Schüler der Klasse 7A hervorgehoben wird.
 - Wählt eine geeignete Methode (Diagramm oder Grafik), um die Antworten so darzustellen, dass der Prozentsatz der Lieblingssportart der meisten Schüler der Klasse 7A hervorgehoben wird.
 - Wählt eine geeignete Form (Diagramm oder Grafik), um die Antworten so darzustellen, dass die Häufigkeit der Antworten für jede Sportart hervorgehoben wird.
12. Stellt eine funktionale Abhängigkeit zwischen den Menschenmengen $A = \{\text{Spanien, Tschechische Republik, Mexiko, China, Australien, Brasilien}\}$ und $B = \{\text{Europa, Asien, Australien, Nordamerika, Südamerika}\}$ fest und stellt diese durch ein Diagramm dar.
13. Betrachtet die funktionale Abhängigkeit $x \rightarrow y$ von der Menge $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ zur Menge $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, gegeben durch die Regel $y = x + 1$. Stellt die gegebene Abhängigkeit durch eine Tabelle, ein Diagramm und eine Grafik dar.
14. Stellt eine funktionale Abhängigkeit zwischen den Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 6, 9\}$ fest und stellt die Abhängigkeit in einem Diagramm dar.



Selbstbewertung

1. Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse, die die Schüler einer Klasse bei einem Test erzielt haben:

Note	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Schüler	2	3	3	4	4	5	3	1

- Wie viele Schülerinnen und Schüler haben der Tabelle zufolge die Note 7 erhalten?
- Wie viele Schüler haben laut Tabelle mindestens die Note 8 erreicht?
- Wie hoch ist der Klassendurchschnitt bei diesem Test?

(3 Pkte.)

2. Das Diagramm in Abbildung 19 zeigt die Verteilung der 30 Schüler einer achten Klasse nach ihrer Entscheidung über die Fortsetzung ihres Studiums.

- Wie hoch ist der prozentuale Anteil der Schüler, die sich für die berufliche Fachrichtung entschieden haben?
- Wie hoch ist der Prozentsatz der Studenten, die sich für den technischen Zweig entschieden haben?
- Wie viele Studenten haben sich für den theoretischen Studiengang entschieden?

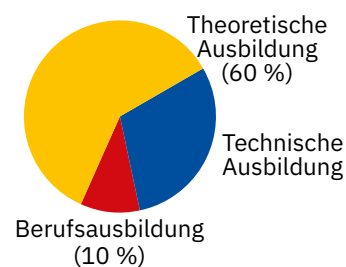


Abbildung 19

(3 Pkte.)

3. Stellt eine funktionale Abhängigkeit zwischen den Mengen $A = \{0, 1, 3\}$ und $B = \{2, 3, 5\}$ fest und stellt die Abhängigkeit in einem Diagramm dar.

(3 Pkte.)

Anmerkung. Für jeden richtig beantworteten Unterpunkt wird 1 Punkt vergeben. 1 Punkt von Amts wegen.
 Arbeitszeit: 20 Minuten.

Wiederholung und Bewertung

Kartesisches Produkt zweier nicht leerer Mengen • Orthogonales Achsensystem • Punktdarstellung in einem orthogonalem Achsensystem • Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene • Darstellung funktionaler Abhängigkeiten durch Tabellen, Diagramme und Grafiken

Schreibt für die Übungen 1–2 den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, in eure Hefte. Für die Übungen 3–11 schreibt die vollständigen Lösungen.

1. Wenn $(x, 3) = (4, 3)$, dann ist x gleich:

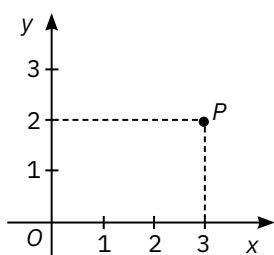
- a. 1; b. 2; c. 3; d. 4.

2. Wenn $\text{card} A = 4$, $\text{card} B = 6$, dann ist $\text{card}(A \times B)$ gleich:

- a. 10; b. 2; c. 24; d. -2.

3. Die Koordinaten des Punktes P in der nächsten Abbildung sind:

- a. $P(2; 3)$;
b. $P(3; 3)$;
c. $P(3; 2)$;
d. $P(2; 2)$.



4. Betrachtet die Tabelle:

Menge (kg)	2	3	4
Preis (Lei)	5	7,5	y

Füllt die Lücke aus, sodass die Aussage wahr ist. Der Wert von y ist ...

5. Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung der Schüler in einer Klasse nach der Sportart, für die sie in einem Sportverein angemeldet sind:

Sport	Basketball	Fußball	Handball	Volleyball
Anzahl der Schüler	9	11	4	4

Wenn man weiß, dass jeder Schüler nur eine Sportart betreibt und dass es zwei Schüler in der Klasse gibt, die keinen Sport treiben, kann man die Anzahl der Schüler in dieser Klasse bestimmen.

6. Betrachtet das Diagramm in Abbildung 20. Füllt die Lücke aus, sodass die Aussage wahr ist. Der hellere Teil entspricht = ...% der Scheibenfläche.

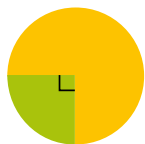
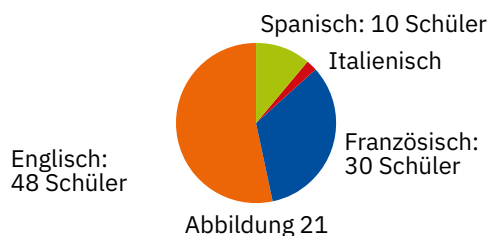


Abbildung 20

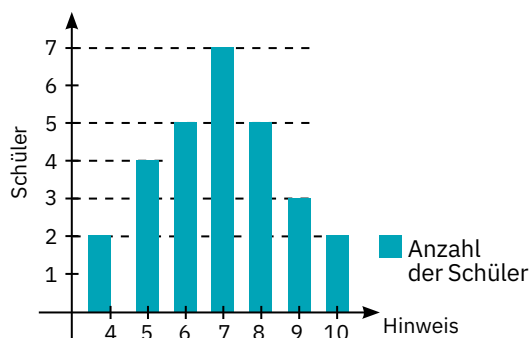
7. Das Diagramm in Abbildung 21 zeigt die Entscheidungen von 100 Schülern der sechsten Klasse

einer Schule in Bezug auf den Unterricht in modernen Sprachen:



Füllt die Lücke aus, sodass die Aussage wahr ist. Die Zahl der Sechstklässler, die sich für das Fach Italienisch entscheiden, liegt bei ...

8. Das folgende Diagramm zeigt die Verteilung der Noten, die die Schüler einer Klasse bei einem Test erzielt haben:



Welche der folgenden Aussagen ist richtig und welche ist falsch?

- a. 5 Schüler haben die Note 8. b. 6 Schüler haben die Note 5. c. Der Test wurde von 28 Schülern bestanden.

9. Betrachtet die Mengen $A = \{1, 2\}$ und $B = \{-1, 3\}$. Berechnet $A \times B$ und $B \times A$.

10. Betrachtet die Punkte $A(0, 2)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$.

- a. Zeichnet die Punkte A , B und C auf ein orthogonales Achsensystem.
b. Berechnet die Abstände AB , AC und BC .

11. Betrachtet die Punkte $A(x, 1)$ und $B(0, 4)$. Bestimmt die reelle Zahl x , für die $AB = 5$.

Beobachtungsbogen

- Ich war sehr daran interessiert, Neues über Lösungsmethoden von Aufgaben zu lernen.
► Meine Teilnahme am Matheunterricht wurde von meinen Mitschülern und der Lehrkraft geschätzt.



E4

Das Viereck

1. Lektion

Konvexes Viereck. Die Winkelsumme im konvexen Viereck

2. Lektion

Das Parallelogramm. Eigenschaften

3. Lektion

Anwendungen des Parallelogramms in der Dreiecksgeometrie. Mittellinie in einem Dreieck, Schwerpunkt eines Dreiecks

4. Lektion

Das Rechteck. Eigenschaften

5. Lektion

Der Rhombus. Eigenschaften

6. Lektion

Das Quadrat. Eigenschaften

7. Lektion

Das Trapez: Einteilung, Eigenschaften. Die Mittellinie im Trapez

8. Lektion

Umfänge und Flächeninhalte

**Wiederholung
und Bewertung**



Vierecke werden in der Grafik, der Bildhauerei, bei Logos, Verpackungen, der Computerprogrammierung und im Webdesign verwendet. Diese geometrischen Figuren sind die häufigsten Formen in der Architektur. Wir sehen Vierecke in fast allen Zeitschriften und Zeitungen, in der Form von Wohnzimmern und Hauswänden.

1. Lektion: Konvexes Viereck. Die Winkelsumme im konvexen Viereck

Schlüsselwörter

Vierecke

konvex

konkav

Umfang

Diagonale

Eckpunkte

Konvexes Viereck

Problemstellung

In den geometrischen Figuren 1–2 werden die verschiedenen Punkte A, B, C und D bzw. E, F, G und H in dieser Reihenfolge angenommen. Wir stellen fest, dass in jeder Abbildung drei der vier genannten Punkte nicht kollinear sind.

Außerdem haben die Strecken AB und CD oder BC und DA bzw. EF und GH oder FG und ER keinen gemeinsamen Punkt.

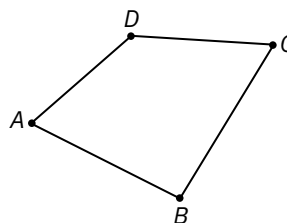


Abbildung 1

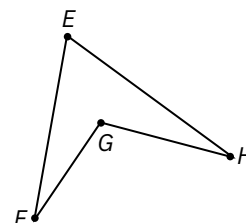


Abbildung 2

Merke dir!

Die obigen geometrischen Figuren, die durch die Verbindung der Strecken AB, BC, CD und DA bzw. EF, FG, GH und HE gebildet werden, werden als Vierecke bezeichnet und mit $ABCD$ bzw. $EFGH$ beschriftet.

Problemstellung

Untersuche die geometrischen Figuren 3–5 und entscheide, ob $ABCD$ ein Viereck ist.

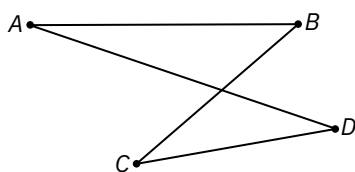


Abbildung 3

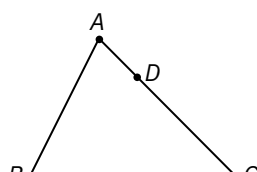


Abbildung 4

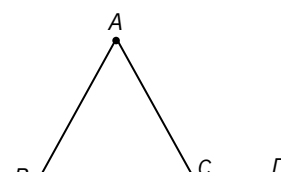


Abbildung 5

Rechtfertigung und Antwort

In Abbildung 3 schneiden sich die Strecken BC und AD in einem inneren Punkt; in Abbildung 4 sind die Punkte A, D und C kollinear, und in Abbildung 5 sind die Punkte B, C und D kollinear.

Keine dieser geometrischen Figuren stellt also das Viereck $ABCD$ dar.

Wir stellen fest, dass wir mit den Punkten in Abbildung 3 das Viereck $ABDC$ erhalten können (Abbildung 6).

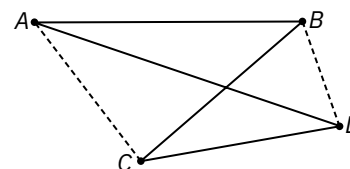


Abbildung 6

Merke dir!

- Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte/Spitzen des Vierecks $ABCD$ (Abbildung 7). Die Punkte A und B werden als benachbarte Scheitelpunkte oder aufeinanderfolgende Scheitelpunkte bezeichnet. Ebenso die Scheitelpunkte B und C, C und D bzw. A und D . Die Spitzen A und C sowie B und D werden als gegenüberliegende Scheitelpunkte bezeichnet.
- Ein Viereck wird beschriftet, indem man die Buchstaben, die die vier Spitzen bezeichnen, in kreisförmiger Reihenfolge hintereinander schreibt. So kann das Viereck $ABCD$ auch als $BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD$ oder $BADC$ beschriftet (gelesen) werden.

Definition. Ein Viereck, bei dem die Gerade, die durch zwei beliebige benachbarte Spitzen bestimmt wird, die beiden anderen Spitzen nicht trennt, heißt konvexes Viereck.

Im konvexen Viereck $ABCD$ zum Beispiel trennt die Gerade AB die Spitzen C und D nicht: Die beiden Spitzen C und D liegen in derselben Halbebene, die durch die Gerade AB bestimmt wird. Ebenso trennt die Gerade BC nicht die Spitzen A und D , die Gerade CD nicht die Spitzen A und B und die Gerade AD nicht die Spitzen B und C .

- Ein Viereck, das nicht konvex ist, nennt man ein konkaves Viereck. In dem konkaven Viereck $EFGH$ in Abbildung 8 beispielsweise trennt die Gerade FG die Spitzen E und H . Die beiden Eckpunkte E und H liegen in gegenüberliegenden Halbebenen, die durch die Gerade FG bestimmt werden.

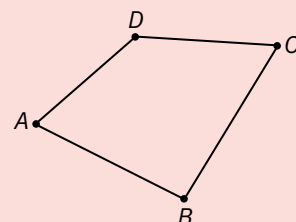


Abbildung 7

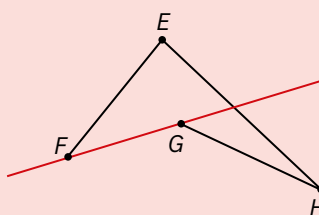


Abbildung 8

Merke dir!

In einem konvexen Viereck $ABCD$:

- Die Strecke, die an zwei aufeinanderfolgenden Eckpunkten des Vierecks endet, wird als Seite bezeichnet. Die Seiten des Vierecks $ABCD$ sind AB , BC , CD und AD .
- Zwei Seiten, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, werden als *aufeinanderfolgende Seiten* bezeichnet. Wir unterscheiden vier Paare von aufeinanderfolgenden Seiten: AB und BC , BC und CD , CD und AD bzw. AD und AB .
- Zwei Seiten, die keine gemeinsamen Enden haben, werden als *Gegenseiten* bezeichnet. Wir unterscheiden zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten: AB und CD oder AD und BC .
- Die Winkel BAD , ABC , BCD und ADC werden als *Winkel des Vierecks* bezeichnet. Die Scheitelpunkte dieser Winkel fallen mit den Eckpunkten des Vierecks zusammen. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, können wir diese Winkel auch als $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ und $\sphericalangle D$ bezeichnen.
- Zwei Winkel, die eine Seite des Vierecks teilen, werden als anliegende oder benachbarte Winkel bezeichnet. Es gibt vier Paare von anliegenden Winkeln: $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$, $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$, $\sphericalangle C$ und $\sphericalangle D$ bzw. $\sphericalangle D$ und $\sphericalangle A$.
- Zwei Winkel, die keine Seiten des Vierecks teilen, werden als *entgegengesetzte Winkel* bezeichnet. Es gibt zwei Paare von Gegenwinkeln: $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle C$ oder $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle D$.
- Die Strecke, die an zwei gegenüberliegenden Eckpunkten des Vierecks endet, wird *Diagonale* genannt. Diagonalen sind die Strecken AC und BD .

Beispiele

In Abbildung 9 ist das konvexe Viereck $MPST$ dargestellt. Überprüft euren Wissen anhand der nachstehenden Tabelle:

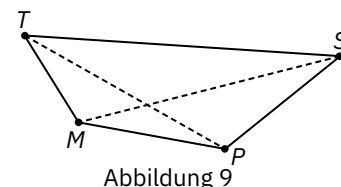


Abbildung 9

Benachbarte Spitzen	Gegenüberliegende Spitzen	Aufeinanderfolgende Seiten	Gegenüberliegende Seiten	Gegenüberliegende Winkel	Aufeinanderfolgende Winkel	Diagonalen
M mit P und T P mit M und S S mit P und T T mit S und M	M und S P und T	MP und PS PS und ST ST und TM TM und MP	MP und ST PS und MT	$\sphericalangle M$ und $\sphericalangle S$ $\sphericalangle P$ und $\sphericalangle T$	$\sphericalangle M$ mit $\sphericalangle P$ und $\sphericalangle T$ $\sphericalangle P$ mit $\sphericalangle M$ und $\sphericalangle S$ $\sphericalangle S$ mit $\sphericalangle P$ und $\sphericalangle T$ $\sphericalangle T$ mit $\sphericalangle M$ und $\sphericalangle S$	MS TP

Bemerkungen

$ABCD$ sei ein Viereck.

Die Menge der Punkte in der Ebene, die durch die Strecken AB , BC , CD und DA begrenzt werden, wird als das Innere des Vierecks $ABCD$ bezeichnet und $\text{Int}(ABCD)$ geschrieben.

Die Menge der Punkte in der Ebene, die weder zum Viereck noch zum Inneren des Vierecks $ABCD$ gehören, heißt das Äußere des Vierecks $ABCD$ und wird $\text{Ext}(ABCD)$ geschrieben.

Beispiel

In Abbildung 10 gehören die Punkte:

- A, B, C, D, K, L, M zum Viereck $ABCD$;
- E, F, G zum Inneren des Vierecks $ABCD$;
- H, I, J zum Äußeren des Vierecks $ABCD$.

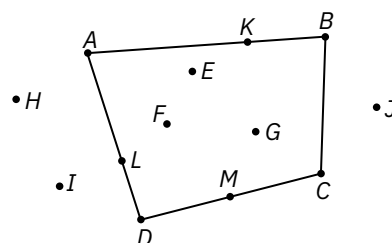


Abbildung 10

Bemerkungen

- In einem konvexen Viereck $ABCD$, in dem sich zwei beliebige Punkte E und F befinden, ist die Strecke EF im Viereck enthalten (Abbildung 11).
- In einem konkaven Viereck $HGJI$ gibt es mindestens zwei verschiedene Punkte K und L , sodass die Strecke KL nicht im Viereck enthalten ist (Abbildung 12).

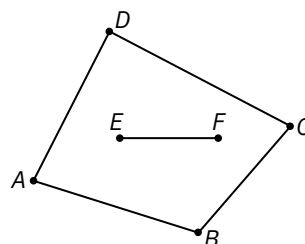


Abbildung 11

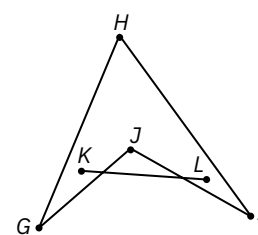


Abbildung 12



Die Winkelsumme im konvexen Viereck



Mathe im Alltag

Schneidet die Winkel des konvexen Vierecks in Abbildung 13 aus und legt sie wie in Abbildung 14 an. Was stellt ihr fest?

Antwort:

Wenn ihr das richtig gemacht habt, werdet ihr sehen, dass die vier Winkel des konvexen Vierecks in Abbildung 13 zu Winkeln um einen Punkt in Abbildung 14 werden.

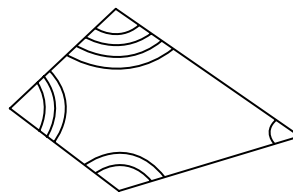


Abbildung 13

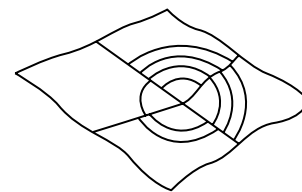


Abbildung 14



Merke dir!

Lehrsatz. Die Winkelsumme eines konvexen Vierecks beträgt 360° .

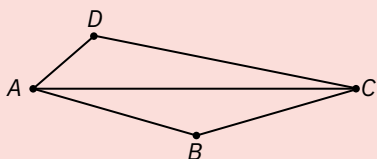


Abbildung 15

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein konvexes Viereck.

Schlussfolgerung: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$.

Beweis:

Wir konstruieren die Diagonale AC des konvexen Vierecks $ABCD$ (Abbildung 15). Diese bildet zwei Dreiecke, ABC und ADC . Die Summe der Winkelmaße der Dreiecke ABC und ADC ist jeweils gleich 180° , sodass die Beziehungen $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180^\circ$ (1) und $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle ACD = 180^\circ$ (2).

Addiert man die Gleichungen (1) und (2) Glied für Glied und verwendet die Eigenschaften der Addition, so erhält man: $(\sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC) + \sphericalangle ABC + (\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD) + \sphericalangle ADC = 360^\circ$, d. h., $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$.



Geschichte der Mathematik

Das Wort *Patrulator* (Viereck) setzt sich aus zwei lateinischen Wörtern zusammen: „quattuor“ = vier und „latuseris“ = Seite.

Das Wort *Diagonale* setzt sich aus zwei griechischen Wörtern zusammen: „dia“ = durch und „gonia“ = Winkel. Das Wort *konvex* kommt aus dem Lateinischen, wo „convexus“ *ausgebeult* bedeutet; *konkav* ist ebenfalls lateinisch, wobei „concavus“ *ausgehöhlt* bedeutet.

Konstruktion eines konvexen Vierecks unter bestimmten Bedingungen

Zeichnet ein konvexes Viereck $ABCD$ mit $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 80^\circ$, $\sphericalangle C = 130^\circ$ und bestimmt das Maß des Winkels D .

Lösung:

Wir konstruieren eine Strecke AB . Auf der Seite AB konstruieren wir, wie in Abbildung 16, den Winkel mit dem Scheitelpunkt in A mit dem Maß 40° und den Winkel mit dem Scheitelpunkt in B mit dem Maß 80° . Die beiden anderen Schenkel des Winkels schneiden sich im Punkt P . Wir wählen einen Punkt C innerhalb der Strecke PB und konstruieren den Winkel BCD mit dem Maß 130° . Dies ergibt das konvexe Viereck $ABCD$. Das Maß des Winkels D ist $360^\circ - 40^\circ - 80^\circ - 130^\circ = 110^\circ$.

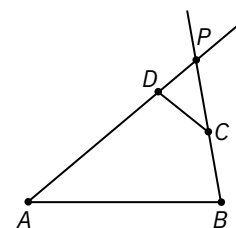


Abbildung 16

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



- Bestimmt die Maße der Winkel A , B , C und D eines konvexen Vierecks, wenn bekannt ist, dass sie direkt proportional zu den Zahlen 3, 5, 4 bzw. 6 sind (Abbildung 17).

Lösung:

Die Maße der Winkel A , B , C und D sind direkt proportional zu den Zahlen 3, 5, 4 bzw. 6.

$$\text{Dann ist } \frac{\sphericalangle A}{3} = \frac{\sphericalangle B}{5} = \frac{\sphericalangle C}{4} = \frac{\sphericalangle D}{6} = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D}{3+5+4+6} = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ.$$

Wir erhalten folgende Maße: $\sphericalangle A = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$, $\sphericalangle C = 4 \cdot 20^\circ = 80^\circ$ und $\sphericalangle D = 6 \cdot 20^\circ = 120^\circ$.

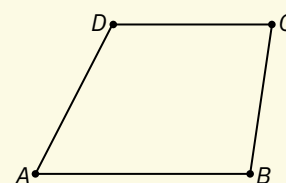


Abbildung 17

2. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \equiv BC$, $AC \cap BD = \{O\}$, $BD \perp AC$, $AO = 4$ cm und $BO = 3$ cm, und das gleichseitige Dreieck ACD . Bestimmt den Umfang des Vierecks $ABCD$ (Abbildung 18).

Lösung:

Da $AB \equiv BC$ und $BD \perp AC$ ist, folgt daraus, dass BO die entsprechende Höhe der Grundlinie im gleichschenkligen Dreieck BAC ist. BO ist also auch Seitenhalbierende in $\triangle BAC$, also ist O der Mittelpunkt der Seite AC . Daraus folgt, dass $AC = 2 \cdot AO = 8$ cm, also $AD = CD = AC = 8$ cm (da das Dreieck ACD gleichseitig ist).

Mithilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich für das Dreieck OAB , das ein rechtwinkliges Dreieck in O ist, dass $AB^2 = AO^2 + BO^2 = (4 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$, also $AB = 5 \text{ cm} = BC$.

Zusammengefasst: $U_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 26 \text{ cm}$.

3. Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB = BC$ und $CD = AD$. Zeigt, dass die Diagonalen des Vierecks senkrecht zueinander stehen (Abbildung 19).

Beweis:

$AB = BC \Rightarrow d(B, A) = d(B, C)$ (1) und $CD = AD \Rightarrow d(D, C) = d(D, A)$ (2).

Aus den Beziehungen (1) und (2) $\Rightarrow BD$ ist die Mittelsenkrechte der Diagonale $AC \Rightarrow BD \perp AC$.

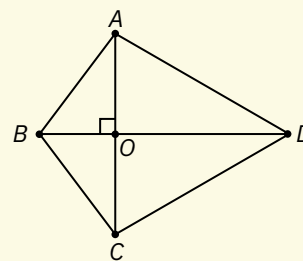


Abbildung 18

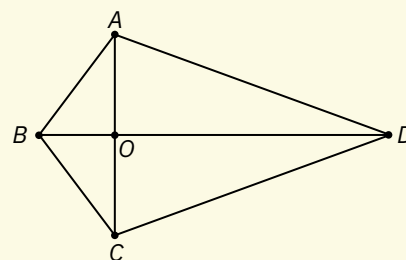


Abbildung 19

Vorgeschlagene Aufgaben

- In dem konvexen Viereck $ABCD$ ist $\sphericalangle A = 70^\circ$ und $\sphericalangle C = 120^\circ$. Bestimmt die Summe der Maße der Winkel B und D .
- Zeichnet ein konvexes Viereck $ABCD$ mit $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 120^\circ$. Bestimmt das Maß des Winkels D .
- Bestimmt die Winkelmaße eines konvexen Vierecks, wenn bekannt ist, dass sie direkt proportional zu 3, 4, 5 und 6 sind.
- Bestimmt die Winkelmaße eines konvexen Vierecks, wenn bekannt ist, dass sie umgekehrt proportional zu den Zahlen 0,(3), 0,25, 0,5 und 0,1(6) sind.
- In dem konvexen Viereck $ABCD$ ist $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B = 3 \cdot \sphericalangle C = 4 \cdot \sphericalangle D$. Bestimmt die Maße der Winkel des Vierecks $ABCD$.
- Ein konvexes Viereck hat einen Winkel mit dem Maß 60° . Bestimmt die Maße der drei anderen Winkel des Vierecks, wenn bekannt ist, dass sie durch aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ausgedrückt werden.
- Das konvexe Viereck $ABCD$ hat $AB + BC + CD + DA = 50$ cm. Das Dreieck ABC hat einen Umfang von 38 cm. Wenn bekannt ist, dass $AC = 15$ cm, bestimmt den Umfang des Dreiecks ADC .
- In dem konvexen Viereck $ABCD$ sind die Winkel A und C kongruent. Die Winkelhalbierende des Winkels ADC schneidet die Gerade AB in M und die Gerade BC in N . Beweist, dass das Dreieck BMN gleichschenkelig ist.
- Im konvexen Viereck $ABCD$ sind $AC \perp BD$, $\sphericalangle DAC = 60^\circ$, $\sphericalangle DBC = 50^\circ$ und $AO = OC$, wobei $AC \cap BD = \{O\}$. Bestimmt die Maße der Winkel des Vierecks $ABCD$.
- In dem konvexen Viereck $ABCD$ ist das Maß des Winkels B das arithmetische Mittel der Maße der Winkel A und C , und das Maß des Winkels C ist das arithmetische Mittel der Maße der Winkel B und D . Beweist, dass die Winkel A und D supplementär sind.

Test

- Sei das konvexe Viereck $ABCD$ aus Abbildung 20. Gebt den Wahrheitswert folgender Aussagen an.
 - $MP \cap ABCD \neq \emptyset$;
 - $\text{Int}(ABMD) \cup \text{Int}(BMCD) = \text{Int}(ABCD)$;
 - das Viereck $AMPD$ ist konvex;
 - das Viereck $CBMD$ ist konkav.
- In dem konvexen Viereck $ABCD$ mit $\sphericalangle A = 60^\circ$ sind die Maße der Winkel B , C und D direkt proportional zu den Zahlen 3, 5 und 7. Bestimmt die Maße der Winkel B , C und D .
- Sei das konvexe Viereck $ABCD$. Der Umfang des Dreiecks ABD beträgt 25 cm und der Umfang des Dreiecks BCD ist 27 cm. Bestimmt die Länge der Diagonale BD , wenn $AB + BC + CD + DA = 32$ cm.

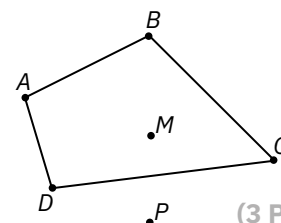


Abbildung 20

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



2. Lektion: Das Parallelogramm. Eigenschaften

Schlüsselwörter

Parallelogramm

Supplementwinkel

Halbierung

parallel

Das Parallelogramm

Mathe im Alltag

Analysieren wir das nebenstehende Foto, das die Kreuzungen von zwei Straßenbahnlinien zeigt. Wir bezeichnen die vier Kreuzungen mit A, B, C, D .

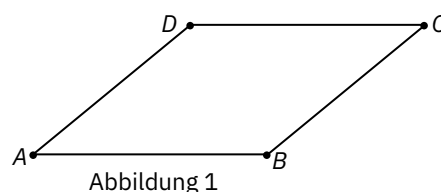
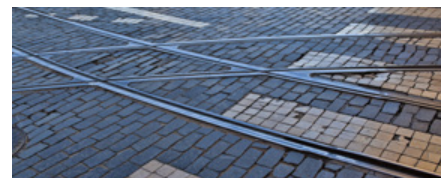
Was stellen wir fest?

Die gegenüberliegenden Seiten des konvexen Vierecks $ABCD$ sind parallel (Abbildung 1).

Definition. Ein konvexes Viereck mit paarweise parallelen gegenüberliegenden Seiten wird *Parallelogramm* genannt.

Dies entspricht der Definition:

- Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dann ist $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$;
- Wenn $ABCD$ ein konvexes Viereck ist, mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$, dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

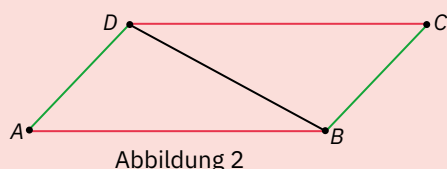


Eigenschaften des Parallelogramms

Merke dir!

A. Eigenschaften der Seiten

Lehrsatz 1. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten paarweise kongruent.



Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm

Schlussfolgerung: $AB \equiv CD$
 $AD \equiv BC$

Beweis:

Nach der Definition haben wir $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$ (Abbildung 2). Wir bemerken, dass:

$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$ (innere Wechselwinkel, die von den parallelen Geraden AD und BC mit der Sekante BD gebildet werden);

$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ (innere Wechselwinkel, die von den parallelen Geraden AB und CD mit der Sekante BD gebildet werden).

Da $DB \equiv BD$ (gemeinsame Seite), folgern wir, dass $\triangle ADB \equiv \triangle CBD$ (WSW-Fall), also $AB \equiv CD$ und $AD \equiv BC$.

Kehrsatz 1: Wenn in einem konvexen Viereck die gegenüberliegenden Seiten paarweise kongruent sind, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein konvexes Viereck
 $AB \equiv CD$
 $AD \equiv BC$

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm

Beweis:

Wir vergleichen die Dreiecke ADB und CDB : Wir haben $AB \equiv CD$, $AD \equiv BC$ und $BD \equiv BD$ (gemeinsame Seite) (Abbildung 2). Daraus ergibt sich, $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (SSS-Fall), also $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ und $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CBD$.

Da $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle CDB$ innere Wechselwinkel sind, die von den Geraden AB und CD mit der Sekante BD gebildet werden, folgt daraus, dass $AB \parallel CD$. In gleicher Weise sind $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle CBD$ innere Wechselwinkel, die von den Geraden AD und BC mit der Sekante BD gebildet werden, also $AD \parallel BC$. Da $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$, ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm.

Lehrsatz 2. Wenn in einem konvexen Viereck zwei gegenüberliegende Seiten kongruent und parallel sind, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

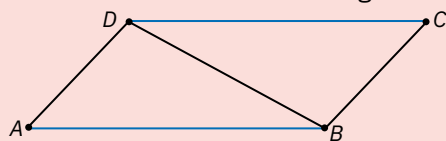


Abbildung 3

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein konvexes Viereck.
 $AB \cong CD$
 $AB \parallel CD$

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis:

Wir konstruieren die Diagonale BD (Abbildung 3). Wir leiten ab, dass $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB$ ist, innere Wechselwinkel gebildet von den parallelen Geraden AB und CD mit der Sekante BD . Wir vergleichen die Dreiecke ABD und CDB . Da $AB \cong CD$, $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB$ und $BD \cong DB$ (gemeinsame Seite), folgt daraus, dass $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (SWS-Fall). Wir erhalten $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle CBD$, woraus folgt, dass $AD \parallel BC$. Da wir auch $AB \parallel CD$ haben (aus der Voraussetzung), ist das Viereck $ABCD$ laut Definition ein Parallelogramm.

B. Eigenschaften der Winkel

Lehrsatz 3. In einem Parallelogramm sind die anliegenden Winkel supplementär.

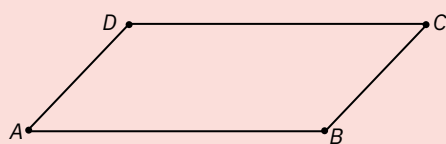


Abbildung 4

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Schlussfolgerung: $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$; $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$
 $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$; $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180^\circ$

Beweis: Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, folgt daraus, dass $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD$ (Abbildung 4).

Die Winkel BAD und ABC , die durch die Parallelen AD und BC mit der Sekante AB gebildet werden, sind Innenwinkel auf der gleichen Seite der Sekante, sie sind also supplementär. Also ist $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 180^\circ$, d. h., $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$.

Ebenso sind $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BCD$ supplementär, da sie Winkel auf derselben Seite der Sekante BC an den Parallelen AB und CD sind, also $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$. In ähnlicher Weise wird gezeigt, dass $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$ bzw. $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180^\circ$.

Kehrsatz 3. Wenn in einem konvexen Viereck ein Winkel zu den beiden anliegenden Winkeln supplementär ist, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Voraussetzung: Konvexes Viereck $ABCD$
 $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$
 $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180^\circ$

Schlussfolgerung: $ABCD$ – Parallelogramm

Beweis: Die Winkel A und B sind Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante, die durch die Geraden AD und BC mit der Sekante AB gebildet werden, und dann ist $AD \parallel BC$ (Abbildung 4), also sind sie supplementär. Ebenso sind die Winkel A und D supplementär als Innenwinkel auf derselben Seite der Sekante, die durch die Geraden AB und CD mit der Sekante AD gebildet werden, und dann ist $AB \parallel CD$.

Da $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, ist das Viereck $ABCD$ laut Definition ein Parallelogramm.

Lehrsatz 4. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel paarweise kongruent.

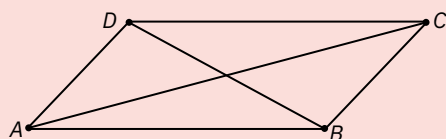


Abbildung 5

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Schlussfolgerung: $\sphericalangle A \cong \sphericalangle C$
 $\sphericalangle B \cong \sphericalangle D$

Beweis: Laut Lehrsatz 3 ist $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$ und $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$, also $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle B$. Daraus folgt: $\sphericalangle A \cong \sphericalangle C$. In ähnlicher Weise folgt aus $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$ und $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$, dass $\sphericalangle B \cong \sphericalangle D$.

Kehrsatz 4. Wenn in einem konvexen Viereck die gegenüberliegenden Winkel paarweise kongruent sind, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Voraussetzung: Konvexes Viereck $ABCD$
 $\sphericalangle A \cong \sphericalangle C$
 $\sphericalangle B \cong \sphericalangle D$

Schlussfolgerung: $ABCD$ – Parallelogramm

Beweis: Da $ABCD$ ein konvexes Viereck ist, folgt daraus, dass $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$. Aus $\sphericalangle C \cong \sphericalangle A$ und $\sphericalangle D \cong \sphericalangle B$, ergibt sich $2 \cdot (\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 360^\circ$, also $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$ (1). Da $\sphericalangle D \cong \sphericalangle B$, haben wir auch $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$ (2). Aus dem Kehrsatz 3 folgt, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

C. Eigenschaften der Diagonalen

Lehrsatz 5. In einem Parallelogramm haben die Diagonalen den gleichen Mittelpunkt.

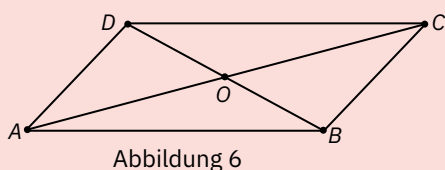


Abbildung 6

Voraussetzung: $ABCD$ -Parallelogramm
 $AC \cap BD = \{O\}$

Schlussfolgerung: $AO \equiv CO$; $DO \equiv BO$

Beweis:

Im Parallelogramm $ABCD$ (Abbildung 6) sind $AD \parallel BC$ und $AD \equiv BC$, und $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CBO$, weil sie innere Wechselwinkel sind, die von den parallelen Geraden AD und BC mit der Sekante BD (1) gebildet werden, $AD \equiv BC$ (2), und $\sphericalangle DAO \equiv \sphericalangle BCO$, weil sie innere Wechselwinkel sind, die von den parallelen Geraden AD und BC mit der Sekante AC (3) gebildet werden. Aus den Beziehungen (1), (2) und (3) ergibt sich nach dem WSW-Kongruenzfall, dass $\triangle ADO \equiv \triangle CBO$, und dann $AO \equiv CO$ und $DO \equiv BO$, was bedeutet, dass der Punkt O der Mittelpunkt der beiden Diagonalen ist.

Kehrsatz 5: Wenn die Diagonalen eines konvexen Vierecks denselben Mittelpunkt haben, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Voraussetzung: konvexes Viereck $ABCD$
 $AC \cap BD = \{O\}$
 $AO \equiv CO$; $DO \equiv BO$

Schlussfolgerung: $ABCD$ -Parallelogramm

Beweis:

Da $AO \equiv CO$, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ (Scheitelwinkel) und $BO \equiv DO$, folgt daraus, dass $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (SWS-Fall), also $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$ (Abbildung 6). Da $\sphericalangle ABO$ und $\sphericalangle CDO$ innere Wechselwinkel sind, die von den Geraden AB und CD mit der Sekante BD gebildet werden, leiten wir ab, dass $AB \parallel CD$.

Da $AO \equiv CO$, $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle COB$ (Scheitelwinkel) und $DO \equiv BO$ sind, ergibt sich nach dem SWS-Kongruenzfall, dass $\triangle AOD \equiv \triangle COB$ und daraus $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CBO$. Die kongruenten Winkel ADO und CBO sind innere Wechselwinkel, die von den Geraden AD und BC mit der Sekante BD gebildet werden, und dann $AD \parallel BC$.

Da $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, ist das Viereck $ABCD$ laut Definition ein Parallelogramm.

Problemstellung

Symmetriezentrum

Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und $\{O\} = AC \cap BD$. Weil $AO \equiv OC$ und $BO \equiv OD$ ist, folgern wir, dass das Symmetrische eines Scheitelpunkts des Parallelogramms in Bezug auf den Punkt O der gegenüberliegende Scheitelpunkt ist.

Die Frage lautet: Wenn ein Punkt auf einer Seite der Parallelen liegt, wo liegt das Symmetrische dieses Punktes in Bezug auf O ?

E sei ein beliebiger Punkt auf der Seite AB und $EO \cap CD = \{F\}$ (Abbildung 7).

Da $\sphericalangle EAO \equiv \sphericalangle FCO$ (innere Wechselwinkel), $AO \equiv CO$ und $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle COF$ (Scheitelwinkel), folgt daraus, dass $\triangle AOE \equiv \triangle COF$ (WSW-Fall), also $OE \equiv OF$. Folglich ist der Punkt F symmetrisch zum Punkt E in Bezug auf den Punkt O .

Sei G ein beliebiger Punkt auf der Seite AD und $GO \cap BC = \{H\}$. Mit der gleichen Argumentation zeigen wir, dass der Punkt H das Symmetrische des Punktes G in Bezug auf den Punkt O ist. Da die Punkte E und G beliebig gewählt wurden, leiten wir ab, dass die Symmetrie eines jeden Punktes des Parallelogramms in Bezug auf den Schnittpunkt der Diagonalen zum Parallelogramm gehört.

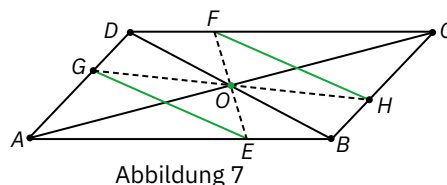


Abbildung 7

Merke dir!

Definition. Ein Punkt O ist das Symmetriezentrum einer geometrischen Figur $\mathcal{F}$, wenn das Symmetrische eines beliebigen Punktes der Figur $\mathcal{F}$ in Bezug auf den Punkt O auch ein Punkt von $\mathcal{F}$ ist.

Rechtfertigung einiger Eigenschaften durch Symmetrie

Das Symmetriezentrum eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt seiner Diagonalen (auch *Mittelpunkt des Parallelogramms* genannt).

- Da F zum Punkt E in Bezug auf O und H zum Punkt G in Bezug auf O symmetrisch ist, ergibt sich aus den Angaben in Abbildung 7, dass die Strecke HF zur Strecke EG in Bezug auf O symmetrisch ist. Da außerdem $OE \equiv OF$, $\sphericalangle EOG \equiv \sphericalangle FOH$ und $OG \equiv OH$, folgt daraus, dass $\triangle EOG \equiv \triangle FOH$ und dann $EG \equiv FH$, was bedeutet, dass die zum Symmetriezentrum des Parallelogramms symmetrischen Strecken kongruent sind. (1)

- A und C bzw. B und D sind symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt O des Parallelogramms ABCD, und so ergibt sich aus der Symmetrie die Eigenschaft, dass die Diagonalen des Parallelogramms denselben Mittelpunkt haben.
- A und C bzw. B und D sind symmetrisch in Bezug auf den Punkt O, und dann sind die Seiten AB und CD bzw. AD und BC symmetrisch in Bezug auf den Mittelpunkt O des Parallelogramms ABCD. Aus (1) folgt, dass $AB \equiv CD$ und $AD \equiv BC$ sind, und so erhalten wir aufgrund der Symmetrie die Eigenschaft, dass gegenüberliegende Seiten paarweise kongruent sind.

Häufige Arten, ein Parallelogramm zu konstruieren

1. Unter Verwendung des Kehrsatzes 5

Wir zeichnen zwei verschiedene nicht kongruente Strecken, die denselben Mittelpunkt haben. Die Enden der beiden Strecken sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

2. Lehrsatz 2 anwenden

Zeichne zwei kongruente und parallele Strecken. Die Enden der beiden Strecken sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

Praktische Anwendung

Schneidet vier paarweise gleich lange Holzstäbe und bohrt an beiden Enden jedes Stabes Löcher. Bringt vier Nieten in den Löchern an und bildet ein *Parallelogramm mit Gelenk*, wie in Abbildung 8 dargestellt. Indem man zwei aufeinanderfolgende Stäbe näher zusammen oder weiter auseinander bewegt, erhält man ein neues Parallelogramm.

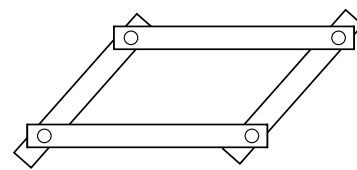


Abbildung 8

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

- Im Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ ist die Sehne AC der Durchmesser, und B und D sind zwei innere Punkte des Kreises, sodass $AC \cap BD = \{O\}$ und $OB \equiv OD$ (Abbildung 9). Zeigt, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

Beweis: Die Sehne AC ist der Durchmesser des Kreises $\mathcal{C}(O, r)$ und dann $OA \equiv OC$. Weil $OA \equiv OC$ und $OB \equiv OD$, ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

- Man konstruiert eine Parallele zu BC durch den Scheitelpunkt A des Dreiecks ABC, die die Parallele durch den Punkt B bei AC in E schneidet. In der Halbebene, die durch die Gerade BC und den Punkt A bestimmt wird, wird durch den Punkt C eine Parallele zu AB konstruiert, wobei ein Punkt D so gewählt wird, dass $CD \equiv AB$ (Abbildung 10). Zeigt, dass:

- a. das Viereck AEBC ein Parallelogramm ist; b. die Punkte E, A und D kollinear sind.

Beweis:

- a. $AE \parallel BC$ und $BE \parallel AC$. Laut Definition ist das Viereck AEBC ein Parallelogramm.

- b. $CD \parallel AB$ und $CD \equiv AB$, und dann ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm (1).

Aus der Beziehung (1) folgt $AD \parallel BC$. Punkt $A \notin BC$, $EA \parallel BC$, $AD \parallel BC$, also fallen nach dem *Parallelenaxiom* die Geraden AE und AD zusammen. Die verschiedenen Punkte E, A, D sind also kollinear.

- Das Viereck ABCD in Abbildung 11 ist ein Parallelogramm mit $AC \cap BD = \{O\}$. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite CD, der Punkt E ist symmetrisch zum Punkt A in Bezug auf M, und die Punkte F und D sind symmetrisch zu Punkt A. Zeigt, dass:

- a. $AD \parallel CE$; b. $\sphericalangle FDE \equiv \sphericalangle FBE$; c. die Geraden AC, BD und EF konkurrent sind.

Beweis:

- a. Der Punkt E ist der Symmetriepunkt von A in Bezug auf M, also ist M der Mittelpunkt der Strecke AE. Da M auch der Mittelpunkt der Strecke CD ist, ergibt sich, dass das Viereck ACED ein Parallelogramm ist, also $AD \parallel CE$.

- b. Da $C \notin AD$, $BC \parallel AD$ und $CE \parallel AD$ ist, folgt aus dem *Parallelenaxiom*, dass die Geraden BC und CE zusammenfallen. Daher ist $AD \parallel BE$ und $BE = BC + CE$. Da $CE = AD$ ist (da ACED ein Parallelogramm ist), ergibt sich $BE = BC + AD = 2 \cdot AD$.

Die Punkte F und D sind symmetrisch zum Punkt A, also ist $FD = 2 \cdot AD = BE$. Da $FD \equiv BE$ und $FD \parallel BE$ ist, folgern wir, dass BEDF ein Parallelogramm ist und $\sphericalangle FDE \equiv \sphericalangle FBE$.

- c. Der Punkt O ist der Mittelpunkt der Diagonalen AC und BD des Parallelogramms ABCD. Da BD auch eine Diagonale im Parallelogramm BEDF ist, folgt daraus, dass O auch der Mittelpunkt der anderen Diagonale von BEDF, nämlich EF, ist. Somit haben die Strecken AC, BD und EF denselben Mittelpunkt, O. Daher sind die Geraden AC, BD und EF konkurrent.

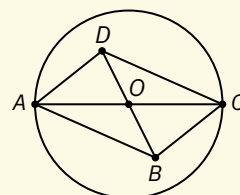


Abbildung 9

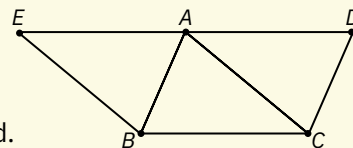


Abbildung 10

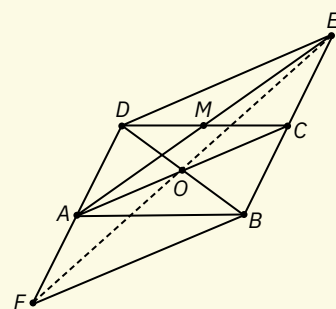


Abbildung 11



Vorgeschlagene Aufgaben



- Konstruiert ein Parallelogramm $ABCD$, wenn bekannt ist, dass das Maß des Winkels A gleich 30° ist.
 - Konstruiert ein Parallelogramm $ABCD$, wenn $AC = 4$ cm und $BD = 6$ cm.
 - Konstruiert ein Parallelogramm $ABCD$, $AB = 3$ cm und $BC = 5$ cm.
 - Konstruiert das Parallelogramm $ABCD$ mit $AB = 4$ cm, $\sphericalangle A = 70^\circ$ und $AC = 5$ cm.
- In dem Parallelogramm $ABCD$ beträgt das Maß des Winkels ABC 50° . Bestimmt die Maße der Winkel A , C und D des Parallelogramms $ABCD$.
 - Im Parallelogramm $ABCD$ ist das Maß des Winkels BAD gleich 120° . Bestimmt die Maße der Winkel B , C und D des Parallelogramms $ABCD$.
 - Im Parallelogramm $ABCD$ ist das Maß des Winkels BAC gleich 20° und das Maß des Winkels BCA ist gleich 50° . Bestimmt die Maße der Winkel A , B , C und D des Parallelogramms $ABCD$.
- Im Parallelogramm $ABCD$ ist $AC \cap BD = \{O\}$, $AB = 10$ cm, $AC = 12$ cm und $DB = 16$ cm. Berechne den Umfang des Dreiecks DOC .
- Es sei das Parallelogramm $MNPQ$ mit $MN = 3x + 2$ cm, $NP = 4x + 1$ cm und $PQ = 5x - 2$ cm. Berechne die Summe der Längen der Seiten des Parallelogramms.
- Im Parallelogramm $MNPQ$ ist $\sphericalangle M = 2x + 3^\circ$ und $\sphericalangle P = 3x - 27^\circ$. Bestimmt die Maße der Winkel des Parallelogramms $MNPQ$.
- Das konvexe Viereck $ABCD$ hat $\sphericalangle A = x + 16^\circ$, $\sphericalangle B = 2x + 2^\circ$, $\sphericalangle C = \frac{3}{2}x - 11^\circ$ und $\sphericalangle D = \frac{7}{3}x - 16^\circ$. Beweist, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.
- In der Abbildung 12 ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC dargestellt. Wenn die Punkte S und T symmetrische Punkte B und C in Bezug auf die Mittelpunkte der Seiten AC bzw. AB sind, dann zeigt, dass die Punkte T , A , S kollinear sind.
- Es sei das Parallelogramm $ABCD$. Die Winkelhalbierende des Winkels A schneidet die Seite DC im Punkt P und die Winkelhalbierende des Winkels BCD schneidet die Seite AB im Punkt Q . Zeigt, dass das Viereck $APCQ$ ein Parallelogramm ist.
- Die Winkelhalbierenden der Winkel A und B des Parallelogramms $ABCD$ schneiden sich auf der Seite CD im Punkt P (Abbildung 13). Bestimmt das Maß des Winkels APB .
- Auf der Seite AB des Parallelogramms $ABCD$ befindet sich der Punkt P und auf der Seite DC der Punkt Q , sodass $AP = QC$ ist. Beweist, dass das Viereck $APCQ$ ein Parallelogramm ist.
- Es sei das Parallelogramm $ABCD$, in dem $AD = DB$ und der Punkt M der Mittelpunkt der Seite DC ist. Die Senkrechte aus C auf BD schneidet BM in P . Beweist, dass die Geraden AD und DP senkrecht zueinander stehen.

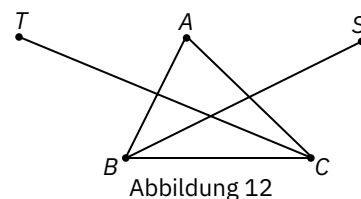


Abbildung 12

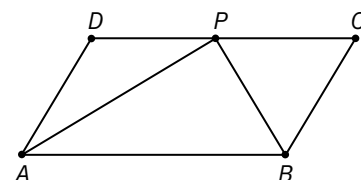


Abbildung 13



Test

- Im Parallelogramm $ABCD$ ist das Maß des Winkels A gleich 40° . Bestimmt die Maße der Winkel B , C und D des Parallelogramms $ABCD$. (3 Pkte.)
- Es sei das Parallelogramm $ABCD$ und $AC \cap BD = \{O\}$. Gebt den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an:
 - Wenn $AB = 2$ cm und $BC = 3$ cm ist, dann ist der Umfang des Parallelogramms $ABCD$ 5 cm.
 - Wenn $AO = 4$ cm, $BO = 7$ cm und $DC = 6$ cm, dann ist der Umfang des Dreiecks AOB 17 cm.
 - Die Dreiecke AOD und COB sind kongruent.
 - Die Winkel BAC und DCA sind supplementär.
 - Wenn $BD \perp AD$, $\sphericalangle BAD = 30^\circ$ und $BD = 6$ cm, dann ist $DC = 3$ cm.
 - Wenn $AO = OD = AD$ ist, dann ist das Maß des Winkels ACB gleich 60° . (3 Pkte.)
- Im Dreieck ABC ist der Punkt D der Mittelpunkt der Strecke BC . Die Parallele durch B zur Gerade AC schneidet die Gerade AD im Punkt E . Beweist, dass das Viereck $ABEC$ ein Parallelogramm ist. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

3. Lektion: Anwendungen des Parallelogramms in der Dreiecksgeometrie. Mittellinie in einem Dreieck, Schwerpunkt eines Dreiecks

Schlüsselwörter

Mittelpunkt einer Strecke

Mittellinie

Schwerpunkt

Seitenhalbierende

Konkurrenz

parallel

Mittellinie eines Dreiecks

Merke dir!

Definition. Die Strecke, deren Enden in den Mittelpunkten der beiden Seiten eines Dreiecks liegen, wird als Mittellinie des Dreiecks bezeichnet.

Jedes Dreieck hat drei Mittellinien. In Abbildung 1 sind die Punkte M , D und P die Mittelpunkte der Seiten AB , BC bzw. AC des Dreiecks ABC . Die Strecken MD , DP und MP sind die drei Mittellinien des Dreiecks ABC .

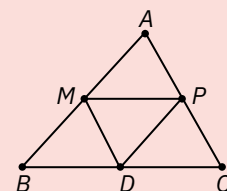


Abbildung 1

Problemstellung

In Abbildung 2 ist das Dreieck ABC gleichseitig, und die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. AC .

- $\triangle ABC$ ist gleichseitig und dann gilt $AB \equiv AC \equiv BC$ und $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$.
- Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. AC , also $AM = \frac{AB}{2}$, $AP = \frac{AC}{2}$ und, da $AB \equiv AC$ ist, folgern wir, dass $AM \equiv AP$ ist.
- Da $AM \equiv AP$ und $\sphericalangle A = 60^\circ$ ist, folgt daraus, dass das Dreieck AMP gleichseitig ist. Dann ist $\sphericalangle AMP = 60^\circ$ und $MP = AM = \frac{AB}{2} = \frac{BC}{2}$.
- Aus der Gleichheit der Maße folgt, dass $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle B$ und da sie Stufenwinkel sind, die von den Geraden MP und BC mit der Sekante AB gebildet werden, leiten wir ab, dass $MP \parallel BC$.
- Da die Punkte M und P die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. AC sind, ist die Strecke MP laut der Definition eine Mittellinie im gleichseitigen Dreieck ABC . Sie hat die Eigenschaften $MP \parallel BC$ und $MP = \frac{BC}{2}$.

Wir werden zeigen, dass diese Eigenschaften der Mittellinie, die im gleichseitigen Dreieck identifiziert wurden, in jedem Dreieck gelten.

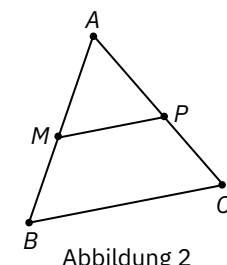


Abbildung 2

Merke dir!

Lehrsatz 1 (Eigenschaften der Mittellinie eines Dreiecks). In jedem Dreieck ist die Mittellinie, die durch die beiden Seiten des Dreiecks bestimmt wird, parallel zur dritten Seite und halb so lang.

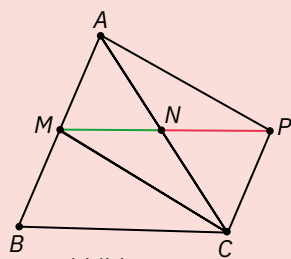


Abbildung 3

Voraussetzung: $\triangle ABC$
 $AM \equiv MB, M \in AB$
 $AN \equiv NC, N \in AC$

Schlussfolgerung: $MN \parallel BC$ und $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$

Beweis:

Wir konstruieren den symmetrischen Punkt P des Punktes M in Bezug auf N . Der Punkt N ist der Mittelpunkt sowohl der Strecke MP als auch der Strecke AC , also ist das Viereck $AMCP$ ein Parallelogramm. Also ist $CP \parallel AM$ und $CP = AM$.

Da $CP = AM = MB$ ist, folgern wir, dass $CP \parallel MB$ und $CP \equiv MB$ ist, also ist $BCPM$ ein Parallelogramm.

Daraus folgt: $MP \parallel BC$ und $MP \equiv BC$. Da $MP = 2 \cdot MN$, erhalten wir $MN \parallel BC$ und $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$.

Lehrsatz 2 (erster Kehrsatz von Lehrsatz 1).

Wenn in einem Dreieck ABC der Punkt M der Mittelpunkt der Seite AB ist, und der Punkt N zur Seite AC gehört, sodass $MN \parallel BC$ ist, dann ist N der Mittelpunkt der Seite AC .

Beweis:

Nehmen wir an, dass der Punkt N nicht der Mittelpunkt der Seite AC ist. Dann gibt es einen Punkt $T \neq N$, sodass der Punkt T der Mittelpunkt der Seite AC ist (Abbildung 4). Die Strecke MT ist die Mittellinie im Dreieck ABC , also $MT \parallel BC$. Da $MT \parallel BC$ und $MN \parallel BC$, sind, fallen die Geraden MN und MT zusammen. Da die Punkte N und T sowohl zur Seite AC als auch zur Parallele durch M zu BC gehören, folgt daraus, dass $T = N$, also $T \neq N$.

Daher ist die Annahme falsch, dass der Punkt N der Mittelpunkt der Seite AC ist.

Lehrsatz 3 (zweiter Kehrsatz von Lehrsatz 1).

Wenn in einem Dreieck ABC die Punkte M und N zu den Seiten AB bzw. AC gehören, sodass $MN \parallel BC$ und $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$, dann ist die Strecke MN die Mittellinie des Dreiecks ABC .

Beweis:

Wir verlängern die Strecke MN um die Strecke NP , sodass $MN \equiv NP$ (Abbildung 5). Also ist $MN = \frac{1}{2} \cdot MP$ und da $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$ ist, folgt daraus, dass $MP \equiv BC$.

Da $MP \parallel BC$ und $MP \equiv BC$, ist das Viereck $BCPM$ ein Parallelogramm, also $BM \parallel CP$ (d. h., $AB \parallel CP$) und $BM \equiv CP$.

Die Winkel AMP und CPN sind innere Wechselwinkel, die von den Parallelen AB und CP mit der Sekante MP gebildet werden, sodass $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle CPN$.

Da $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle CPN$, $MN \equiv NP$ und $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle CNP$ (Scheitelwinkel), folgt daraus, dass $\triangle AMN \equiv \triangle CPN$ (WSW), also $AN \equiv CN$ und $AM \equiv CP$. Aber $BM \equiv CP$, also $AM \equiv BM$.

Da $AN \equiv CN$ und $AM \equiv BM$ ist, folgt daraus, dass die Strecke MN eine Mittellinie im Dreieck ABC ist.

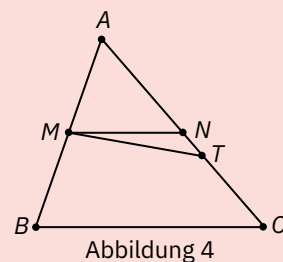


Abbildung 4

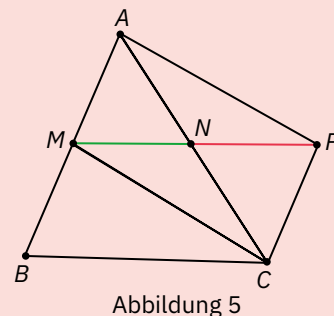


Abbildung 5

Schwerpunkt eines Dreiecks

Merke dir!

Lehrsatz 4. In jedem Dreieck fallen die Seitenhalbierenden in einem Punkt zusammen, den man den *Schwerpunkt des Dreiecks* nennt.

Auf jeder Mittellinie liegt der Schwerpunkt zwei Drittel von der Spitze des Dreiecks und ein Drittel von der gegenüberliegenden Seite entfernt.

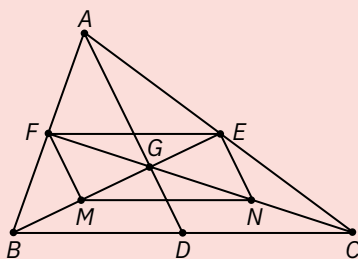


Abbildung 6

Voraussetzung: $\triangle ABC$, $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$
 $DB \equiv DC$, $EA \equiv EC$, $FA \equiv FB$

Schlussfolgerung: $AD \cap BE \cap CF = \{G\}$
 $GD = \frac{1}{3} \cdot AD$, $GE = \frac{1}{3} \cdot BE$, $GF = \frac{1}{3} \cdot CF$

Beweis:

Wenn man annimmt, dass die Geraden BE und CF parallel sind, würde daraus folgen, dass die Winkel EBC und FCB , die von BE und CF mit der Sekante BC gebildet werden, supplementär sind (als Winkel auf derselben Seite der Sekante), was falsch ist, da $\sphericalangle EBC + \sphericalangle FCB < \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB < 180^\circ$ (Abbildung 6).

Folglich sind die Geraden BE und CF nicht parallel, sodass es einen Punkt G gibt, für den gilt: $BE \cap CF = \{G\}$.

Die Strecke EF ist die Mittellinie des Dreiecks ABC , also $EF \parallel BC$ und $EF = \frac{1}{2} \cdot BC$.

M und N seien die Mittelpunkte der Strecken BG bzw. CG . Die Strecke MN ist die Mittellinie des Dreiecks GBC , also $MN \parallel BC$ und $MN = \frac{1}{2} \cdot BC$. Folglich ist $EF \parallel MN$ und $EF \equiv MN$, also ist das Viereck $EFMN$ ein Parallelogramm.

Wir leiten daraus ab, dass G der gemeinsame Mittelpunkt der Diagonalen ME und NF ist. Wir erhalten

$BM \equiv MG \equiv GE$ bzw. $CN \equiv NG \equiv GF$, also $GE = \frac{1}{3} \cdot BE$ und $GF = \frac{1}{3} \cdot CF$.

Analog dazu wird gezeigt, dass sich die Seitenhalbierenden AD und BE in einem Punkt G' schneiden, sodass $G'E = \frac{1}{3} \cdot BE$ und $G'D = \frac{1}{3} \cdot AD$ (Abbildung 7). Da $GE = G'E = \frac{1}{3} \cdot BE$, ergibt sich, dass die Punkte G und G' zusammenfallen, was zeigt, dass $AD \cap BE \cap CF = \{G\}$ und $GD = \frac{1}{3} \cdot AD$.

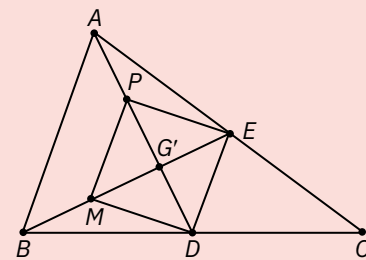


Abbildung 7

Bemerkungen

1. Um den Schwerpunkt eines Dreiecks ABC zu konstruieren, genügt es, eine einzige Seitenhalbierende AM mit $M \in BC$, zu konstruieren und sie in drei kongruente Strecken zu unterteilen. Der Schwerpunkt liegt dann auf AM , sodass $AM = 3 \cdot GM$ ist.
2. Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann fällt sein Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt des Innenkreises des Dreiecks, mit dem Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks und dem Orthozentrum des Dreiecks zusammen.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. In Abbildung 9 ist das Viereck $ABCD$ konvex und die Punkte M, N, P und Q sind die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA . Zeigt, dass das Viereck $MNPQ$ ein Parallelogramm ist.

Beweis:

Die Strecke MQ ist die Mittellinie des Dreiecks ABD , also $MQ \parallel BD$ und $MQ = \frac{BD}{2}$ (1).

Ebenso ist die Strecke NP die Mittellinie im Dreieck CBD , also $NP \parallel BD$ und $NP = \frac{BD}{2}$ (2).

Aus (1) und (2) folgt, dass $MQ \parallel NP$ und $MQ \equiv NP$, also ist das Viereck $MNPQ$ ein Parallelogramm.

Geschichtliche Bemerkung: Das Viereck $MNPQ$ ist auch als *Varignon-Viereck* bekannt, nach dem Mathematiker Pierre Varignon, der diesen Beweis im Jahr 1731 veröffentlichte. Die Strecken MP und NQ werden als Bimediane des Vierecks $ABCD$ bezeichnet.

2. Die Punkte M und N seien die Mittelpunkte der Seiten AB und CD des Parallelogramms $ABCD$ (Abbildung 10). Zeigt, dass $AE = EF = FC$ ist, wobei $DM \cap AC = \{E\}$ und $BN \cap AC = \{F\}$.

Beweis:

Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm, also $AB \parallel CD$ und $AB \equiv CD$ (2). Da $MB = \frac{1}{2} \cdot AB$ und $ND = \frac{1}{2} \cdot CD$ ist, folgt daraus, dass $MB \equiv ND$ ist.

Offensichtlich haben wir auch $MB \parallel ND$, also ist das Viereck $BNDM$ ein Parallelogramm, und dann $BN \parallel DM$. Insbesondere haben wir $ME \parallel BF$ und $NF \parallel DE$. Im Dreieck ABF ist der Punkt M der Mittelpunkt der Seite AB , und $ME \parallel BF$. Laut Lehrsatz 2 ist E der Mittelpunkt der Strecke AF , also $AE \equiv EF$. Im Dreieck CDE ist der Punkt N der Mittelpunkt der Seite CD , und $NF \parallel DE$ und dann ist der Punkt F der Mittelpunkt der Strecke EC , also $EF \equiv FC$.

Da $AE \equiv EF$ und $EF \equiv FC$ ist, ergibt sich $AE \equiv EF \equiv FC$.

3. Im Parallelogramm $ABCD$ ist E der Mittelpunkt der Seite CD . Es sei $AE \cap BC = \{F\}$. Zeigt, dass der Punkt C der Mittelpunkt der Strecke BF ist (Abbildung 11).

Beweis:

Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm, also $AB \parallel CD$ (1) und $AB \equiv CD$ (2).

Da der Punkt E die Mitte der Seite CD ist, gilt $EC = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$.

Die Beziehung (1) ist äquivalent zu $EC \parallel AB$. Im Dreieck ABF ist $EC \parallel AB$ und $EC = \frac{AB}{2}$. Nach Lehrsatz 3 ist die Strecke EC die Mittellinie des Dreiecks ABF , also

ist der Punkt C der Mittelpunkt der Strecke BF .

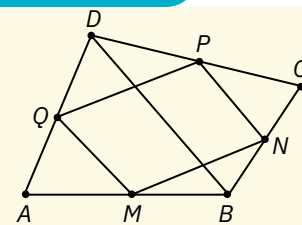


Abbildung 9

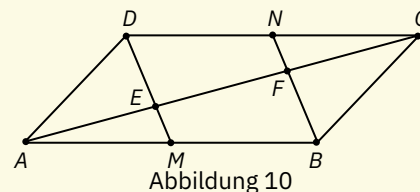


Abbildung 10

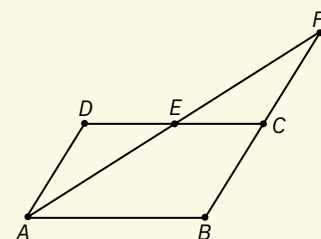


Abbildung 11



Vorgeschlagene Aufgaben



- Im Dreieck ABC sind die Punkte M und P die Mittelpunkte der Seiten AB und AC .
 - Wenn $MP = 9$ cm ist, dann berechnet die Länge der Seite BC .
 - Wenn $BC = 16$ cm ist, dann berechnet die Länge der Mittellinie MP .
 - AQ ist der Mittelpunkt des Dreiecks ABC und $MQ = 7$ cm. Berechnet die Länge der Seite AC .
- Im Dreieck ABC sind die Punkte M , P und Q jeweils die Mittelpunkte der Seiten AB , BC und CA .
 - Der Umfang des Dreiecks ABC beträgt 28 cm. Bestimmt den Umfang des Dreiecks MPQ .
 - Der Umfang des Dreiecks MPQ beträgt 17 cm. Bestimmt den Umfang des Dreiecks ABC .
- Es seien die Seitenhalbierenden MA , PB und QC des Dreiecks MPQ , die sich im Punkt G schneiden.
 - Wenn $MA = 12$ cm ist, dann bestimmt die Längen der Strecken MG und GA .
 - Wenn $PG = 10$ cm ist, dann bestimmt die Längen der Strecken GB und PB .
 - Wenn $CG = 3$ cm ist, dann bestimmt die Längen der Strecken GQ und CQ .
- Im Parallelogramm $ABCD$ ist der Punkt E der Mittelpunkt der Seite AB . F sei der Schnittpunkt der Geraden CE und AD und $AC \cap BD = \{O\}$.
 - Zeigt, dass OE die Mittellinie des Dreiecks CAF ist.
 - Zeigt, dass AO die Mittellinie des Dreiecks BDF ist.
 - Wenn $CF \cap BD = \{T\}$, dann beweist, dass der Punkt T der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.
- M und P seien die Mittelpunkte der Seiten AB und AC des Dreiecks ABC . Wenn D ein beliebiger Punkt auf der Seite BC ist und $AD \cap MP = \{T\}$, dann beweist, dass $AT = TD$.
- Auf den Seiten AB und AC des Dreiecks ABC seien die Punkte $S, M \in AB$ bzw. $T, P \in AC$ so, dass $AM = MB$, $AS = SM$, $AP = PC$, $AT = TP$ und $ST = 6$ cm. Bestimmt die Länge der Strecke BC .
- Die Punkte M und P seien die Mittelpunkte der Seiten AB und AC des Dreiecks ABC . Wenn $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm und $U_{ABC} = 23$ cm, berechnet den Umfang des Vierecks $MPCB$.
- In Abbildung 12 liegt der Punkt O außerhalb des Dreiecks ABC . Wir bezeichnen mit P und Q die Symmetrien des Punktes O in Bezug auf die Mittelpunkte der Seiten AC und BC . Wenn die Punkte S und T die Mittelpunkte der Seiten AC und BC sind, dann:
 - Zeigt, dass ST die Mittellinie des Dreiecks OPQ ist.
 - Beweist, dass das Viereck $ABQP$ ein Parallelogramm ist.
- Im Parallelogramm $ABCD$ ist $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm und $AC \cap BD = \{O\}$. Wenn G_1, G_2, G_3 und G_4 die Schwerpunkte der Dreiecke AOB, BOC, COD, DOA bzw. DOA sind, dann beweist, dass:
 - $G_1G_3 = 12$ cm und $G_2G_4 = 8$ cm;
 - das Viereck $G_1G_2G_3G_4$ ein Parallelogramm ist.

Hinweis: Beweist, dass die Punkte G_1, O, G_3 kollinear sind.
- Es sei das Parallelogramm $ABCD$ und $AC \cap BD = \{O\}$. Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Strecken DC und AB , und $AM \cap BD = \{T\}$, $CP \cap BD = \{S\}$. Wenn $BD = 18$ cm ist, dann berechnet die Länge der Strecke ST .
- Die gleichseitigen kongruenten Dreiecke ABC und DCE seien so konstruiert, dass die Punkte A, C und E kollinear und die Punkte B, C und D kollinear sind. Wenn der Punkt T der Mittelpunkt der Strecke BC und $ET \cap AB = \{S\}$, ist, zeigt, dass $SB = \frac{CD}{3}$.

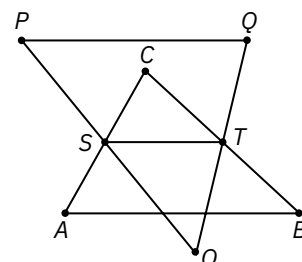


Abbildung 12



Test

- Im Dreieck ABC sind die Punkte S , T und Q die Mittelpunkte der Seiten AB , BC bzw. AC . Wenn $AB = 10$ cm, $ST = 7$ cm und $BC = 16$ cm, dann bestimmt die Längen der Strecken TQ , AC bzw. SQ . (3 Pkte.)
- Es sei das Dreieck ABC und der Punkt D auf der Seite BC . Wenn die Punkte M , P und Q die Mittelpunkte der Strecken AB , AD bzw. AC sind, dann beweist, dass die Punkte M , P und Q kollinear sind. (3 Pkte.)
- Wenn die Punkte A' , B' und C' die Mittelpunkte der Seiten BC , AC bzw. AB des Dreiecks ABC sind, dann beweist, dass das Viereck $A'B'C'B$ ein Parallelogramm ist. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.

4. Lektion: Das Rechteck. Eigenschaften

Schlüsselwörter

Rechteck

Breite

Diagonale

Senkrechte

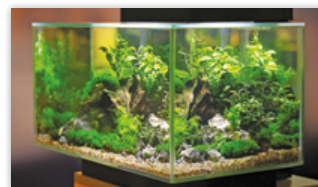
Länge

rechte Winkel

Rechteck

Mathe im Alltag

Beachtet, dass die vier Klarglasscheiben des Aquariums im nebenstehenden Bild wie Parallelogramme geformt sind. Außerdem sind alle Winkel rechtwinklig. Auch das Brett, die Wände, die Fenster, die Tür und der Buchdeckel haben die gleichen Eigenschaften.

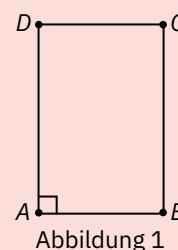


Merke dir!

Definition. Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel wird als Rechteck bezeichnet.

Dies entspricht der Definition:

- Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel ist, dann ist $ABCD$ ein Rechteck.
- Wenn $ABCD$ ein Rechteck ist, dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel (Abbildung 1).



Wusstet ihr das?

In der rumänischen mathematischen Sprache wurde der Name *Rechteck* (*dreptunghi*) von Gheorghe Asachi, dem Begründer der Bildung in der Moldau, eingeführt.



Eigenschaften eines Rechtecks

Merke dir!

Als Parallelogramm hat das Rechteck alle seine Eigenschaften:

- die gegenüberliegenden Seiten sind paarweise parallel und kongruent;
- die gegenüberliegenden Winkel sind paarweise kongruent und anliegende Winkel sind supplementär;
- die Diagonalen haben denselben Mittelpunkt.

Als eine *besondere* Form des Parallelogramms hat das Rechteck weitere Eigenschaften, die als charakteristische Eigenschaften bezeichnet werden

Lehrsatz 1. In einem Rechteck sind alle Winkel rechte Winkel.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck.

Schlussfolgerung: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$

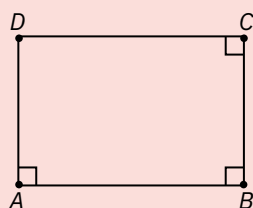
Beweis:

$ABCD$ ist laut Definition ein Parallelogramm und hat einen rechten Winkel (Abbildung 1). Angenommen, zum Beispiel, dass $\sphericalangle A = 90^\circ$.

Die anliegenden Winkel eines Parallelogramms sind supplementär, also $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, also $\sphericalangle B = 90^\circ$.

Die gegenüberliegenden Winkel eines Parallelogramms sind kongruent zueinander, also $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A$ und $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B$. Daher gilt: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$.

Kehrsatz 1. Wenn ein Viereck drei rechte Winkel hat, dann ist es ein Rechteck.



Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Viereck.
 $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 90^\circ$

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist ein Rechteck.



Beweis:

Da $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ$, $\sphericalangle D = 90^\circ$, also $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$. Daraus folgt: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ und $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$. Als Viereck mit zwei kongruenten Winkeln ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Hat das Viereck $ABCD$ auch einen rechten Winkel, zum Beispiel $\sphericalangle A = 90^\circ$, ist es ein Rechteck (Abbildung 2).

Lehrsatz 2. In einem Rechteck sind die Diagonalen kongruent.

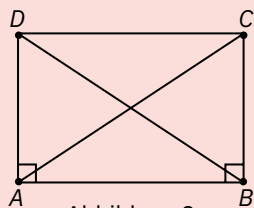


Abbildung 3

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck.

Schlussfolgerung: $AC \equiv BD$

Beweis:

Man vergleicht die Dreiecke ABC und BAD (Abbildung 3). Wir haben $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90^\circ$, $AB \equiv BA$ (als gemeinsame Seite) und $BC \equiv AD$ (als gegenüberliegende Seiten im Rechteck). Wir leiten daraus ab, dass $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ (der Fall HK), also $AC \equiv BD$.

Lehrsatz 2. Wenn die Diagonalen eines Parallelogramms kongruent sind, dann ist das Parallelogramm ein Rechteck.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck.
 $AC \equiv BD$

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist ein Rechteck.

Beweis:

Man vergleicht die Dreiecke ABC und BAD (Abbildung 3). Wir haben $AB \equiv BA$ (als gemeinsame Seite), $BC \equiv AD$ (als gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm) und $AC \equiv BD$ (aus der Voraussetzung). Daraus folgt, dass $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ (SSS-Fall), also $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$.

Aber $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD = 180^\circ$, weil die anliegenden Winkel eines Parallelogramms supplementär sind. Deshalb, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 90^\circ$. Das Parallelogramm $ABCD$ hat einen rechten Winkel, es ist also ein Rechteck.

Bemerkungen

1. Ein Rechteck hat zwei Symmetrieachsen, die die Mittellinien der gegenüberliegenden Seiten sind.
2. Der Schnittpunkt der Symmetrieachsen, der mit dem Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks zusammenfällt, ist der Symmetriemittelpunkt des Rechtecks.

Betrachtet man also das Rechteck als die Menge der Punkte auf seinen Seiten und nimmt man M als einen beliebigen Punkt des Rechtecks an, so ergibt sich Folgendes:

- die Symmetrie des Punktes M in Bezug auf die Mittelsenkrechte einer beliebigen Seite ist ein Punkt des Rechtecks;
- die Symmetrie des Punktes M in Bezug auf den Schnittpunkt der Diagonalen gehört zum Rechteck.

In Abbildung 4, zum Beispiel, liegt der Punkt E auf der Seite AD des Rechtecks $ABCD$. Die Symmetrie des Punktes E in Bezug auf den Mittelpunkt der Seite AB ist der Punkt F auf der Seite BC , und die Symmetrie von E in Bezug auf den Symmetriemittelpunkt O ist der Punkt G auf der Seite BC .

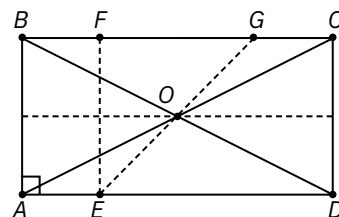


Abbildung 4

Allgemeine Möglichkeiten zur Konstruktion eines Rechtecks

Problemstellung

1. Unter Verwendung des Kehrsatzes 2

Wir zeichnen zwei verschiedene kongruente Strecken, die denselben Mittelpunkt haben.

Die Enden der beiden Strecken sind die Eckpunkte eines Rechtecks.

2. Verwendung eines rechtwinkligen Dreiecks

Durch die Scheitelpunkte der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ziehen wir Parallelen zu den Schenkeln des Dreiecks.

Der Schnittpunkt der Parallelen mit den drei Eckpunkten des Dreiecks stellt die vier Eckpunkte des Rechtecks dar.

Geschichte der Mathematik

Das goldene Rechteck ist ein Rechteck, dessen Abmessungen auf dem goldenen Schnitt beruhen (Abbildung 6).

In Abbildung 6 ist $L = a + b$ und $l = a$. Der Goldene Schnitt ist die erste irrationale Zahl, die in der Geschichte definiert und entdeckt wurde. Der Goldene Schnitt der Strecke $a + b$ in Abbildung 7 wird erhalten, wenn $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ ist.

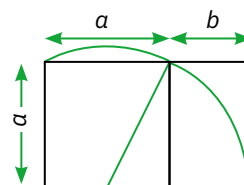


Abbildung 6

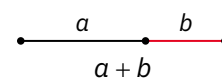


Abbildung 7

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. In einem Dreieck ABC ist der Punkt M der Mittelpunkt der Seite BC . Es sei $MN \perp AB$ und $MP \perp AC$, mit $N \in AB$ und $P \in AC$. Da wir wissen, dass $BC = 2 \cdot AM$ ist, zeigen wir, dass $AM \equiv NP$.

Beweis:

Aus der Voraussetzung ergibt sich, dass AM Seitenhalbierende im Dreieck ABC ist. Da $BC = 2 \cdot AM$ ist, ergibt sich, dass das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist, also $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ (Abbildung 8). Da $MN \perp AB$ und $MP \perp AC$, folgt daraus, dass $\sphericalangle MNA = 90^\circ$ und $\sphericalangle MPA = 90^\circ$. Mit drei rechten Winkeln ist das Viereck $APMN$ ein Rechteck und somit $AM \equiv NP$.

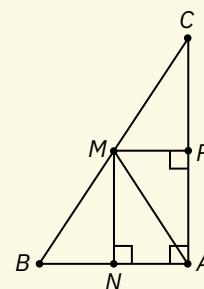


Abbildung 8

2. Im Kreis $\mathcal{C}(O, r)$, sind die Sehnen AC und BD Durchmesser. Zeigt, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Beweis:

Da AC und BD Durchmesser sind, ist der Mittelpunkt O des Kreises sowohl der Mittelpunkt der Strecke AC als auch der Mittelpunkt der Strecke BD (Abbildung 9). Folglich ist $ABCD$ ein Parallelogramm. Da $AC = BD = 2r$ ist, sind die Diagonalen des Parallelogramms $ABCD$ kongruent, also ist $ABCD$ ein Rechteck.

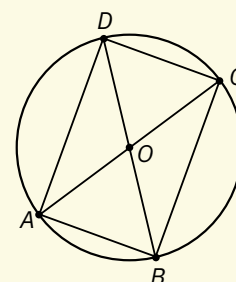


Abbildung 9

3. Es sei das Parallelogramm $ABCD$ mit $\sphericalangle BAD = 120^\circ$, $AB = 8$ cm und $AD = 4$ cm. Die Winkelhalbierende des Winkels BAD schneidet die Geraden DC und BC in den Punkten E bzw. F . Zeigt, dass das Viereck $ACFD$ ein Rechteck ist.

Beweis:

Der Strahl AE ist die Winkelhalbierende des Winkels BAD , also $\sphericalangle BAF = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

Im Parallelogramm $ABCD$ sind die Winkel BAD und ABF supplementär, sodass $\sphericalangle BAD = 120^\circ$, $\sphericalangle ABF = 60^\circ$ (Abbildung 10).

Aus der Voraussetzung ist $AD \parallel BC$ und $BC = AD = 4$ cm. Da $\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABF = 60^\circ$, ist das Dreieck ABF gleichseitig, also ist $AF = BF = AB = 8$ cm. Dann ist $CF = BF - BC = 8$ cm $- 4$ cm $= 4$ cm $= AD$. Da $BC = CF$ ist, ist der Punkt C der Mittelpunkt der Strecke BF , also ist AC Seitenhalbierende im gleichseitigen $\triangle ABF$. Daraus folgt, dass AC auch die Höhe in $\triangle ABF$ ist, also $AC \perp BF$, also $\sphericalangle ACF = 90^\circ$. Da $AD \parallel CF$ und $AD \equiv CF$ ist, folgt, dass $ACFD$ ein Parallelogramm ist. Da $\sphericalangle ACF = 90^\circ$ ist, folgern wir, dass $ACFD$ ein Rechteck ist.

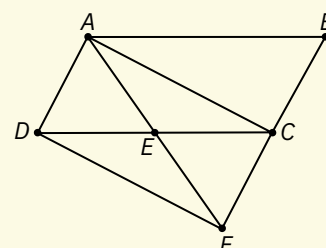


Abbildung 10

4. Der Punkt H ist das Orthozentrum des rechtwinkligen Dreiecks ABC , und die Punkte M, N, P und Q sind die Mittelpunkte der Strecken AB, AH, CH bzw. BC . Zeigt, dass das Viereck $MNPQ$ ein Rechteck ist.

Beweis:

Die Strecke MQ ist Mittellinie in $\triangle ABC$, also ist $MQ \parallel AC$ und $AC = 2 \cdot MQ$ (1). Die Strecke NP ist Mittellinie in $\triangle AHC$, also ist $NP \parallel AC$ und $AC = 2 \cdot NP$ (2). Aus den Beziehungen (1) und (2) folgt, dass das Viereck $MNPQ$ ein Parallelogramm ist (Abbildung 11). Da H das Orthozentrum des Dreiecks ABC ist, folgt daraus, dass BH Höhe in $\triangle ABC$ ist, also $BH \perp AC$. Aber $NP \parallel AC$, also $BH \perp NP$. Wir haben auch $MN \parallel BH$, da MN Mittellinie im Dreieck ABH ist. Daraus folgt, dass $MN \perp NP$ ist, also $\sphericalangle MNP = 90^\circ$, woraus folgt, dass das Parallelogramm $MNPQ$ ein Rechteck ist.

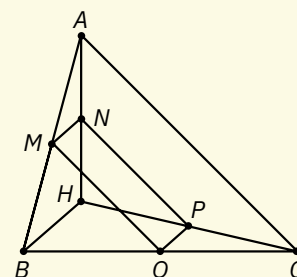
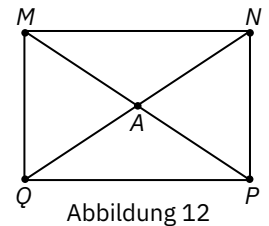


Abbildung 11

Vorgeschlagene Aufgaben



- Es sei das Rechteck $MNPQ$ in Abbildung 12, $MP \cap NQ = \{A\}$. Gebt den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an:
 - Die Diagonalen des Rechtecks sind MP und NQ .
 - Die Strecken AM und AN sind kongruent.
 - Die Breiten des Rechtecks $MNPQ$ sind NP und NA .
 - $\sphericalangle MPQ + \sphericalangle PNQ = 90^\circ$.
 - NA ist Seitenhalbierende im Dreieck MNP .
 - Die Winkel $\sphericalangle PMQ$ und $\sphericalangle PNQ$ sind kongruent.
- In dem Rechteck $ABCD$ ist $AC = 5$ cm. Berechnet $2 \cdot AC + 3 \cdot BD$.
- Wenn die Länge der Diagonale AC des Rechtecks $ABCD$ 7 cm beträgt, berechnet die Länge der Strecke OD , wobei $AC \cap BD = \{O\}$.
- Es sei das Rechteck $ABCD$ mit $AB = 10$ cm und $BC = 6$ cm. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$ schneidet die Seite CD im Punkt M . Bestimmt die Länge der Strecke DM .
- Im Rechteck $ABCD$ ist $\sphericalangle DOC = 120^\circ$, $\{O\} = AC \cap BD$ und $BD = 8$ cm. Berechnet den Umfang des Dreiecks BOC .
- Es seien die Punkte M und N auf den Seiten AB und CD des Rechtecks $ABCD$ so, dass $MB = DN$ ist. Beweist, dass das Viereck $AMCN$ ein Parallelogramm ist.
- Im Rechteck $ABCD$ ist $\sphericalangle ACD = 30^\circ$, und der Punkt E ist symmetrisch zu Punkt C in Bezug auf Punkt B . Beweist, dass das Dreieck ACE gleichseitig ist.
- Im konvexen Viereck $ABCD$ liegen die Diagonalen senkrecht aufeinander und die Punkte M, N, P, Q sind die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA . Beweist, dass das Viereck $MNPQ$ ein Rechteck ist.
- Zeigt, dass die Fußpunkte der Senkrechten aus den Spitzen eines Rechtecks auf die Diagonalen des Rechtecks ein Rechteck bilden.
- Beweist, dass die Winkelhalbierenden der Winkel eines Rechtecks die Eckpunkte eines Rechtecks auf den Diagonalen des Rechtecks bestimmen.
- Im Parallelogramm $ABCD$ sind die Punkte E und F symmetrisch zu den Punkten D bzw. B in Bezug auf die Gerade AC . Beweist, dass das Viereck $DEBF$ ein Rechteck ist.
- Die gleichseitigen Dreiecke ABM und BCP sind im Äußeren des Rechtecks $ABCD$ konstruiert. Beweist, dass die Strecken MD und AP kongruent sind.



Test

- Im Rechteck $ABCD$ ist $AC \cap BD = \{O\}$ und $\sphericalangle BDC = 40^\circ$. Bestimmt die Maße der Winkel $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle DOC$ und $\sphericalangle BAC$. (3 Pkte.)
- Konstruiert die gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ABM und BCT , $\sphericalangle M = \sphericalangle T = 90^\circ$ im Äußeren des Rechtecks $ABCD$. Es ist bekannt, dass $AB = 10$ cm und $BC = 6$ cm.
 - Beweist, dass die Punkte M, B und T kollinear sind.
 - Zeigt, dass das Dreieck MDC gleichschenkelig ist.
 - Berechnet den Abstand von Punkt M zur Gerade DC und den Abstand von Punkt T zur Gerade AD . (3 Pkte.)
- Es sei das Rechteck $ABCD$. Wenn $\sphericalangle ADB = 60^\circ$, $AH \perp BD$, $H \in BD$ und $DH = 8$ cm ist, dann berechnet die Länge der Diagonale BD . (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

5. Lektion: Der Rhombus. Eigenschaften

Schlüsselwörter

Rhombus

Winkelhalbierende

Mittelsenkrechte

senkrecht

anliegend

kongruent

Der Rhombus

Mathe im Alltag

Das Tischtuch auf dem nebenstehenden Bild ist mit traditionellen rumänischen Motiven verziert. Bei den darauf dargestellten geometrischen Figuren handelt es sich um besondere Parallelogramme, bei denen zwei beliebige anliegende Seiten kongruent sind.



Merke dir!

Definition. Ein Parallelogramm mit zwei anliegenden kongruenten Seiten wird als Rhombus bezeichnet.

Abbildung 1 stellt den Rhombus $ABCD$ dar.

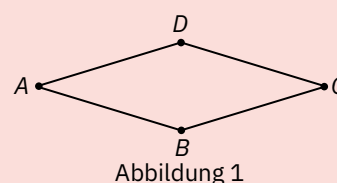


Abbildung 1

Wusstest du das?

Das Wort *Rhombus* leitet sich von dem griechischen Wort „rhombos“ her, das *Brutzeln* bedeutet.

Eigenschaften des Rhombus

Merke dir!

Da ein Rhombus ein Parallelogramm ist:

- sind die gegenüberliegenden Seiten paarweise parallel und kongruent;
- sind die gegenüberliegenden Winkel paarweise kongruent, und die anliegenden Winkel supplementär;
- haben die Diagonalen denselben Mittelpunkt.

Als *besonderes* Parallelogramm hat der Rhombus auch besondere Eigenschaften.

Lehrsatz 1. Alle Seiten des Rhombus sind kongruent.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rhombus.

Schlussfolgerung: $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$

Beweis:

Laut Definition hat der Rhombus zwei anliegende kongruente Seiten, z. B. $AB \equiv BC$.

Da es sich um ein Parallelogramm handelt, sind die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $ABCD$ paarweise kongruent, also $AB \equiv CD$ und $BC \equiv DA$. Aus der Transitivität der Kongruenz folgt, dass $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$.

Kehrsatz 1. Wenn in einem konvexen Viereck alle Seiten kongruent sind, dann ist es ein Rhombus.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein konvexes Viereck.

$AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist ein Rhombus.

Beweis:

Da $AB \equiv CD$ und $DA \equiv BC$ ist, folgern wir, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Aus zwei anliegenden kongruenten Seiten, z. B. $AB \equiv BC$, folgt, dass das Viereck $ABCD$ ein Rhombus ist.

Lehrsatz 2. Die Diagonalen des Rhombus stehen senkrecht zueinander.

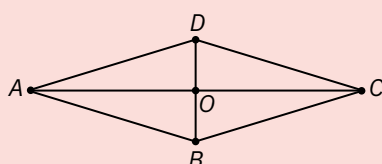


Abbildung 2

Voraussetzung: $ABCD$ ist Rhombus.

Schlussfolgerung: $AC \perp BD$

Beweis:

Wir bezeichnen $AC \cap BD = \{O\}$ (siehe Abbildung 2). Da $ABCD$ ein Rhombus ist, folgt daraus, dass $AB \equiv AD$ ist, sodass das Dreieck ABD gleichschenkelig ist mit der Grundlinie BD . Da der Punkt O der Mittelpunkt der Diagonale BD ist, folgt daraus, dass AO die Seitenhalbierende im gleichschenkligen Dreieck ABD ist, also auch die Höhe. Daraus folgt, dass $AO \perp BD$ ist, d. h., $AC \perp BD$.

Kehrsatz 2. Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht zueinander sind, dann ist es ein Rhombus.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

$AC \perp BD$

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist ein Rhombus.

Beweis:

Da $AC \cap BD = \{O\}$ und $ABCD$ ein Parallelogramm ist, folgt daraus, dass O der Mittelpunkt der Diagonalen BD ist, also AO Seitenhalbierende des Dreiecks ABD (1) ist.

Aus der Voraussetzung, da $AC \perp BD$ ist, folgt, dass $AO \perp BD$ ist, also ist AO auch die Höhe im Dreieck ABD (2).

Aus den Beziehungen (1) und (2) ergibt sich, dass das Dreieck ABD gleichschenkelig mit der Grundlinie BD ist und dass $AB \equiv AD$ ist. Somit hat das Parallelogramm $ABCD$ zwei anliegende kongruente Seiten und ist laut Definition ein Rhombus.

Lehrsatz 3. In einem Rhombus sind die Diagonalen die Winkelhalbierenden der Winkel.

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rhombus.

Schlussfolgerung: $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$, $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DCA$
 $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$

Beweis:

In den Dreiecken ABC und ADC haben wir $AB \equiv AD$ und $BC \equiv DC$ (aus den Eigenschaften des Rhombus) sowie $AC \equiv AC$ (als gemeinsame Seite). Daraus ergibt sich $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ (SSS-Fall), also $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DCA$.

In ähnlicher Weise wird gezeigt, dass $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ (SSS-Fall), also $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ und $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$.

Kehrsatz 3. Wenn in einem Parallelogramm eine Diagonale die Winkelhalbierende eines Winkels ist, dann ist es ein Rhombus.

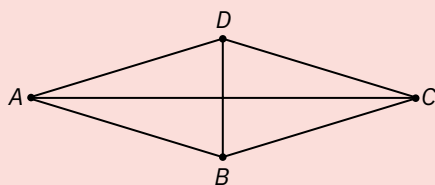


Abbildung 3

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

AC ist die Winkelhalbierende des Winkels BAD .

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist ein Rhombus.

Beweis:

Aus $AB \parallel CD$ folgt, dass $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$, innere Wechselwinkel. Aus $AD \parallel BC$ folgt, dass $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACB$. Da $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$ (wie angenommen) ist, folgt daraus, dass $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD$.

In den Dreiecken BAC und DAC haben wir $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$, $AC \equiv AC$ und $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD$. Daraus folgt, dass $\triangle BAC \equiv \triangle DAC$ (WSW-Fall), also $AB \equiv AD$. Das Parallelogramm $ABCD$ hat also zwei anliegende kongruente Seiten und ist somit ein Rhombus (Abbildung 3).

Mathe im Alltag

Wir wollen einen Innenhof mit Pflastersteinen in der gleichen Rhombusform wie in Abbildung 4 belegen. Die Pflastersteine sind in Dreiergruppen angeordnet, wie in Abbildung 5 dargestellt. Messt den Winkel BPD .

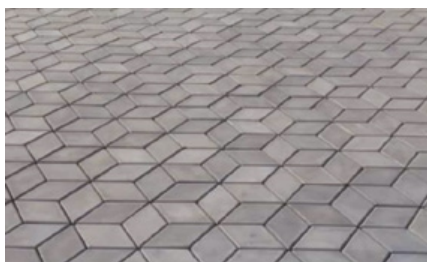


Abbildung 4

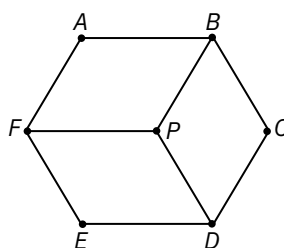


Abbildung 5

Hinweis. Die kongruenten Winkel BPF , BPD und DPF sind Winkel um den Punkt P .

Häufige Arten, einen Rhombus zu konstruieren

1. Unter Verwendung des Kehrsatzes 2

Wir zeichnen zwei nicht kongruente Strecken, die den gleichen Mittelpunkt haben, und lassen das Maß des Winkels zwischen den beiden Strecken 90° sein. Die vier Enden der beiden Strecken sind die Scheitelpunkte des Rhombus.

2. Unter Verwendung eines gleichschenkligen Dreiecks

Wir zeichnen ein gleichschenkliges Dreieck, das kein rechtwinkliges Dreieck ist: seine Eckpunkte sind drei der Eckpunkte des Rhombus. Wir konstruieren den Symmetriepunkt des der Grundlinie gegenüberliegenden Scheitelpunkts in Bezug auf die Grundlinie und erhalten so den vierten Scheitelpunkt des Rhombus.

Bemerkungen

- Ein Rhombus hat zwei Symmetrieachsen, die Diagonalen des Rhombus.
- Der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus (d. h. der Schnittpunkt der Symmetrieachsen) ist der Symmetriemittelpunkt des Rhombus.

Betrachtet man den Rhombus als die Menge der Punkte auf seinen Seiten, so ergibt sich daraus, dass:

- der symmetrische Punkt eines Punktes des Rhombus in Bezug auf jedwede seiner Diagonalen auch ein Punkt des Rhombus ist;
- der symmetrische Punkt eines Punktes des Rhombus in Bezug auf den Schnittpunkt der Diagonalen zum Rhombus gehört.

In Abbildung 6, zum Beispiel, liegt der Punkt E auf der Seite AD des Rhombus $ABCD$. Der symmetrische Punkt von E in Bezug auf AC (die Symmetrieachse des Rhombus) ist der Punkt G auf der Seite AB , und der symmetrische Punkt von E in Bezug auf das Symmetriezentrum O ist der Punkt F auf der Seite BC .

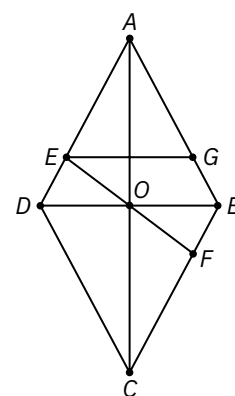


Abbildung 6

Praktische Anwendung

Zeichnet einen Rhombus auf ein Blatt Papier und beschriftet ihn mit $ABCD$. Konstruiert die Diagonalen und markiert ihren Schnittpunkt mit O . Schneidet die vier rechtwinkligen Dreiecke AOB , BOC , COD und DOA aus.

Konstruiert aus den vier Dreiecken ein Rechteck und ein Parallelogramm.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

- Die Punkte A, B, D, C gehören zum Kreis $\mathcal{C}(O, r)$, und zwar in dieser Reihenfolge, sodass die Punkte A und D diametral entgegengesetzt liegen und die Gerade BC die Mittelsenkrechte des Radius OA ist. Zeigt, dass das Viereck $ABOC$ ein Rhombus ist.

Beweis:

Da A und D diametral entgegengesetzte Punkte sind, ist AD der Durchmesser, sodass der Mittelpunkt O des Kreises zur Strecke AD gehört. Die Strecken OB und OC sind Radien, also $OB \equiv OC$ (Abbildung 7).

Da die Gerade BC die Mittelsenkrechte des Strahls OA ist, folgt daraus, dass $d(B, A) = d(B, O)$, d. h., $BA = BO$, bzw. $d(C, A) = d(C, O)$, d. h., $CA = CO$. Folglich ist $AB \equiv OB \equiv OC \equiv CA$, sodass das Viereck $ABOC$ Rhombus ist.

- Bezeichnet im Rechteck $ABCD$ mit E, F, G und H die Mittelpunkte der Seiten AB , BC , CD bzw. DA .

Zeigt, dass das Viereck $EFGH$ ein Rhombus ist.

Beweis:

Die Strecke EH ist Mittellinie im Dreieck ABD , und die Strecke FG ist Mittellinie im Dreieck BCD (Abbildung 8). Daraus folgt, dass $HE \parallel BD$ und $BD = 2 \cdot HE$ bzw. $FG \parallel BD$ und $BD = 2 \cdot FG$. Durch Transitivität ist $HE \parallel FG$ bzw. $HE \equiv FG$ sodass das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm ist.

Die Strecke EF ist Mittellinie im Dreieck ABC ; daher ist $AC = 2 \cdot EF$. Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck, also $AC \equiv BD$. Da $BD = 2 \cdot HE$ und $AC = 2 \cdot EF$ ist, folgern wir, dass $EF \equiv HE$, also $EFGH$ ein Rhombus ist.

- Der Winkel A des Rhombus $ABCD$ beträgt 60° . Aus dem Punkt D konstruiert man $DE \perp BC$, $E \in BC$, und verlängert sie durch eine zu DE kongruente Strecke EF . Zeigt, dass:

- das Viereck $BFCD$ ein Rhombus ist;
- die Punkte A, B und F kollinear sind.

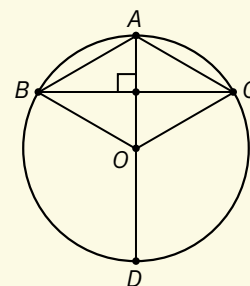


Abbildung 7

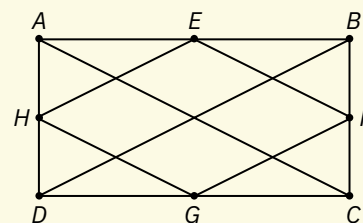


Abbildung 8



Beweis:

- a. Da $BC \equiv CD$ und $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 60^\circ$ ist, folgern wir, dass das Dreieck BCD gleichseitig ist (Abbildung 9). Aus der Voraussetzung ergibt sich $DE \perp BC$, d. h., DE ist Höhe und damit auch Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck BCD . Daraus folgt: $BE \equiv EC$. Weil $EF \equiv DE$ und $BE \equiv EC$ ist, folgt daraus, dass das Viereck $BFCD$ ein Parallelogramm ist, und da $DF \perp BC$ ist, folgern wir, dass es ein Rhombus ist.
- b. Da $BFCD$ ein Rhombus ist, haben wir $BF \parallel CD$. Da $BA \parallel CD$ und B ein Punkt außerhalb der Gerade CD ist, folgt aus dem *Parallelenaxiom*, dass die Geraden BA und BF zusammenfallen und die Punkte A, B und F kollinear sind.

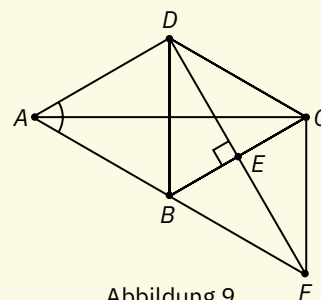


Abbildung 9

4. Im Dreieck ABC , rechtwinklig in A , mit $\sphericalangle C = 30^\circ$ ist AD Höhe, $D \in BC$. Die Gerade EF ist die Mittelsenkrechte der Seite BC , mit $F \in AC$ und $E \in BC$, und $AD \cap BF = \{H\}$.
 - a. Zeigt, dass der Strahl BF die Winkelhalbierende des Winkels ABE ist.
 - b. Beweist, dass das Viereck $AHEF$ ein Rhombus ist.

Beweis:

- a. Die Gerade EF ist die Mittelsenkrechte der Seite $BC \Rightarrow d(F, B) = d(F, C) \Rightarrow FB \equiv FC \Rightarrow \triangle FBC$ ist gleichschenkelig mit der Grundlinie $BC \Rightarrow \sphericalangle FBC \equiv \sphericalangle C \Rightarrow \sphericalangle FBC = \sphericalangle C = 30^\circ$ (Abbildung 10). $\triangle ABC$ ist rechtwinklig in A , mit $\sphericalangle C = 30^\circ$, also $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Dann ist $\sphericalangle ABF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \sphericalangle FBC$, d. h., der Strahl BF ist die Winkelhalbierende des Winkels ABE (1).
- b. Da $\triangle ABC$ in A rechtwinklig ist, mit $\sphericalangle C = 30^\circ$, folgt daraus, dass $BC = 2 \cdot AB$ ist, und da EF die Mittelsenkrechte der Seite BC ist, folgt daraus, dass der Punkt E der Mittelpunkt der Seite BC ist, was $BC = 2 \cdot BE$ bedeutet. Aus den Beziehungen $BC = 2 \cdot AB$ und $BC = 2 \cdot BE$ ergibt sich $AB = BE$ und folglich ist das Dreieck ABE gleichschenkelig. Da der Winkel ABC 60° beträgt, ist das Dreieck ABE gleichseitig. Da die Winkelhalbierende BF die Winkelhalbierende im gleichseitigen Dreieck ABE ist, folgt daraus, dass BF die Höhe in diesem Dreieck ist und somit $BF \perp AE$. Im Dreieck ABC ist AD die Höhe und somit $AD \perp BC$, was $AD \perp BE$ entspricht, was bedeutet, dass AD auch die Höhe im Dreieck ABE ist. Im $\triangle ABE$ sind AD und BF Höhen, $AD \cap BF = \{H\}$, und dann ist der Punkt H das Orthozentrum des Dreiecks ABE . EH ist also die dritte Höhe des Dreiecks ABE und $EH \perp AB$. Da $EH \perp AB$ und $AC \perp AB$, $EH \parallel AF$. Die Gerade EF ist Seitenhalbierende der Seite BC , also $EF \perp BC$. Aus $EF \perp BC$ und $AD \perp BC$ folgt, dass $EF \parallel AD$. Im Viereck $AHEF$ ist $EH \parallel AF$, $EF \parallel AH$, woraus wir ableiten, dass $AHEF$ ein Parallelogramm ist, und da $BF \perp AE$, folgt, dass das Viereck $AHEF$ ein Rhombus ist.

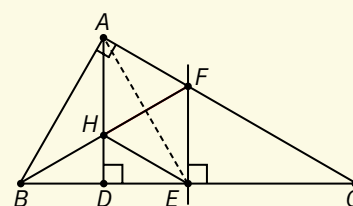


Abbildung 10

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Nennt Beispiele für Rhomben, die ihr im Alltag antrefft (auf dem Schulweg, im Klassenzimmer, auf dem Schulhof, zu Hause usw.).
2. Sei der Rhombus $ABCD$ in Abbildung 11, $AC \cap BD = \{O\}$. Gebt den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an:
 - a. $\sphericalangle AOD = 90^\circ$;
 - b. das Dreieck ADC ist gleichschenkelig;
 - c. die Gerade BD ist nicht Mittelsenkrechte der Strecke AC ;
 - d. das Dreieck AOD ist gleichseitig;
 - e. der Punkt C liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke BD ;
 - f. $\sphericalangle DCO + \sphericalangle ABD > 90^\circ$.
3. In dem Rhombus $ABCD$ ist $AC \cap BD = \{O\}$ und $\sphericalangle BAC = 40^\circ$. Bestimmt die Maße der Winkel BAD, ADC, DBC, DOC, ACB .
4. Die Seitenlänge des Rhombus $ABCD$ ist gleich 9 cm. Berechnet die Länge der Diagonale BD , wenn bekannt ist, dass $\sphericalangle ABC = 120^\circ$ ist.
5. Sei der Rhombus $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, sodass der Abstand zwischen dem Punkt O und der Gerade AB gleich 7 cm ist. Berechnet den Abstand zwischen dem Punkt D und der Gerade AB .

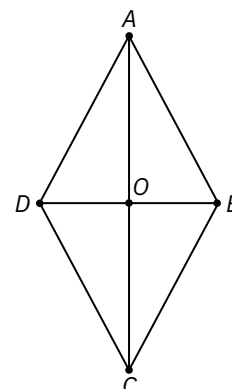


Abbildung 11

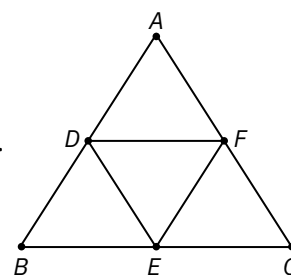


Abbildung 12

6. Sei das gleichseitige Dreieck ABC in Abbildung 12. Die Punkte D , E und F sind die Mittelpunkte der Seiten AB , BC und AC .
 - a. Zeigt, dass das Viereck $ADEF$ Rhombus ist.
 - b. Identifiziert die anderen Rhomben in der Abbildung und begründet eure Antwort.
7. In dem Rhombus $ABCD$ ist $AC \cap BD = \{O\}$, $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ und $DO = 8$ cm.
 - a. Berechnet die Summe der Längen der Seiten des Rhombus $ABCD$.
 - b. Bestimmt den Abstand zwischen dem Punkt D und der Gerade AB .
8. Sei das Rechteck $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Der Punkt M sei der Symmetriepunkt von O in Bezug auf AD . Beweist, dass:
 - a. das Viereck $AODM$ ein Rhombus ist;
 - b. das Viereck $ABOM$ ein Parallelogramm ist.
9. Die Seitenlänge eines Rhombus beträgt 6,25 cm. Der Umfang eines Rechtecks ist das Doppelte der Summe der Seitenlängen dieses Rhombus.
 - a. Zeigt, dass der Umfang des Rechtecks gleich 50 cm ist.
 - b. Bestimmt die Abmessungen des Rechtecks, wobei die Breite ein Viertel der Länge beträgt.
10. Im rechtwinkligen Dreieck ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, ist der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke BC . Die Parallele durch A zur Gerade BC schneidet die Parallele durch B zur Gerade AM im Punkt N . Beweist, dass das Viereck $AMBN$ ein Rhombus ist.
11. Konstruiert auf den Seiten AD und DC eines Rhombus $ABCD$ an der Außenseite des Rhombus die gleichseitigen Dreiecke ADF und ZUE .
 - a. Zeigt, dass die Dreiecke BDE und BDF kongruent sind.
 - b. Beweist, dass das Dreieck BEF gleichseitig ist.
12. Wenn man weiß, dass das arithmetische Mittel der Längen von drei aufeinanderfolgenden Seiten eines Parallelogramms gleich der Länge der vierten Seite ist, beweist, dass das Parallelogramm ein Rhombus ist.
13. In dem Rhombus $ABCD$ sind die Punkte E , F , G und H die Mittelpunkte der Seiten AB , BC , CD und DA . Beweist, dass das Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist.
14. Sei der Rhombus $ABCD$ mit $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ und $AC = 12$ cm.
 - a. Zeigt, dass der Abstand zwischen dem Punkt C und der Gerade AB 6 cm beträgt.
 - b. Berechnet den Abstand von Punkt A zur Gerade BC .
15. Seien die Rhomben $ABCD$ und $ABEF$ so, dass die Winkel BAD und BAF kongruent sind, und die Punkte D und E liegen auf beiden Seiten der Gerade AB . Beweist, dass die Geraden AB und CE senkrecht aufeinander stehen.
16. Sei das Parallelogramm $ABCD$, $\sphericalangle A < 90^\circ$, und die Punkte M und Q auf den Winkelhalbierenden CB bzw. CD , sodass $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle MAB$, $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle QAD$. Wenn $AQ = AM$, beweist, dass $CQ = CM$.

Test

1. In dem Rhombus $ABCD$ ist $AC \cap BD = \{O\}$ und $\sphericalangle BDC = 50^\circ$. Bestimmt die Maße der Winkel $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle DOC$ und $\sphericalangle BAC$. (3 Pkte.)
2. Im Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende des Winkels A die Seite BC im Punkt D . Es sei $DE \parallel AC$, $E \in AB$, und $DF \parallel AB$, $F \in AC$. Beweist, dass $AEDF$ ein Rhombus ist. (3 Pkte.)
3. Es sei der Rhombus $ABCD$ mit $\sphericalangle BAD = 30^\circ$ und $AB = 18$ cm. Berechnet den Abstand vom Punkt A zur Gerade BC . (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



6. Lektion: Das Quadrat. Eigenschaften

Schlüsselwörter

Quadrat

Senkrechte

Rhombus

Symmetrie

Winkelhalbierende

Rechteck

Das Quadrat

Mathe im Alltag

Schaut euch das abstrakte Gemälde auf der nebenstehenden Abbildung an. Was könnt ihr über die Seitenlängen der Vierecke auf dem Gemälde sagen? Wie sieht es mit den Maßen der Winkel aus?

Vergleicht diese Vierecke mit dem Rechteck und dem Rhombus.



Merke dir!

Definition. Ein Rechteck, das zwei anliegende kongruente Seiten hat, heißt Quadrat. Aus der Definition folgt, dass das Quadrat ein Parallelogramm ist, das zwei anliegende kongruente Seiten und einen rechten Winkel hat, also ein Sonderfall des Rhombus ist; genauer gesagt, ist das Quadrat der Rhombus mit einem rechten Winkel. Wir können also sagen, dass das konvexe Viereck, das sowohl Rechteck als auch Rhombus ist, ein Quadrat ist. Also (Abbildung 1):

1. wenn $ABCD$ ein Rechteck ist und $AB \equiv AD$, dann ist $ABCD$ Quadrat.
2. wenn $ABCD$ ein Rhombus ist und $\sphericalangle A = 90^\circ$, dann ist $ABCD$ Quadrat.

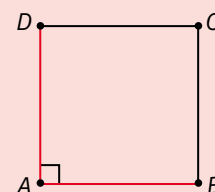


Abbildung 1

Wusstet ihr das?

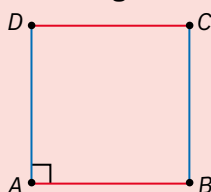
In der rumänischen mathematischen Terminologie wurde der Name *Quadrat* (*pătrat*) 1821 von dem rumänischen Gelehrten Gheorghe Lazăr, dem Begründer des rumänischsprachigen Unterrichts in der Walachei, eingeführt.

Eigenschaften des Quadrats

Merke dir!

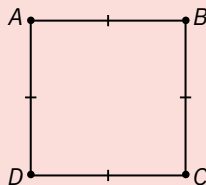
Da das Quadrat sowohl ein Rechteck als auch ein Rhombus (und damit auch ein Parallelogramm) ist, besitzt es alle diese Eigenschaften:

P₁: Das Quadrat hat parallele gegenüberliegende Seiten.



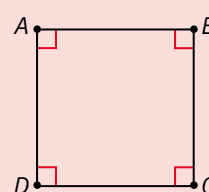
$ABCD$ ist Quadrat $\Rightarrow AC \parallel BD$
und $AD \parallel BC$

P₂: Im Quadrat sind alle Seiten kongruent.



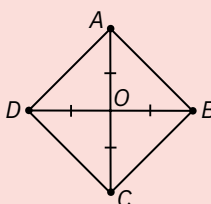
$ABCD$ ist Quadrat $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AB = BC = CD = DA.$

P₃: Im Quadrat sind alle Winkel rechte Winkel.



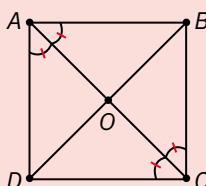
$ABCD$ ist Quadrat $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ.$

P₄: Die Diagonalen des Quadrats halbieren sich.



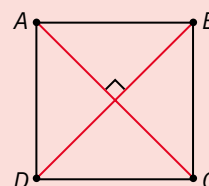
$ADCB$ ist Quadrat $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AO = BO = CO = DO.$

P₅: Die Diagonalen des Quadrats sind die Winkelhalbierenden der Winkel des Quadrats.



$ABCD$ ist Quadrat $\Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC,$
 $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD.$

P₆: Die Diagonalen des Quadrats sind kongruent und stehen senkrecht aufeinander.



$ABCD$ ist Quadrat $\Rightarrow AC = BD$
und $AC \perp BD.$

Um zu beweisen, dass ein Viereck ein Quadrat ist, können wir die folgenden Aussagen verwenden:

Lehrsatz 1. Wenn ein Rechteck senkrechte Diagonalen hat, dann ist es ein Quadrat.

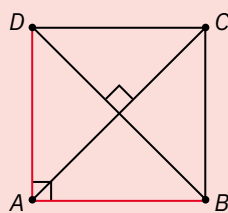


Abbildung 2

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck.
 $AC \perp BD$

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist Quadrat.

Beweis:

Da $ABCD$ ein Rechteck ist, folgern wir, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist (Abbildung 2).

Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm mit $AC \perp BD$, also ein Rhombus; also $AB \equiv AD$.

Da $ABCD$ ein Rechteck ist, mit $AB \equiv AD$, ist $ABCD$ laut Definition ein Quadrat.

Lehrsatz 2. Wenn in einem Rechteck eine Diagonale die Winkelhalbierende eines Winkels ist, dann ist es ein Quadrat.

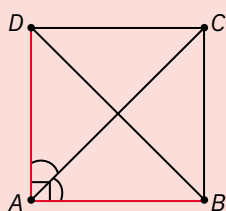


Abbildung 3

Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck.
 AC ist die Winkelhalbierende des Winkels BAD .

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist Quadrat.

Beweis:

Da es sich um ein Rechteck handelt, ist das Quadrat $ABCD$ auch ein Parallelogramm (Abbildung 3). Da der Strahl AC die Winkelhalbierende des Winkels BAD ist, folgt daraus, dass $ABCD$ ein Rhombus ist, also $AB \equiv AD$.

Im Rechteck $ABCD$ ist $AB \equiv AD$, also ist $ABCD$ laut Definition ein Quadrat.

Lehrsatz 3. Wenn ein Rhombus kongruente Diagonalen hat, dann ist er ein Quadrat.

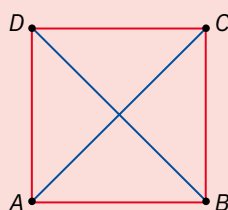


Abbildung 4

Voraussetzung: $ABCD$ ist Rhombus.
 $AC \equiv BD$

Schlussfolgerung: $ABCD$ ist Quadrat.

Beweis:

Da es sich um einen Rhombus handelt, ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm und $AB \equiv AD$ (Abbildung 4).

Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm mit $AC \equiv BD$ und ist somit ein Rechteck.

$ABCD$ ist also ein Rechteck mit $AB \equiv AD$, und daraus folgt, dass $ABCD$ ein Quadrat ist.

Das Symmetriezentrum. Symmetrieachsen des Quadrats

Problemstellung

Das Quadrat ist ein besonderes Parallelogramm und hat als Symmetriezentrum den Schnittpunkt der Diagonalen, d. h. den Punkt O .

Das Quadrat weist vier Symmetrieachsen auf: die Mittelsenkrechten seiner Seiten und die Geraden, die die Diagonalen einschließen. Für das Quadrat $ABCD$ in Abbildung 5 gilt:

- die Mittelsenkrechten seiner Seiten (die Geraden EF und GH) sind Symmetrieachsen;
- die Geraden AC und BD , die die Diagonalen einschließen, sind Symmetrieachsen.

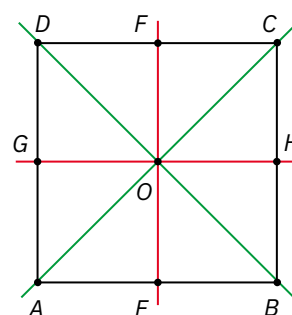


Abbildung 5



Häufige Arten, ein Quadrat zu konstruieren



1. Lehrsatz 1 anwenden

Zeichnet zwei kongruente Strecken, die denselben Mittelpunkt haben, sodass das Maß des Winkels zwischen den beiden Strecken 90° beträgt.

Die vier Endpunkte der beiden Strecken sind die Eckpunkte des Quadrats.

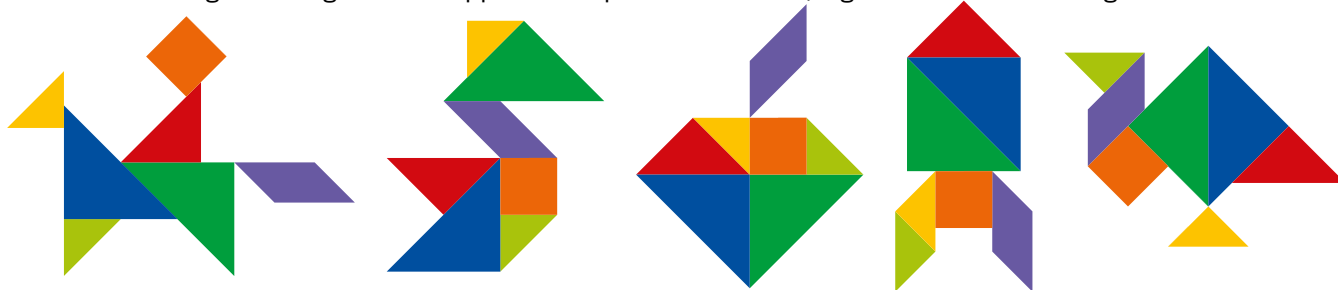
2. Verwendung eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks

Zeichnet ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck: seine Eckpunkte sind drei der Eckpunkte des Quadrats. Man konstruiert den Symmetriepunkt der Ecke, die der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks gegenüberliegt, in Bezug auf diese und erhält so die vierte Ecke des Quadrats.

Spiel

Das Tangram ist ein sehr altes Puzzlespiel, das auch als „magisches Quadrat“ oder „Sieben-Quadrat-Brett“ bekannt ist. Der Spieler verwendet sieben Teile – fünf gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke, ein Quadrat und ein Parallelogramm –, um Hunderte von Figuren zu bilden. Bei der Herstellung der Figuren müssen sich die Teile berühren, ohne sich zu überlappen.

Bastelt euer eigenes Tangram aus Pappe oder Papier und versucht, Figuren wie die unten abgebildeten zu bilden.



Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



- Der Punkt I ist der Mittelpunkt des Innenkreises des Dreiecks ABC , das in A rechtwinklig ist, und $ID \perp AC$, $IE \perp AB$, mit $D \in AC$ und $E \in AB$.

Zeigt, dass das Viereck $ADIE$ ein Quadrat ist.

Beweis:

Da der Punkt I der Mittelpunkt des Innenkreises des Dreiecks ABC ist, folgt daraus, dass der Strahl AI die Winkelhalbierende des Winkels BAC ist (Abbildung 6) (1).

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig in A , $ID \perp AC$, $IE \perp AB$, also $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADI = \sphericalangle AEI = 90^\circ$ und dann ist das Viereck $ADIE$ ein Rechteck (2).

Aus den Beziehungen (1) und (2) ergibt sich, dass das Viereck $ADIE$ ein Quadrat ist.

- Auf den Seiten AB , BC , CD und DA des Quadrats $ABCD$ seien die Punkte E , F , G bzw. H , sodass $AE = BF = CG = DH$ gilt. Zeigt, dass die Geraden EG und FH senkrecht zueinander stehen.

Beweis:

Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat, also $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$ (1) und $AD = AB = BC = CD$ (2) (Abbildung 7).

Laut der Voraussetzung ist $AE = BF = CG = DH$ (3). Aus (2) und (3) ergibt sich, dass $AD - DH = AB - AE = BC - BF = CD - CG \Leftrightarrow AH = BE = CF = DG$ (4).

Aus der Beziehung (1) ergibt sich, dass die Dreiecke AEH , BFE , CGF und DHG in A , B , C bzw. D rechtwinklig sind (5). Aus den Beziehungen (3), (4) und (5) ergibt sich $\triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG$ (KK-Fall). Also $HE \cong EF \cong FG \cong GH$ und dann ist das Viereck $EFGH$ ein Rhombus, was $EG \perp HF$.

- Im Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ sind die Durchmesser AC und BD senkrecht aufeinander. Zeigt, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

Beweis:

Da AC und BD Durchmesser des Kreises $\mathcal{C}(O, r)$ sind, folgt daraus, dass $AC \cap BD = \{O\}$ und $AC \cong BD$ (Abbildung 8). Daraus folgt auch, dass der Punkt O der Mittelpunkt der Strecken AC und BD ist, sodass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Aus der Tatsache, dass in diesem Parallelogramm $AC \cong BD$ ist, lässt sich ableiten, dass $ABCD$ ein Rechteck ist. Da im Rechteck $ABCD$ die Diagonalen AC und BD senkrecht zueinander sind, folgt, dass $ABCD$ ein Quadrat ist.

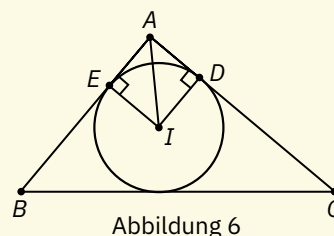


Abbildung 6

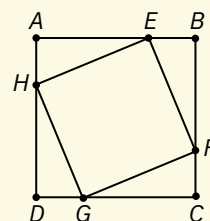


Abbildung 7

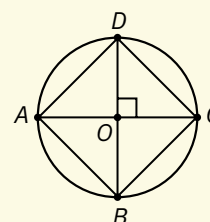


Abbildung 8

4. Seien das Quadrat $ABCD$ und das gleichseitige Dreieck ABM .

- Berechnet das Maß des Winkels MCD , wenn der Punkt M innerhalb des Quadrats $ABCD$ liegt.
- Berechnet das Maß des Winkels MCD , wenn der Punkt M außerhalb des Quadrats $ABCD$ liegt.

Beweis:

$\triangle ABM$ ist gleichseitig $\Rightarrow AB \equiv AM \equiv BM$ (1) und $\sphericalangle ABM = 60^\circ$ (2).

Da $ABCD$ ein Quadrat ist, folgt daraus, dass $AB \equiv BC$ (3) und $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 90^\circ$ (4). (4). Aus (1) und (3) ergibt sich, dass $BM \equiv BC$, und folglich ist das Dreieck BMC gleichschenkelig mit der Grundlinie MC (5).

- Wir verwenden Abbildung 9.

Aus (2) und (4) ergibt sich, dass $\sphericalangle CBM = 30^\circ$ (6).

Aus den Beziehungen (5) und (6) ergibt sich, dass $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC = \frac{180^\circ - \sphericalangle CBM}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Dann ist $\sphericalangle MCD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCM = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

- Wir verwenden Abbildung 10. Aus den Beziehungen (2) und (4) ergibt sich, dass $\sphericalangle CBM = 150^\circ$ (7). Aus den

Beziehungen (5) und (7) ergibt sich, dass $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC = \frac{180^\circ - \sphericalangle CBM}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$. Dann ist $\sphericalangle MCD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCM = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

5. Im Äußeren des Quadrats $ABCD$ mit $AC \cap BD = \{O\}$ sei ein Punkt E so, dass die Punkte A, C, E in dieser Reihenfolge kollinear sind und $\sphericalangle BED = 60^\circ$. Zeigt, dass das Dreieck BED gleichseitig ist.

Beweis:

Da $ABCD$ ein Quadrat ist, mit $AC \cap BD = \{O\}$, folgt daraus, dass $CA \perp BD$ und der Punkt O der Mittelpunkt der Diagonalen BD ist (Abbildung 11). Dann ist die Gerade AC die Mittelsenkrechte der Strecke BD , und da $E \in AC$ ist, folgt, dass $d(E, B) = d(E, D) \Leftrightarrow EB = ED \Leftrightarrow EB \equiv ED \Rightarrow \triangle BED$ gleichschenkelig ist.

Da das Dreieck BED gleichschenkelig ist, mit $\sphericalangle BED = 60^\circ$, folgt daraus, dass das Dreieck BED gleichseitig ist.

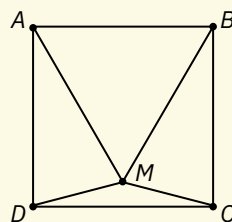


Abbildung 9

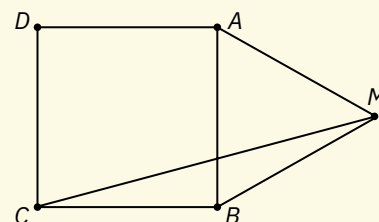


Abbildung 10

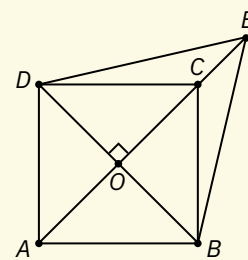


Abbildung 11

Vorgeschlagene Aufgaben

- Gibt den Wahrheitswert folgender Aussagen an:
 - Wenn $ABCD$ ein Rhombus ist und $AC = BD$, dann ist $ABCD$ ein Quadrat
 - Wenn $ABCD$ ein Rhombus ist und $\sphericalangle DAC = 45^\circ$, dann ist $ABCD$ Quadrat.
 - Im Quadrat $ABCD$ ist $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DCA = 90^\circ$.
 - Wenn E zur Seite AD des Quadrats $ABCD$ gehört, dann liegt der Symmetriepunkt von E in Bezug auf AC auf der Strecke BC .
 - Wenn E zur Seite AD des Quadrats $ABCD$ gehört, dann liegt der Symmetriepunkt von E in Bezug auf BD auf der Strecke DC .
 - Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, $AC \cap BD = \{O\}$, und $AO = 2$ cm, dann ist $AC + BD = 8$ cm.
 - Ein Rechteck $MNPQ$ mit $\sphericalangle PMN = 45^\circ$ ist ein Quadrat.
- In dem Rechteck $ABCD$, in dem $AB = 2 \cdot BC$ ist, sind die Punkte M und P die Mittelpunkte der Seiten AB und DC .
 - Beweist, dass die Vierecke $AMPD$ und $BCPM$ Quadrate sind.
 - Berechnet das Maß $\sphericalangle ABP$.
 - Wenn $AP \cap MD = \{O_1\}$, $MC \cap BP = \{O_2\}$ und $O_1O_2 = 9$ cm, berechnet den Umfang des Rechtecks $ABCD$.
- Seien das Quadrat $ABCD$ und die Punkte M und P die Mittelpunkte der Seiten AB und AD . Beweist, dass das Viereck $AMOP$ ein Quadrat ist, wobei $AC \cap BD = \{O\}$.
- Sei das Quadrat $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Der Punkt P sei der Mittelpunkt der Strecke AO und der Punkt S sei der Mittelpunkt der Seite AD . Wenn $OS \cap DP = \{M\}$ und $AB = 12$ cm, berechnet die Länge der Strecke OM .



5. O_1, O_2, O_3 seien die Mittelpunkte der Quadrate, die auf der Außenseite des gleichseitigen Dreiecks ABC auf den Seiten BC, AC bzw. AB konstruiert sind.
 - a. Zeigt, dass das Dreieck $O_1O_2O_3$ gleichseitig ist und seine Seiten parallel zu denen des Dreiecks ABC verlaufen.
 - b. Bestimmt das Maß des Winkels zwischen den Geraden AO_3 und CO_1 .
6. a. In Abbildung 12 ist das Viereck $ABMP$ ein Quadrat. Im Inneren des Quadrats sind die Punkte C und D so gewählt, dass $AB \parallel DC, AD = BC$ und $\angle ADC = 135^\circ$. Beweist, dass die Punkte A, D und M kollinear sind.
 - b. Beweist, dass $DP = CM$ ist.
 - c. Wenn der Schnittpunkt der Geraden DP und CM zur Gerade AB gehört, berechne $\frac{DA}{DM}$.
7. Konstruiert außerhalb des Quadrats $ABCD$ die Quadrate $BCMP$ und $DCSQ$. Beweist, dass die Punkte P, C, Q kollinear sind und das Viereck $BMSD$ ein Quadrat ist.
8. Sei ein Quadrat $ABCD$ mit einer Seitenlänge von 6 cm und den Punkten M, N, P und Q auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA , sodass $AM = BN = CP = DQ = 4$ cm.
 - a. Zeigt, dass $MNPQ$ ein Rhombus ist.
 - b. Beweist, dass MP, BD und NQ konkurrent sind
9. Im Quadrat $ABCD$ sei der Punkt P auf der Diagonalen BD so, dass $DP < PB$ ist. Die Senkrechte in P auf der Gerade BD schneidet die Gerade DC in Q und die Gerade BC in R . Beweist, dass $BQ \perp DR$.
10. Konstruiert auf den Außenseiten des Dreiecks ABC die Quadrate $ACMP$ und $ABRT$. Beweist, dass die Strecken TC und BP kongruent sind.

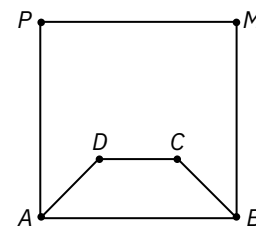


Abbildung 12

Test

1. Sei das Quadrat $ABCD, AC \cap BD = \{O\}$ und $BO + DC = 11$ cm. Berechne die Summe $AB + BC + CD + DA + AC + BD$. (3 Pkte.)
2. Konstruiert auf den Außenseiten des Quadrats $ABCD$ die Rechtecke $ABMP$ und $BCSQ$ so, dass $AP = CS$ ist. Zeigt, dass die Geraden MQ und AC parallel sind. (3 Pkte.)
3. Konstruiert aus fünf Quadraten mit den Seitenlängen 4 cm ein Rechteck $ABCD$. Berechne den Umfang des Rechtecks $ABCD$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

7. Lektion: Das Trapez: Einteilung, Eigenschaften. Die Mittellinie im Trapez

Schlüsselwörter

Trapez

nicht parallel

gleichschenkl.

Mittellinie

Halbsumme

Halbdifferenz

Das Trapez

Mathe im Alltag

Im Zirkus gibt es nicht nur Jonglage und Spaß, sondern auch viele spektakuläre Akrobatiknummern. Einige der Akrobaten treten an einem Gerät auf, das aus zwei parallelen und zwei nicht parallelen Seiten besteht und Trapez genannt wird.

Merke dir!

Definition. Ein Viereck mit zwei parallelen Seiten und zwei nicht parallelen Seiten wird Trapez genannt.

Die parallelen Seiten eines Trapezes sind gegenüberliegende Seiten, haben unterschiedliche Längen und werden als *Grundlinien* bezeichnet.

In Abbildung 1 sind die parallelen Seiten des Trapezes $ABCD$ AB und CD , und die nicht parallelen Seiten sind AD und BC .

Da $AB > CD$ ist, sagen wir, dass AB die *große Grundlinie* und CD die *kleine Grundlinie* ist.

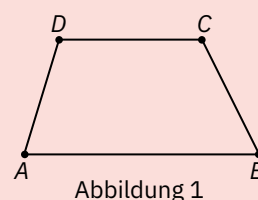


Abbildung 1

Wusstet ihr das?

Das Wort *Trapez* stammt vom griechischen Wort „trapezio“ ab. Der Name Trapez wurde erstmals im 4. Jahrhundert v. Chr. verwendet.

Beispiele

1. Identifiziert die Trapeze in den folgenden Bildern:

Dach eines Hauses



Gemüsereiben



Tasche



2. In Abbildung 2 sind die Punkte M , D und P die Mittelpunkte der Seiten AB , BC und AC des Dreiecks ABC , sodass die Strecken MD , DP und PM die Mittellinien des Dreiecks ABC sind. Aus der Eigenschaft der Mittellinie ergibt sich: $MD \parallel AC$, $DP \parallel AB$, $MP \parallel BC$. Im Viereck $MBCP$ haben wir $MP \parallel BC$ und $BM \nparallel CP$ (da BM und CP in A übereinstimmen), also ist $MBCP$ ein Trapez. Analog leiten wir ab, dass $ABDP$ und $ACDM$ Trapeze sind.

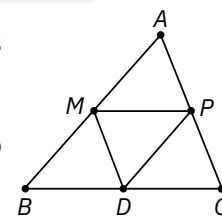
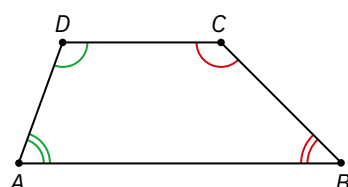


Abbildung 2

Eigenschaften des Trapezes

Lehrsatz 1. In einem Trapez sind die anliegenden Winkel von nicht parallelen Seiten supplementär.



Voraussetzung:

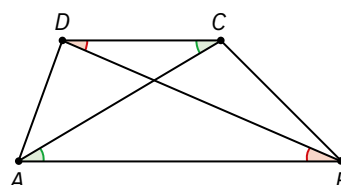
$ABCD$ Trapez, $AB \parallel CD$

Schlussfolgerung:

$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 180^\circ$

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$

Lehrsatz 2. In einem Trapez bildet jede Diagonale Winkelpaare, die mit den Grundlinien des Trapezes kongruent sind.



Voraussetzung:

$ABCD$ Trapez, $AB \parallel CD$

Schlussfolgerung:

$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle ACD$

$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BDC$

Einteilung der Trapeze

Je nach bestimmten Eigenschaften der nicht parallelen Seiten unterscheidet man zwei besondere Arten von Trapezen.

Merke dir!

Definition. Ein Trapez, bei dem eine der nicht parallelen Seiten senkrecht zu den Grundlinien steht, wird als *rechtwinkliges Trapez* bezeichnet.

In Abbildung 3 ist $ABCD$ ein rechtwinkliges Trapez mit $AB \parallel CD$ und $AD \perp AB$, $AD \perp DC$. Da die Grundlinien parallel sind, genügt es, wenn eine der nicht parallelen Seiten senkrecht zu einer der Grundlinien ist, sodass das Trapez rechtwinklig ist.

Mit anderen Worten: Ein Trapez, das einen rechten Winkel hat, ist ein rechtwinkliges Trapez. Wenn nämlich im Trapez $ABCD$ $AB \parallel CD$ und $\sphericalangle A = 90^\circ$ sind, dann ist $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$, es folgt, dass $\sphericalangle D = 90^\circ$ ist, d. h., $AD \perp AB$ und $AD \perp DC$.

Definition. Ein Trapez mit nicht parallelen, kongruenten Seiten wird als gleichschenkliges Trapez bezeichnet. In Abbildung 4 ist das Trapez $ABCD$, mit $AB \parallel CD$ und $AD \equiv BC$, ein gleichschenkliges Trapez.

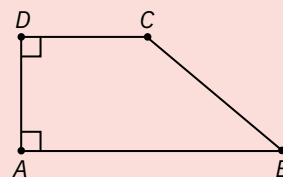


Abbildung 3

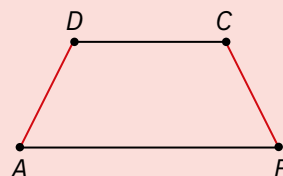


Abbildung 4

Eigenschaften des gleichschenkligen Trapezes

Merke dir!

Lehrsatz 3. In einem gleichschenkligen Trapez sind die an einer Grundlinie anliegenden Winkel kongruent.

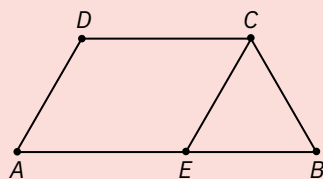


Abbildung 5

Voraussetzung: $ABCD$ Trapez, $AB \parallel CD$
 $AD \equiv BC$

Schlussfolgerung: $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$
 $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BCD$

Beweis:

Angenommen $AB > CD$ (der Fall $AB < CD$ ist analog). Wir konstruieren $CE \parallel AD$, mit $E \in AB$ (Abbildung 5). Da $AE \parallel CD$ und $CE \parallel AD$, ist das Viereck $AECD$ ein Parallelogramm, also $AD \equiv EC$. Da $AD \equiv BC$ ist, folgt daraus, dass $BC \equiv CE$ ist, sodass das Dreieck CBE gleichschenkelig ist und die Grundlinie BE hat. Folglich ist $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle ABC$ und da $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CEB$ (Stufenwinkel, die von den parallelen Geraden AD und CE mit der Sekante AB gebildet werden), folgt, dass $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$. Da sich die Winkel anliegend einer nicht parallelen Seite supplementär sind, ergibt sich $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle DAB = 180^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$.

Kehrsatz 3. Wenn in einem Trapez die an einer Grundlinie anliegenden Winkel kongruent sind, dann ist das Trapez gleichschenkelig.

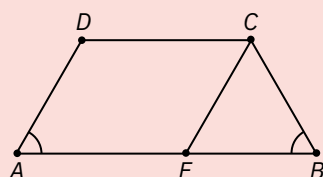


Abbildung 6

Voraussetzung: $ABCD$ Trapez, $AB \parallel CD$
 $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$

Schlussfolgerung: $AD \equiv BC$

Beweis:

Angenommen, $AB > CD$ (der Fall $AB < CD$ ist analog). Wir konstruieren $CE \parallel AD$, mit $E \in AB$ (Abbildung 6). Da $AE \parallel CD$ und $CE \parallel AD$, ist das Viereck $AECD$ ein Parallelogramm, also $AD \equiv CE$. Da $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$ (aus der Voraussetzung) und $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CEB$ (Stufenwinkel), folgt, dass $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle ABC$. Daraus folgt, dass das Dreieck CBE gleichschenkelig mit der Grundlinie BE ist, also $CB \equiv CE$ und da $CE \equiv AD$ ist, folgt, dass $AD \equiv BC$ ist.

Lehrsatz 4. In einem gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen kongruent.

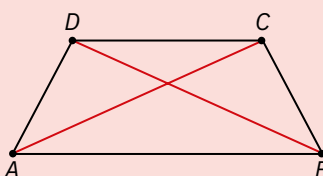


Abbildung 7

Voraussetzung: $ABCD$ Trapez, $AB \parallel CD$
 $AD \equiv BC$

Schlussfolgerung: $AC \equiv BD$

Beweis:

Vergleichen wir die Dreiecke ABD und BAC (Abbildung 7). Wir haben $AD \equiv BC$ (aus der Voraussetzung), $AB \equiv BA$ (gemeinsame Seite) und $\sphericalangle CBA \equiv \sphericalangle DAB$ (da nach Satz 3 die an einer Grundlinie anliegenden Winkel eines gleichschenkligen Trapezes kongruent sind). Daraus ergibt sich $\triangle ABD \equiv \triangle BAC$ (SWS-Fall), also $AC \equiv BD$.

Kehrsatz 4. Wenn in einem Trapez die Diagonalen kongruent sind, dann ist das Trapez gleichschenkl.

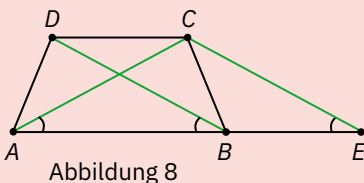


Abbildung 8

Voraussetzung: $ABCD$ Trapez
 $AB \parallel CD, AC \equiv BD$
Schlussfolgerung: $AD \equiv BC$

Beweis:

Es sei $CE \parallel BD$, mit $E \in AB$. Da $BE \parallel CD$ und $CE \parallel BD$, ist das Viereck $BECD$ ein Parallelogramm, also $BD \equiv EC$ (Abbildung 8). Da $AC \equiv BD$ ist, folgt $CA \equiv CE$, d. h., das Dreieck CAE ist gleichschenkl mit der Grundlinie AE , also $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle CEA$. Aber $\sphericalangle CEA \equiv \sphericalangle DBA$ (Stufenwinkel), also $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$. Da $CA \equiv BD$ (aus der Voraussetzung), $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$ und $AB \equiv BA$, folgt daraus, dass $\triangle CAB \equiv \triangle DBA$ (SWS-Fall), woraus folgt, dass $AD \equiv BC$.

Anwendung. Wenn $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez und O der Schnittpunkt der Diagonalen des Trapezes ist, dann sind die Dreiecke OAB und OCD gleichschenkl.

Beweis:

In den Dreiecken ABC und BAD haben wir $AB \equiv BA$, $BC \equiv AD$ und $AC \equiv BD$, also $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ (Abbildung 9). Daraus ergibt sich, $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$, d. h., $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA$, woraus folgt, dass das Dreieck OAB gleichschenkl ist. Da $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OCD$ und $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle ODC$ (innere Wechselwinkel), ergibt sich auch $\sphericalangle OCD \equiv \sphericalangle ODC$, sodass das Dreieck OCD ebenfalls gleichschenkl ist.

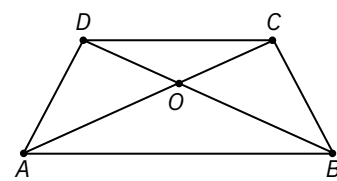


Abbildung 9

Symmetrieachse eines gleichschenkligen Trapezes

Es sei $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $AB \parallel CD$, $AB > CD$ und $\{O\} = AC \cap BD$. Wir bezeichnen mit E und F die Mittelpunkte der Grundlinien AB bzw. CD (Abbildung 10).

Da die Dreiecke OAB und OCD gleichschenkl sind, ist die Gerade OE die Mittelsenkrechte der Strecke AB und die Gerade OF die Mittelsenkrechte der Strecke CD . Aus $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ und $AB \parallel CD$, folgt, dass die Punkte E , O und F kollinear sind.

Folglich ist die Gerade EF , die die Mittelpunkte der Grundlinie eines gleichschenkligen Trapezes verbindet, die gemeinsame Mittelsenkrechte der Grundlinien des Trapezes.

Die Gerade EF ist die Symmetrieachse des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$.

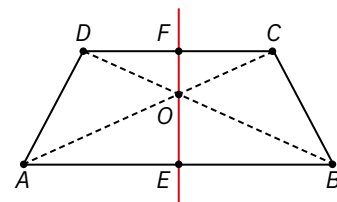


Abbildung 10

Konstruktion eines gleichschenkligen Trapezes

Wir konstruieren eine Strecke AB der Länge $2a$, $a > 0$, und seine Mittelsenkrechte d . In einer der beiden Halbebenen, die durch AB bestimmt werden, nehmen wir einen Punkt C an, sodass der Abstand zwischen dem Punkt C und der Geraden d kleiner als a ist, und wir konstruieren den Symmetriepunkt von C in Bezug auf die Gerade d , den wir mit D bezeichnen. Das Viereck, das durch die Punkte A , B , C und D bestimmt wird, ist ein gleichschenkliges Trapez mit großer Grundlinie AB und kleiner Grundlinie CD .

Mittellinie im Trapez

Merke dir!

Definition. Die Strecke, deren Enden die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten eines Trapezes sind, wird *Mittellinie* des Trapezes genannt.

In Abbildung 11:

$ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$
 E ist die Mitte der Seite AD
 F ist der Mittelpunkt der Seite BC } $\Leftrightarrow EF$ ist die Mittellinie des Trapezes.

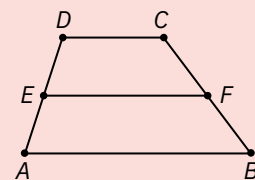


Abbildung 11





Merke dir!

Lehrsatz 5. Die Mittellinie des Trapezes verläuft parallel zu den Grundlinien und hat eine Länge, die gleich der Hälfte der Summe der Längen der Grundlinien ist.

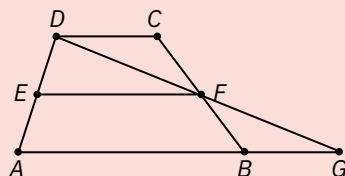


Abbildung 12

Voraussetzung: $ABCD$ -Trapez, $AB \parallel CD$
 E ist der Mittelpunkt der Seite AD .
 F ist der Mittelpunkt der Seite BC .

Schlussfolgerung: $EF \parallel AB \parallel CD$ und $EF = \frac{AB + CD}{2}$

Beweis:

Es sei $DF \cap AB = \{G\}$ (Abbildung 12). Da $\angle DFC \equiv \angle GFB$ (Scheitelwinkel), $CF \equiv BF$ und $\angle DCF \equiv \angle GBF$ (innere Wechselwinkel), folgt, dass $\triangle DCF \equiv \triangle GBF$ (WSW-Fall), also $DF \equiv GF$ und $DC \equiv BG$.

Es folgt, dass F der Mittelpunkt der Strecke DG ist, also ist EF Mittellinie im Dreieck DAG . Daraus folgt, dass

$$EF \parallel AG \text{ und } EF = \frac{AG}{2}, \text{ wobei } EF \parallel DC \parallel AB \text{ und } EF = \frac{AG}{2} = \frac{AB + BG}{2} = \frac{AB + CD}{2}.$$



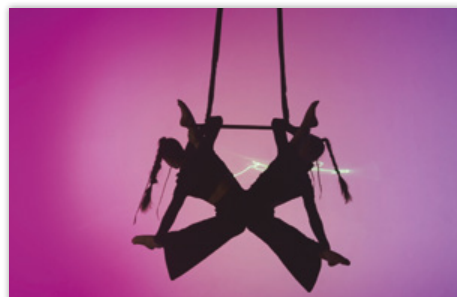
Bemerkungen

- Lehrsatz 5 zeigt, dass die Länge der Mittellinie eines Trapezes gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Grundlinien ist.
- Die folgenden Aussagen (Kehrsatz 5) gelten:
 - Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, der Punkt E der Mittelpunkt der Seite AD ist und der Punkt F zur Seite BC gehört, sodass $EF \parallel AB$ ist, dann ist der Punkt F der Mittelpunkt der Seite BC .
 - Wenn in einem Trapez $ABCD$, mit $AB \parallel CD$, die Punkte E und F zu den Seiten AD bzw. BC gehören, sodass $EF \parallel AB$ und $EF = \frac{AB + CD}{2}$, dann ist EF die Mittellinie des Trapezes $ABCD$.



Wusstet ihr das?

Der Franzose Jules Léotard führte Mitte des 19. Jahrhunderts das Trapez in die Zirkusakrobatik ein. Das Trapez wurde zunächst im Zirkus Franconi in Paris und dann 1861 im Alhambra-Theater in London als Akrobatiknummer gezeigt.



Portfolio

Konzeptkarte

- Definiert **drei** Begriffe, die in dieser Karte enthalten sind.
- Nennt **zwei** Ideen, über die ihr gerne mehr erfahren würdet.
- Schreibt **eine** Fähigkeit auf, die ihr eurer Meinung nach in diesen Lektionen gelernt habt.

Zeichnet die Karte in Abbildung 13 auf ein A4-Blatt und fügt sie in eure persönlichen Mappe *Geometrie des Vierecks* hinzu.

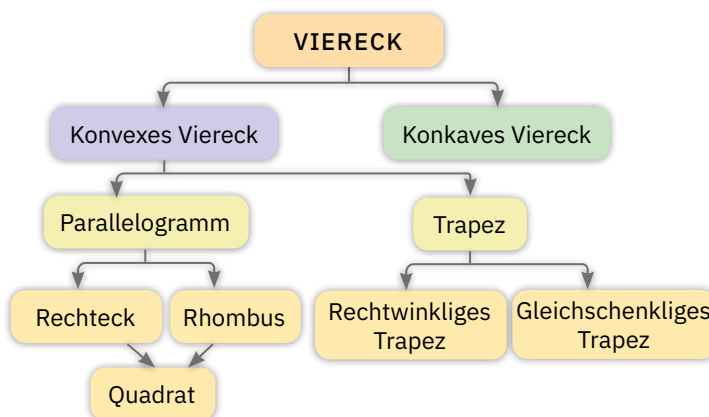


Abbildung 13

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Das Dreieck VAB ist gleichschenklig mit der Grundlinie AB , und die Punkte C und D gehören zu den Seiten VB bzw. VA , sodass $CD \parallel AB$ ist. Zeigt, dass $AC \equiv BD$.

Lösung:

Weil AD und BC nicht parallel sind (da sie sich in V schneiden), folgt aus $CD \parallel AB$ und $AD \parallel BC$, dass $ABCD$ ein Trapez ist (Abbildung 14). Da $\sphericalangle VAB \equiv \sphericalangle VBA$, folgt daraus, dass $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$, also ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez, und dann $AC \equiv BD$.

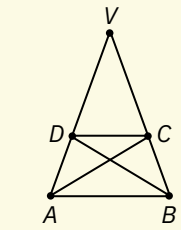


Abbildung 14

2. Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Senkrechten $DE \perp AB$ und $CF \perp AB$, wobei $E, F \in AB$. Zeigt, dass $AE = BF = \frac{AB - CD}{2}$.

Lösung:

Da $DE \perp AB$, $CF \perp AB$, ist, folgt daraus, dass $DE \parallel CF$ und da $EF \parallel CD$ ist, folgern wir, dass das Viereck $CDEF$ ein Parallelogramm ist, also $EF \equiv CD$ (Abbildung 15).

Da $\sphericalangle AED = \sphericalangle BFC = 90^\circ$, $AD \equiv BC$ und $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$, sind die Dreiecke AED und BFC kongruent (HW-Fall), also $AE \equiv BF$, woraus folgt, dass

$$AE = BF = \frac{AB - EF}{2} = \frac{AB - CD}{2}.$$

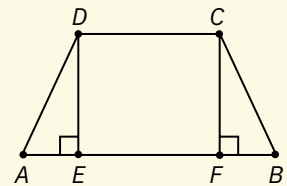


Abbildung 15

3. Zeigt, dass die folgenden Eigenschaften in jedem Trapez gültig sind:
- die Mittelpunkte der Diagonalen des Trapezes liegen auf der Mittellinie des Trapezes;
 - die Länge der Strecke, die durch die Schnittpunkte der Diagonalen des Trapezes mit seiner Mittellinie bestimmt wird, ist gleich der halben Differenz der Längen der Grundlinien des Trapezes.

Lösung:

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$. Wir bezeichnen mit E und F die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten AD bzw. BC und mit M, N die Mittelpunkte der Diagonalen AC bzw. BD (Abbildung 16). Die Strecken EM

und FN sind Mittellinien in den Dreiecken ADC bzw. BCD , also $EM \parallel DC$ und

$$EM = \frac{CD}{2} \text{ bzw. } FN \parallel DC \text{ und } FN = \frac{CD}{2}.$$

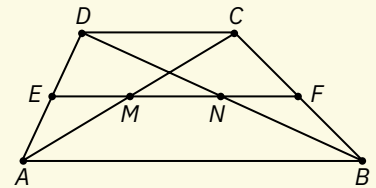


Abbildung 16

- a. Da EF die Mittellinie des Trapezes $ABCD$ ist, folgt $EF \parallel CD$. Da $EM \parallel DC$ und $FN \parallel DC$, folgt aus dem Parallelenaxiom, dass $M, N \in EF$, d. h., M und N auf der Mittellinie des Trapezes liegen.

- b. Da $EF = \frac{AB + CD}{2}$, folgt, dass $MN = EF - EM - FN = \frac{AB + CD}{2} - \frac{CD}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{AB - CD}{2}$.

4. Im spitzwinkligen Dreieck ABC mit $AB < AC$ sind die Punkte M, P, Q die Mittelpunkte der Seiten AB, AC bzw. BC , und $AD, D \in BC$, ist die Höhe. Zeigt, dass das Viereck $MPQD$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

Lösung:

Wir zeigen zunächst, dass $MPQD$ ein Trapez ist. Die Strecke MP ist Mittellinie im Dreieck ABC , also $MP \parallel BC$, d. h., $MP \parallel DQ$ (Abbildung 17). Da die Geraden AB und MD Sekanten sind und $PQ \parallel AB$ (als Mittellinie im Dreieck ABC), folgt daraus, dass die Geraden MD und PQ nicht parallel sind. Daher ist $MP \parallel DQ$ und $MD \nparallel PQ$, also $MPQD$ ist ein Trapez. Da MD die Mittellinie im rechtwinkligen Dreieck ADB ist, folgt daraus, dass

$$DM = \frac{AB}{2}. \text{ Aber } PQ = \frac{AB}{2} \text{ (aus der Eigenschaft der Mittellinie), also ist } DM = PQ,$$

d. h., das Trapez $MPQD$ ist gleichschenkl.

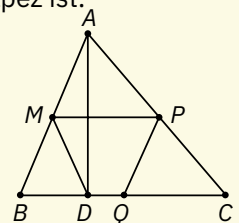


Abbildung 17

5. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AD > AB$. Wir bezeichnen mit E den symmetrischen Punkt des Punktes D in Bezug auf die Gerade AC . Zeigt, dass:

- $AB \equiv CE$;
- das Viereck $ABEC$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

Lösung:

- a. Da E symmetrisch zu D in Bezug auf AC ist, ist die Gerade AC die Mittelsenkrechte der Strecke DE (Abbildung 18). Daraus folgt, dass der Punkt C gleich weit von den Endpunkten der Strecke DE entfernt ist, d. h., $CD \equiv CE$. Da $AB \equiv CD$ (da $ABCD$ ein Parallelogramm ist), folgt daraus, dass $AB \equiv CE$.

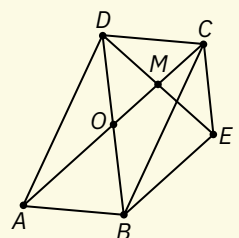


Abbildung 18



- b. Sei $\{O\} = AC \cap BD$ und $\{M\} = DE \cap AC$. Dann ist O der Mittelpunkt der Diagonale BD , und M ist der Mittelpunkt der Strecke DE , da er auf der Mittelsenkrechten dieser Strecke liegt.

Wir leiten daraus ab, dass die Strecke OM Mittellinie im Dreieck DBE ist, also $OM \parallel BE$, äquivalent mit $BE \parallel AC$. Da die Geraden CE und CD einen gemeinsamen Punkt haben und $AB \parallel CD$ ist, folgt daraus, dass die Geraden CE und AB nicht parallel sind. Daher ist $BE \parallel AC$ und $CE \nparallel AB$, sodass $ABEC$ ein Trapez ist. Nach Punkt a haben wir $AB \equiv CE$, also ist $ABEC$ ein gleichschenkliges Trapez.

Vorgeschlagene Aufgaben



- Sei das rechtwinklige Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\sphericalangle ABC = 40^\circ$. Bestimmt die Maße der Winkel BAD , BCD und ADC .
- In dem gleichschenkligen Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, beträgt der Winkel A 30° . Bestimmt die Maße der anderen Winkel des Trapezes.
- Das Trapez $ABCD$ hat eine große Grundlinie von 18 cm und eine kleine Grundlinie von 12 cm.
 - Berechnet die Länge der Mittellinie des Trapezes $ABCD$.
 - Berechnet die Länge der Strecke, die von den Mittelpunkten der Diagonalen des Trapezes $ABCD$ bestimmt wird.
- Es sei das rechtwinklige Trapez $ABCD$ mit $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = 8$ cm und $\sphericalangle ADC = 30^\circ$. Berechne die Länge der Strecke CD .
- Bestimmt die Länge der Höhe eines orthodiagonalen (mit senkrecht aufeinander stehenden Diagonalen) gleichschenkligen Trapezes, wenn man weiß, dass die Grundlinien 15 cm und 13 cm betragen.
- Wenn die Länge der Strecke, die von den Mittelpunkten der Diagonalen eines Trapezes bestimmt wird, gleich 6 cm ist und die Länge der großen Grundlinie des Trapezes gleich 28 cm ist, berechne die Länge der kleinen Grundlinie des Trapezes.
- Bestimmt die Winkelmaße eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$, $AB \parallel CD$, wobei $\sphericalangle A = 4 \cdot \sphericalangle D$.
- Auf der Seite AB des Quadrats $ABCD$, $AB = 18$ cm, liegen die Punkte S und T so, dass $AS = ST = TB$. Beweist, dass das Trapez $DCTS$ gleichschenklig ist und berechne die Länge seiner Mittellinie.
- Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, ist $AB = 6$ cm, $\sphericalangle C = 60^\circ$ und $CD = 10$ cm. Berechne den Umfang des Trapezes $ABCD$.
- Sei das gleichschenklige Trapez $ABCD$ mit $BC = 2\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle C = 45^\circ$ und $BE \perp DC$, $E \in DC$.
 - Berechnet die Maße der anderen Winkel des Trapezes $ABCD$.
 - Berechnet die Längen der Strecken EC , DE und DC .
- Für das Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, gilt $AD = DC = CB$, $\sphericalangle B = 60^\circ$. Die Länge der Mittellinie des Trapezes beträgt 10 cm. Berechne den Umfang des Trapezes $ABCD$.



Test

- Sei das gleichschenklige Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 45^\circ$. Beweist, dass die Geraden AD und BC senkrecht zueinander sind. (3 Pkte.)
- In einem Trapez ist die Länge der Mittellinie gleich 20 cm und die Länge der großen Grundlinie des Trapezes ist gleich 28 cm. Bestimmt die Länge der kleinen Grundlinie des Trapezes. (3 Pkte.)
- Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB < CD$ konstruieren wir $BM \parallel AD$, $M \in DC$. Wenn $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB$, dann bestimmt das Maß des Winkels $\sphericalangle BAD$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.

8. Lektion: Umfänge und Flächeninhalte

Schlüsselwörter

Flächeninhalt

Höhe

Grundlinie

äquivalent

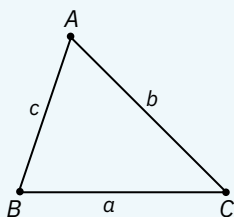
Umfang

Mittellinie

Umfänge

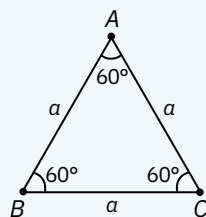
In der 5. Klasse haben wir gelernt, dass der Umfang einer geometrischen Figur, die von Strecken begrenzt wird, gleich der Summe der Längen dieser Strecken ist. Wir verwenden normalerweise den Buchstaben U , um den Umfang zu schreiben.

Umfang eines beliebigen Dreiecks



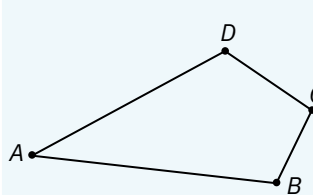
$$U_{ABC} = BC + CA + AB = a + b + c$$

Umfang eines gleichseitigen Dreiecks



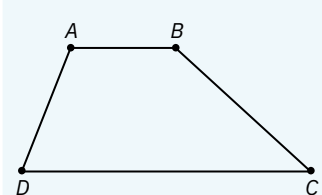
$$U_{ABC} = BC + CA + AB = 3a$$

Umfang eines beliebigen Vierecks



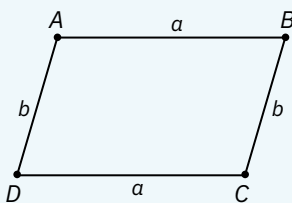
$$U_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$

Umfang eines Trapezes



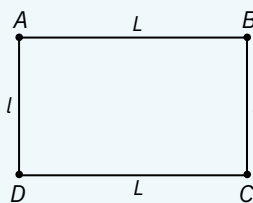
$$U_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$

Umfang eines Parallelogramms



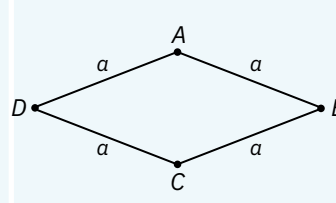
$$U_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (a + b)$$

Umfang eines Rechtecks



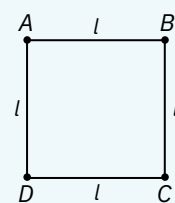
$$U_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2(L + l)$$

Umfang eines Rhombus



$$U_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot a$$

Umfang eines Quadrats



$$U_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot l$$

Flächeninhalt des Rechtecks. Flächeninhalt des Quadrats (Wiederholung)

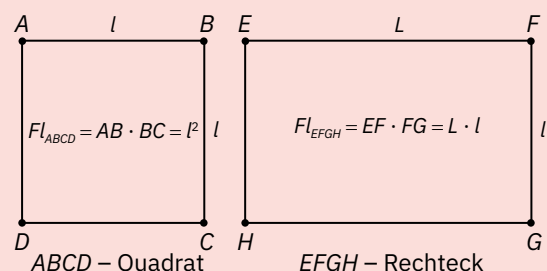
Seit der 5. Klasse wissen wir, dass der Flächeninhalt ein Maß für eine Fläche ist, die von einer geometrischen Figur begrenzt wird, und dass er angibt, wie viele Male eine bestimmte Maßeinheit in dieser Fläche enthalten ist. Der Flächeninhalt wird gewöhnlich mit Fl bezeichnet.

Die wichtigste Maßeinheit für die Fläche ist der Quadratmeter, abgekürzt m^2 . Ein Quadratmeter ist die Fläche, die von den Seiten eines Quadrats mit einer Seitenlänge von einem Meter begrenzt wird.

Vielfache des Quadratmeters sind dam^2 , hm^2 , km^2 , und Untereinheiten des Quadratmeters sind dm^2 , cm^2 , mm^2 .

Merke dir!

1. Der Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge l ist $Fl = l^2$.
2. Die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen L (für Länge) und l (für Breite) ist $Fl = L \cdot l$.



Flächeninhalt des Dreiecks

Problemstellung

Das Dreieck ABC in Abbildung 1, mit $BC = 4$ cm, hat die Höhe AD , $D \in BC$, die Länge $AD = 3$ cm. Wir bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mithilfe der Formel für den Flächeninhalt des Rechtecks.

Wir konstruieren die Rechtecke $ADBQ$ und $ADCP$ wie in Abbildung 2. Es wird festgestellt, dass $\triangle ABD \cong \triangle BAQ$ und $\triangle ADC \cong \triangle CPA$ (KK-Fall).

Da zwei kongruente Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben (weil sich ihre Flächen durch Überlappung decken), folgt daraus, dass $Fl_{ABC} = Fl_{ABD} + Fl_{ACD} = \frac{Fl_{ADBQ}}{2} + \frac{Fl_{ADCP}}{2} = \frac{Fl_{BCPQ}}{2} = \frac{BC \cdot BQ}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

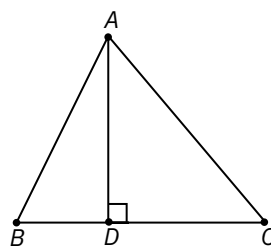


Abbildung 1

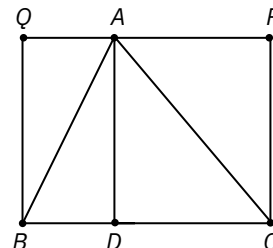


Abbildung 2

Merke dir!

Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produkts aus der Länge einer Seite und der Länge der entsprechenden Höhe.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird nach der Formel $Fl = \frac{b \cdot h}{2}$ berechnet, wobei h die Länge der Höhe einer Seite des Dreiecks und b die Länge dieser Seite ist (auch *Grundlinie* genannt).

Flächeninhalt eines spitzwinkligen Dreiecks

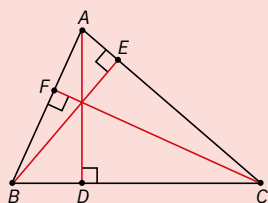


Abbildung 3

$$Fl_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{AB \cdot CF}{2}$$

Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks

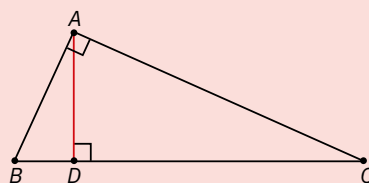


Abbildung 4

$$Fl_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

Flächeninhalt eines stumpfwinkligen Dreiecks

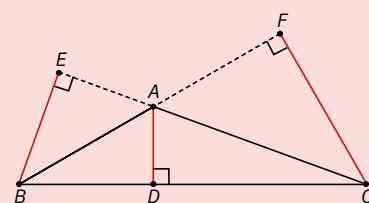


Abbildung 5

$$Fl_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{AB \cdot CF}{2}$$

Bemerkungen

1. Zwei Dreiecke (oder ganz allgemein zwei geometrische Figuren), die denselben Flächeninhalt haben, werden als *äquivalent* bezeichnet.

2. a, b, c seien die Längen der Seiten des Dreiecks ABC ($BC = a, AC = b, AB = c$) und h_a, h_b, h_c die Längen der entsprechenden Höhen ($AD = h_a, BE = h_b, CF = h_c$), es folgt, dass $Fl_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$.

3. Die Beziehung $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2 \cdot Fl_{ABC}$ zeigt, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- In jedem Dreieck ist das Produkt aus der Länge einer Seite und der Länge der entsprechenden Höhe konstant.
- Die Längen der Seiten eines Dreiecks sind umgekehrt proportional zu den Längen der entsprechenden Höhen.

4. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ ist die Höhe, die der Kathete AB entspricht, die Kathete AC und umgekehrt, weil $AB \perp AC$ (Abbildung 4). Wenn D der Fußpunkt der Höhe aus A ist, folgt aus der Beziehung

$$Fl_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2}, \text{ dass } BC \cdot AD = AB \cdot AC, \text{ d. h., } AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der der Hypotenuse entsprechenden Höhen das Verhältnis des Produkts aus den Längen der Katheten und der Länge der Hypotenuse.

5. Die Seitenhalbierende teilt ein Dreieck in zwei Dreiecke mit gleichen Flächeninhalten (äquivalente Dreiecke).

Wenn M der Mittelpunkt der Seite BC des Dreiecks ABC ist und $AD \perp BC$, dann ist AD die Höhe in den Dreiecken ABC , ABM bzw. AMC (siehe Abbildung 6). Daraus folgt, dass:

$$Fl_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot Fl_{ABC} \text{ und } Fl_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot Fl_{ABC},$$

$$\text{also } Fl_{ABM} = Fl_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot Fl_{ABC}.$$

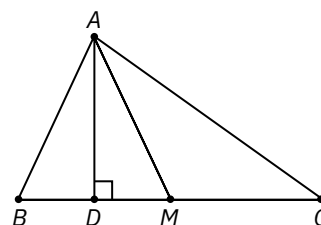


Abbildung 6

6. Den Flächeninhalt eines konvexen Vierecks $ABCD$ berechnet man, indem man die von den Seiten des Vierecks begrenzte Fläche in Dreiecksflächen zerlegt (Abbildung 7): $Fl_{ABCD} = Fl_{ABD} + Fl_{CBD} = Fl_{ABC} + Fl_{ADC} = Fl_{OAB} + Fl_{OBC} + Fl_{OCD} + Fl_{OAD}$.

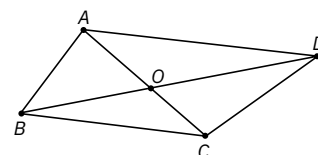


Abbildung 7

Flächeninhalt des Parallelogramms

Es sei das Parallelogramm $ABCD$, in dem wir $AE \perp CD$, $E \in CD$, und die Diagonale AC konstruieren (Abbildung 8). Die Dreiecke ADC und CBA sind kongruent, haben also gleiche Flächen.

$$\text{Daraus folgt: } Fl_{ABCD} = Fl_{ACD} + Fl_{ACB} = 2 \cdot Fl_{ACD} = 2 \cdot \frac{AE \cdot CD}{2} = AE \cdot CD.$$

In ähnlicher Weise können wir durch die Konstruktion von $AF \perp BC$, $F \in BC$, zeigen, dass $Fl_{ABCD} = AF \cdot BC$ ist.

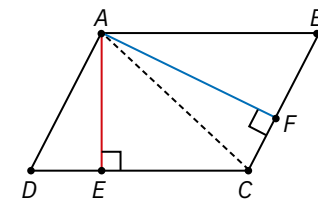


Abbildung 8

Merke dir!

Definition. Eine Strecke, die senkrecht zu den gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms verläuft und deren ein Ende auf einer Seite und das andere Ende auf der gegenüberliegenden Seite liegt, wird als *Höhe des Parallelogramms* bezeichnet.

Die Länge dieser Strecke ist gleich dem Abstand zwischen den beiden gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms.

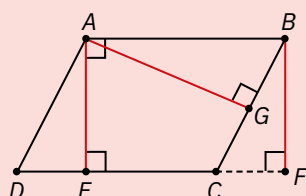


Abbildung 9

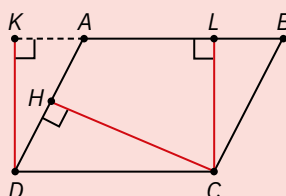


Abbildung 10

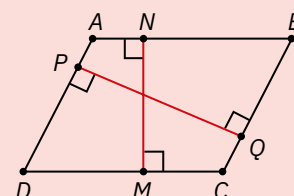


Abbildung 11

In den Abbildungen 9, 10 und 11 sind die Strecken AE , BF , CL , DK und MN Höhen, die den Seiten AB und CD entsprechen, und die Strecken AG , CH und PQ sind Höhen, die den Seiten AD und BC entsprechen.

Es gilt: $AE = BF = d(A, CD) = d(B, CD) = d(C, AB) = d(D, AB)$ und $CH = d(C, AD) = d(A, BC)$.

In den Abbildungen 9, 10 und 11 sind die Strecken AE , BF , CL , DK und MN Höhen, die den Seiten AB und CD entsprechen, und die Strecken AG , CH und PQ sind Höhen, die den Seiten AD und BC entsprechen. $\angle AED = \angle BFC = 90^\circ$, $AD \equiv BC$ und $\angle ADE \equiv \angle BCF$, dass $\triangle AED \equiv \triangle BFC$ (HW-Fall), sodass die Flächeninhalte der Dreiecke AED und BFC gleich sind.

Daraus folgt, dass: $Fl_{ABCD} = Fl_{ADE} + Fl_{AECB} = Fl_{BCF} + Fl_{AECB} = Fl_{AEFB}$.

Da das Viereck $AECF$ ein Rechteck ist, ergibt sich daraus, dass $Fl_{AEFB} = AE \cdot AB = AE \cdot CD$ ist und somit die Gleichheit $Fl_{ABCD} = AE \cdot CD$.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt der Länge einer Seite und der Länge der entsprechenden Höhe.

Wenn h die Länge der Höhe ist, die einer Seite (auch *Grundlinie* genannt) der Länge b entspricht, dann ist $Fl = b \cdot h$.

Beispiel

In Abbildung 12 ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, und $AE \perp CD$, $E \in CD$, und $AF \perp BC$, $F \in BC$.

Da wir wissen, dass $AE = 8$ cm, $CD = 12$ cm und $BC = 6$ cm ist, berechnen wir den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ und den Abstand AF von A zur Gerade BC .

Wir haben $Fl_{ABCD} = b \cdot h = DC \cdot AE = 12 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 96 \text{ cm}^2$.

Da $Fl_{ABCD} = BC \cdot AF = 6 \text{ cm} \cdot d(A, BC)$, folgt, dass $d(A, BC) = 16$ cm.

Bemerkung

Wenn O der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms $ABCD$ ist, dann sind BO und DO Seitenhalbierenden in den Dreiecken BAC bzw. DAC (Abbildung 13).

Also, $Fl_{OAB} = Fl_{OBC}$ und $Fl_{OAD} = Fl_{OCD}$. Da AO Seitenhalbierende des Dreiecks

ABD ist, folgt, dass, $Fl_{OAB} = Fl_{OAD}$, also $Fl_{OAB} = Fl_{OBC} = Fl_{OAD} = Fl_{OCD} = \frac{1}{4} \cdot Fl_{ABCD}$.

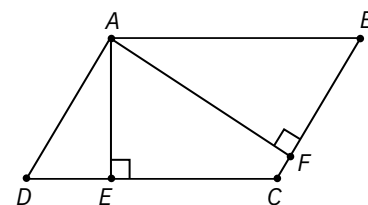


Abbildung 12

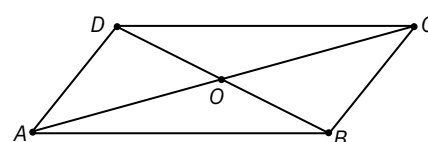


Abbildung 13



Flächeninhalt des Rhombus

Es seien $ABCD$ ein Rhombus mit $AC \cap BD = \{O\}$, und AE und AF die entsprechenden Höhen der Seiten BC und CD (Abbildung 14).

- Da der Rhombus ein besonderes Parallelogramm ist, kann man seinen Flächeninhalt mit der Formel $Fl = b \cdot h$ berechnen, wobei b die Länge der Grundlinie und h die Länge der entsprechenden Höhe der Grundlinie ist. Somit ist $Fl_{ABCD} = BC \cdot AE = CD \cdot AF$. Da $BC = CD$ ist, folgt, dass $AE = AF$, d. h., $d(AD, BC) = d(AB, CD)$. Mit anderen Worten, *die Längen der Höhen, die von demselben Scheitelpunkt eines Rhombus ausgehen, sind gleich* und stellen den Abstand zwischen den Stützgeraden der gegenüberliegenden Seiten dar.

- Wenn $BD \perp AC$ ist und BO und DO Höhen in den Dreiecken BAC bzw. DAC sind, dann:

$$Fl_{ABCD} = Fl_{BAC} + Fl_{DAC} = \frac{AC \cdot BO}{2} + \frac{AC \cdot DO}{2} = \frac{AC \cdot (BO + DO)}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

wobei d_1 und d_2 die Längen der Diagonalen des Rhombus sind.

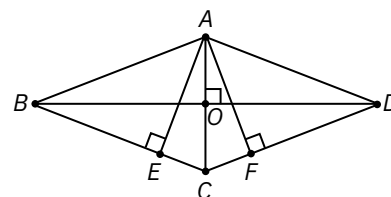


Abbildung 14

Beispiel

In Abbildung 15 hat der Rhombus $ABCD$ einen Umfang von 20 cm $AC = 6$ cm und $BD = 8$ cm.

Wir berechnen den Abstand AK vom Punkt A zur Seite CD , wobei $K \in CD$.

Da der Umfang des Rhombus $U = 4 \cdot CD$ ist, folgt, dass $CD = 5$ cm.

Berechnet man den Flächeninhalt des Rhombus auf zwei Arten, so erhält

man $Fl_{ABCD} = AK \cdot CD$ bzw. $Fl_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 24 \text{ cm}^2$, also $d(A, CD) = AK = 4,8$ cm.

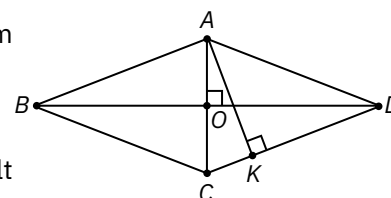


Abbildung 15

Flächeninhalt des Trapezes

Merke dir!

Es sei das Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB < CD$, in dem wir $AE \perp CD$ und $BF \perp CD$ konstruieren, wobei $E, F \in CD$ (Abbildung 16). Das Viereck $AEFB$ ist ein Rechteck, also $AB = EF$ und $AE = BF$. Wir leiten daraus ab, dass:

$$\begin{aligned} Fl_{ABCD} &= Fl_{AED} + Fl_{AEFB} + Fl_{BFC} = \frac{AE \cdot ED}{2} + AE \cdot EF + \frac{BF \cdot FC}{2} = \\ &= \frac{AE \cdot (DE + 2EF + FC)}{2} = \frac{AE \cdot (EF + DC)}{2} = \frac{AE \cdot (AB + CD)}{2}. \end{aligned}$$

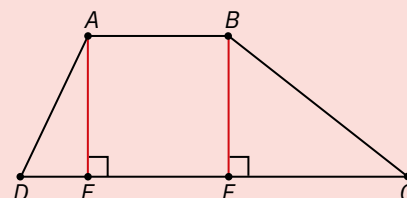


Abbildung 16

Definition. Eine Strecke senkrecht zu den Grundlinien eines Trapezes, die ein Ende auf der kleinen Grundlinie und das andere auf der großen Grundlinie hat, wird als *Höhe des Trapezes* bezeichnet.

Die Länge einer Höhe eines Trapezes ist gleich dem Abstand zwischen den beiden Grundlinien des Trapezes.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der halben Summe der Längen der Grundlinien und der Länge der Höhe.

Wenn man mit b die Länge der kleinen Grundlinie, mit B die Länge der großen Grundlinie und mit h die Länge der Höhe bezeichnet, ergibt sich der Flächeninhalt des Trapezes wie folgt: $Fl = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$.

Beispiel

In Abbildung 17 ist für das gleichschenklige Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, bekannt, dass $\sphericalangle A = 45^\circ$ ist, $AB = 8$ cm und $CD = 2$ cm. Wir werden den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ berechnen.

Wir konstruieren $DP \perp AB$, $P \in AB$. Wir erhalten $AP = \frac{AB - CD}{2} = 3$ cm.

Da das Dreieck APD ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ist, folgt

daraus, dass $DP = AP = 3$ cm. Also, $Fl_{ABCD} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{AB+DC}{2} \cdot DP = 15 \text{ cm}^2$.

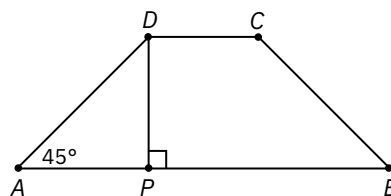


Abbildung 17

Abschätzen des Umfangs und des Flächeninhalts einer geometrischen Figur durch Zerlegung in bekannte Figuren

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Eine geschlossene ebene geometrische Figur, die durch n Strecken, $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, begrenzt wird, sodass zwei beliebige Strecken höchstens einen Punkt gemeinsam haben, heißt ein n -seitiges Vieleck. Wir bezeichnen das Vieleck mit $A_1A_2\dots A_n$. Die Punkte $A_1, A_2, \dots, A_n$ heißen die Scheitelpunkte des Vielecks. Ein Dreieck ist zum Beispiel ein Vieleck mit drei Seiten und ein Viereck ist ein Vieleck mit vier Seiten. Ein Vieleck mit fünf Seiten wird als *Fünfeck* bezeichnet, und ein Vieleck mit sechs Seiten als *Sechseck*.

Der Umfang eines Vielecks $A_1A_2\dots A_n$ ist gleich der Summe der Längen seiner Seiten:

$$U_{A_1A_2\dots A_n} = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1.$$

Die Fläche, die von den Seiten eines Vielecks begrenzt wird, nennt man *Vielecksfläche*. Der Flächeninhalt einer Vielecksfläche (oder – zur Vereinfachung der Sprache – der *Flächeninhalt des Vielecks*) kann durch Zerlegung dieser Fläche in Dreiecksflächen berechnet werden.

In Abbildung 18 ist der Flächeninhalt des *siebenseitigen Vielecks* $ABCDEFG$ gleich $Fl_{ABC} + Fl_{ACD} + Fl_{ADE} + Fl_{AEF} + Fl_{AFG}$.

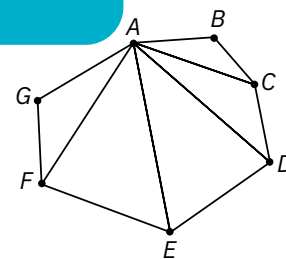


Abbildung 18

Gruppenarbeit

Die Schüler einer Klasse werden in vier Gruppen aufgeteilt. Sie benutzen die Geometriegeräte, um die Aufgaben zu lösen. Jede Gruppe erhält ein Blatt Papier, aus dem sie geometrische Figuren mit einem bestimmten Flächeninhalt wie folgt ausschneiden muss:

- Die erste Gruppe muss ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 18 cm^2 ausschneiden.
- Die zweite Gruppe muss ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 18 cm^2 ausschneiden.
- Die dritte Gruppe – einen Rhombus mit einem Flächeninhalt von 18 cm^2 .
- Die vierte Gruppe – ein Trapez mit einem Flächeninhalt von 18 cm^2 .

Die Schüler stellen ihre geometrischen Figuren vor und begründen, dass jede einen Flächeninhalt von 18 cm^2 hat.

Portfolio

Konstruiert auf einem Blatt Papier ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Verlängert die große Grundlinie über B hinaus um die Strecke $BE \equiv CD$. Verlängert die kleine Grundlinie über C hinaus um die Strecke $CF \equiv AB$. Leitet aus der entstandenen Figur den Flächeninhalt des Trapezes ab, indem ihr die Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms anwendet.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Es sei ein Punkt M auf der Seite BC des Dreiecks ABC . Beweist, dass $\frac{Fl_{ABM}}{Fl_{ACM}} = \frac{BM}{CM}$.

Lösung:

Wir konstruieren die Höhe AD , wobei D auf der Seite BC liegt. Wir erhalten $\frac{Fl_{ABM}}{Fl_{ACM}} = \frac{\frac{AD \cdot BM}{2}}{\frac{AD \cdot CM}{2}} = \frac{AD \cdot BM}{AD \cdot CM} = \frac{BM}{CM}$.

2. Im Dreieck ABC seien M , N und P die Mittelpunkte der Seiten BC , CA bzw. AB und G der Schwerpunkt des Dreiecks. Zeigt, dass:

- a. $Fl_{BGM} = Fl_{CGM}$; b. $Fl_{ABC} = 3 \cdot Fl_{GBC}$; c. $Fl_{ABC} = 6 \cdot Fl_{BGM}$.

Lösung:

- a. Wir verwenden das Ergebnis aus der Lösung von Aufgabe 1. Wir haben $\frac{Fl_{BGM}}{Fl_{CGM}} = \frac{BM}{CM} = 1$, also $Fl_{BGM} = Fl_{CGM}$.

Daraus folgt, dass die Seitenhalbierende GM das Dreieck GBC in zwei äquivalente

Dreiecke teilt, d. h. $Fl_{BGM} = Fl_{CGM} = \frac{1}{2} Fl_{GBC}$.

- b. Im Dreieck BAM gehört der Punkt G zur Seite AM , also $\frac{Fl_{BAG}}{Fl_{BMG}} = \frac{AG}{MG} = 2$. Analog, aus Dreieck CAM folgt,

dass $\frac{Fl_{CAG}}{Fl_{CMG}} = \frac{AG}{MG} = 2$. Also, $Fl_{BAG} = 2 \cdot Fl_{BMG} = Fl_{BCG}$ und $Fl_{CAG} = 2 \cdot Fl_{CMG} = Fl_{BCG}$. Da $Fl_{ABC} = Fl_{GAB} + Fl_{GBC} + Fl_{GAC}$ und

$Fl_{GAB} = Fl_{GBC} = Fl_{GAC}$, folgt daraus, dass $Fl_{ABC} = 3 \cdot Fl_{GBC}$.

- c. Da $Fl_{ABC} = 3 \cdot Fl_{GBC}$ und $Fl_{BGM} = \frac{1}{2} Fl_{GBC}$, folgt, dass $Fl_{ABC} = 6 \cdot Fl_{BGM}$.

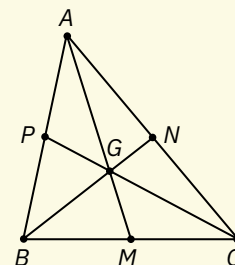


Abbildung 19



3. Im Dreieck ABC , das in A rechtwinklig ist, sind $AB = 6$ cm und $AC = 8$ cm. Bestimmt:

- den Flächeninhalt des Dreiecks;
- den Umfang des Dreiecks;
- den Abstand vom Punkt A zur Geraden BC .

Lösung:

a. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig in A , also $Fl_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$ (Abbildung 20).

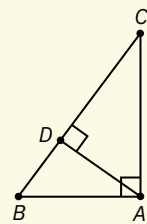


Abbildung 20

b. Unter Anwendung des Satzes des Pythagoras (in der 6. Klasse gelernt) folgt, dass $BC^2 = AB^2 + AC^2$, woraus sich $BC = 10$ cm ergibt. Also ist $U_{ABC} = AB + AC + BC = 6 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$.

c. Es sei $AD \perp BC$, $D \in BC$. Dann ist $d(A, BC) = AD$ und AD sei die Höhe im rechtwinkligen Dreieck ABC . Wir erhalten $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 8}{10} \text{ cm} = 4,8 \text{ cm}$, also $d(A, BC) = AD = 4,8 \text{ cm}$.

4. $ABCD$ sei ein Parallelogramm mit $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AD = 6$ cm und $\sphericalangle A = 30^\circ$.

- Zeigt, dass der Umfang des Parallelogramms kleiner als 33 cm ist.
- Bestimmt den Flächeninhalt des Parallelogramms und den Abstand zwischen dem Punkt D und der Gerade BC .

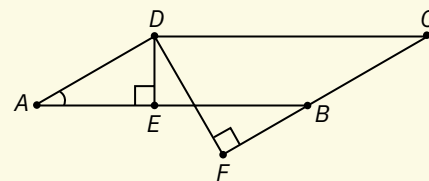


Abbildung 21

Lösung:

a. Wir haben $U_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (6\sqrt{3} + 6) \text{ cm} = (12 + \sqrt{432}) \text{ cm}$. Da $\sqrt{432} < \sqrt{441} = 21$, folgt daraus, dass $12 + \sqrt{432} < 12 + 21 = 33$, also $U_{ABCD} < 33 \text{ cm}$.

b. Wir konstruieren $DE \perp AB$ und $DF \perp BC$, mit $E \in AB$, $F \in BC$. Dann ist $d(D, BC) = DF$ und $Fl_{ABCD} = AB \cdot DE = DF \cdot BC$.

Da das rechtwinklige Dreieck AED einen Winkel von 30° hat, ist die Länge der Kathete DE gegenüber diesem Winkel die Hälfte der Länge der Hypotenuse. Also $DE = \frac{1}{2} \cdot AD = 3 \text{ cm}$, also $Fl_{ABCD} = AB \cdot DE = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Aus

der Beziehung (1) ergibt sich $BC \cdot DF = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ und da $BC = AD = 6 \text{ cm}$, folgt, dass $d(D, BC) = DF = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.

Alternativ kann man auch feststellen, dass das Dreieck CFD , das in F rechtwinklig ist, $\sphericalangle C = 30^\circ$ hat, also $DF = \frac{1}{2} \cdot CD = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.

5. Ein Rhombus $ABCD$ mit $AC \cap BD = \{O\}$, hat einen Umfang von 48 cm, und der Abstand zwischen dem Punkt B und der Gerade CD ist gleich $6\sqrt{3}$ cm.

E sei der Symmetriepunkt des Punktes O in Bezug auf die Gerade AD . Bestimmt:

- den Flächeninhalt des Rhombus $ABCD$;
- den Flächeninhalt des Vierecks $ABCE$.

Lösung:

a. $BF \perp CD$, $F \in CD$; dann ist $d(B, CD) = BF = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. Da $ABCD$ ein Rhombus ist, folgt, dass $U_{ABCD} = 4 \cdot CD$, wobei $CD = 12 \text{ cm}$, also $Fl_{ABCD} = CD \cdot BF = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

b. Aus $Fl_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$ folgt, dass $AC \cdot BD = 2 \cdot Fl_{ABCD} = 144\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Da $BC = 12 \text{ cm}$,

folgt aus dem Satz des Pythagoras im Dreieck BCF , dass $FC = 6 \text{ cm}$, der Winkel BCF also 60° beträgt, das Dreieck BCD also gleichseitig ist. Daher ist $\sphericalangle BDC = 60^\circ$. Aber $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle BDA$ (die Diagonale DB des Rhombus $ABCD$ ist die Winkelhalbierende des Winkels ADC), also $\sphericalangle ADC = 2 \cdot \sphericalangle BDC = 120^\circ$ (Abbildung 22).

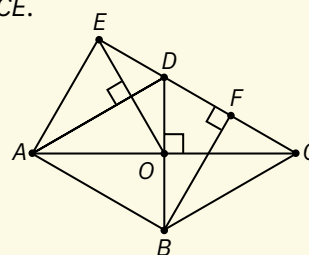


Abbildung 22

Da der Punkt E symmetrisch zu O in Bezug auf die Gerade AD ist, folgt, dass die Gerade AD die Mittelsenkrechte der Strecke EO ist, also $d(D, E) = d(D, O)$, d. h., $DE = DO = \frac{1}{2} \cdot BD = 6 \text{ cm}$. Das Dreieck DEO ist gleich-

schenkling. Wir erhalten $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BDA = 60^\circ$, also $\sphericalangle EDC = \sphericalangle EDA + \sphericalangle ADC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$. Daraus folgt, dass die Punkte E, D, C in dieser Reihenfolge kollinear sind, also $CE = CD + DE = 12 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$.

Wir stellen fest, dass $AB \parallel CD$, also $AB \parallel CE$. Da $AD \parallel BC$ und die Geraden AD und AE unterschiedlich sind, folgt aus dem Parallelenaxiom, dass $AE \nparallel BC$ ist. $ABCE$ ist also ein Trapez, also $Fl_{ABCE} = \frac{(CE + AB) \cdot BF}{2} = 90\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Vorgeschlagene Aufgaben

1. a. Bestimmt den Flächeninhalt eines Rechtecks von 8 cm Länge und 7 cm Breite.
 b. Bestimmt den Flächeninhalt eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit einer Kathete von 6 cm.
 c. Bestimmt den Flächeninhalt eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse von 12 cm.
 d. Bestimmt den Flächeninhalt eines Quadrats mit einer Seitenlänge von 4 cm.
 e. Bestimmt den Flächeninhalt eines Quadrats mit einer Diagonale von 8 cm.
 f. Bestimmt den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit einer Seitenlänge von 9 cm und der entsprechenden Seitenhöhe von 4 cm.
 g. Bestimmt den Flächeninhalt eines Rhombus mit den Diagonalen von 10 cm und 16 cm.
 h. Bestimmt den Flächeninhalt eines Trapezes mit den Grundlinien von 7 cm und 5 cm und der Höhe von 3 cm.
 i. Bestimmt den Flächeninhalt eines Trapezes mit der Mittellinie von 14 cm und der Höhe von 8 cm.
2. Im Dreieck ABC liegt der Punkt M auf der Seite BC so, dass $BM = 2$ cm und $MC = 6$ cm. Zeigt, dass $Fl_{AMC} = 3 \cdot Fl_{ABM}$ ist.
3. Im Rechteck $ABCD$ seien $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm und die Punkte M und P die Mittelpunkte der Seiten AB und AD . Berechne:
 - a. den Flächeninhalt und den Umfang des Rechtecks $ABCD$;
 - b. den Flächeninhalt des Dreiecks ABC ;
 - c. den Flächeninhalt des Dreiecks AMD ;
 - d. den Flächeninhalt des Dreiecks DMC ;
 - e. den Flächeninhalt des Dreiecks DMP ;
 - f. den Flächeninhalt des Trapezes $DCBM$.
4. Der Rhombus $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von 36 cm^2 . Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und den Flächeninhalt des Dreiecks ABD .
5. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck hat einen Flächeninhalt von 25 cm^2 . Bestimme die Länge der Hypotenuse des Dreiecks.
6. Berechne den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$, wenn $AB \parallel CD$, $\sphericalangle C = 135^\circ$, $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm ist.
7. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$, wenn $AC = 15$ cm und der Abstand vom Punkt B zur Gerade AC 10 cm beträgt.
8. Im Parallelogramm $ABCD$ ist $AB = 7$ cm, $AD = 12$ cm und $\sphericalangle A = 30^\circ$. Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.
9. Es sei das Viereck $ABCD$ mit senkrechten Diagonalen (noch *orthodiagonales Viereck* genannt). Wenn $AC = 10$ cm und $BD = 20$ cm, berechne den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.
10. Berechne den Flächeninhalt eines orthodiagonalen gleichschenkligen Trapezes mit einer Mittellinie von 22 cm.
11. Ein Rhombus ist äquivalent zu einem Rechteck mit einem Flächeninhalt von 135 cm^2 . Bestimme die Länge einer Diagonale des Rhombus, wenn bekannt ist, dass die Länge der anderen Diagonale 15 cm beträgt.
12. Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms $ABCD$, wenn bekannt ist, dass $AC \cap BD = \{O\}$ und dass der Flächeninhalt des Dreiecks AOB 11 cm^2 ist.
13. Die Abbildung 23 besteht aus 5 Quadraten mit einer Seitenlänge von 2 Zentimetern. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks $A_1A_6B_6B_1$, den Flächeninhalt des Dreiecks $A_1A_4B_6$ und den Flächeninhalt des Trapezes $A_2B_4B_5A_6$.

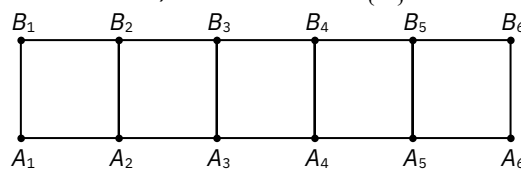


Abbildung 23

Selbstbewertung

1. Abbildung 24 stellt 4 Quadrate mit einer Seitenlänge von 2 cm dar. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC . (3 Pkte.)
2. Es sei das gleichschenklige Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $CD = 12$ cm und $\sphericalangle BCD = 45^\circ$. Zeigt, dass:
 - a. der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ 27 cm^2 beträgt;
 - b. der Flächeninhalt des Dreiecks ABC 9 cm^2 beträgt.
3. Der Rhombus $ABCD$ hat $AB = 10$ cm und $AC = 16$ cm.
 - a. Berechne den Umfang von $ABCD$.
 - b. Bestimme den Flächeninhalt des Rhombus $ABCD$.
 - c. Berechne den Abstand vom Punkt B zur Gerade CD . (3 Pkte.)

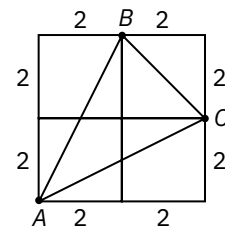


Abbildung 24

Bemerkung: Bei Aufgabe 2 werden für jeden richtig gelösten Unterpunkt 1,5 Punkte vergeben. Bei Aufgabe 3 wird für jeden richtig beantworteten Unterpunkt 1 Punkt vergeben. 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.





Wiederholung und Bewertung

Konvexes Viereck. Die Summe der Winkelmaße eines konvexen Vierecks • Parallelogramm; Eigenschaften • Mittellinie in einem Dreieck • Rechteck; Eigenschaften • Rhombus; Eigenschaften • Quadrat; Eigenschaften • Trapez; Eigenschaften • Umfänge und Flächeninhalte

Für die Aufgaben 1–22 trage den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, in dein Heft ein. Für die Aufgaben 23–32 schreibe die vollständigen Lösungen auf.

- Eine Diagonale des konvexen Vierecks $ABCD$ ist:
a. AD ; b. BD .
- Wenn G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist, das in A rechtwinklig ist und $AG = 4$ cm ist, dann ist BC :
a. 6 cm; b. 8 cm; c. 10 cm; d. 12 cm.
- Wenn AM Seitenhalbierende des Dreiecks ABC ist, G der Schwerpunkt des Dreiecks und $AG = 12$ cm, ist, dann ist AM :
a. 12 cm; b. 6 cm; c. 18 cm; d. 24 cm.
- Der Flächeninhalt eines Rhombus mit den Diagonalen von 12 cm und 6 cm ist gleich:
a. 72 cm^2 ; b. 36 cm^2 ; c. 18 cm^2 ; d. 36 cm^2 .
- Wenn $ABCD$ ein Rechteck ist, $AC \cap BD = \{O\}$ und $AO = 3$ cm, dann ist BD gleich:
a. 6 cm; b. 3 cm; c. 9 cm; d. 12 cm.
- Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist und $\sphericalangle A = 100^\circ$, dann ist $\sphericalangle D$ gleich:
a. 50° ; b. 100° ; c. 150° ; d. 80° .
- Der Umfang eines Dreiecks beträgt 30 cm. Der Umfang des Dreiecks, der von seinen Mittellinien bestimmt wird, ist gleich:
a. 15 cm; b. 10 cm.
- Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, dann ist das Winkelmaß ACD gleich:
a. 60° ; b. 45° .
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit einer Grundlinie von 12 cm und einer Höhe von 10 cm ist gleich:
a. 22 cm^2 ; b. 60 cm^2 ; c. 120 cm^2 ; d. 30 cm^2 .
- Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Länge von 8 cm und der Breite von 6 cm ist gleich:
a. 48 cm^2 ; b. 14 cm^2 ; c. 28 cm^2 ; d. 12 cm^2 .
- Der Umfang eines Rhombus mit einer Seite von 16 cm ist gleich:
a. 256 cm; b. 128 cm; c. 32 cm; d. 64 cm.
- Die Mittellinie eines Trapezes beträgt 10 cm. Wenn die große Grundlinie 12 cm ist, dann ist die kleine Grundlinie:
a. 2 cm; b. 1 cm; c. 8 cm; d. 22 cm.
- Der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks ist gleich dem Umfang eines Quadrats. Das Verhältnis der Seitenlänge des Quadrats zur Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ist gleich:
a. $\frac{4}{3}$; b. $\frac{3}{4}$; c. $\frac{9}{16}$; d. $\frac{16}{9}$.
- Ein Rhombus und ein Quadrat sind äquivalent. Der Flächeninhalt des Quadrats ist gleich 144 cm^2 , und die Länge einer Diagonale des Rhombus ist gleich 9 cm. Die Länge der anderen Diagonale des Rhombus ist gleich:
a. 18 cm; b. 12 cm; c. 32 cm; d. 16 cm.
- Die Mittellinie eines Trapezes ist $\frac{2}{3}$ der Länge der großen Grundlinie des Trapezes. Das Verhältnis der großen Grundlinie zur kleinen Grundlinie ist gleich:
a. 6; b. $\frac{3}{2}$; c. 3; d. $\frac{1}{3}$.
- Wenn die Diagonalen eines Parallelogramms $ABCD$ senkrecht zueinander stehen und $\sphericalangle BAD = 20^\circ$ ist, dann ist das Maß des Winkels DBC gleich:
a. 80° ; b. 160° ; c. 10° ; b. 40° .
- Die Anzahl der Symmetrieachsen eines Quadrats ist:
a. 2; b. 4.
- Die Anzahl der Symmetrieachsen eines gleichschenkligen Trapezes ist:
a. 1; b. 0.
- Die entsprechende Höhe der Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks beträgt 10 cm. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich:
a. 100 cm^2 ; b. 200 cm^2 .
- Die Mittellinie eines Trapezes ist 12 cm und die Höhe des Trapezes ist 7 cm. Der Flächeninhalt des Trapezes ist gleich:
a. 42 cm^2 ; b. 84 cm^2 .
- Im Rechteck $ABCD$ ist $\sphericalangle ADB = 60^\circ$. Das Maß des Winkels BCA ist gleich:
a. 30° ; b. 60° .
- In dem Rhombus $ABCD$ ist $\sphericalangle BCD = 30^\circ$ und $AB = 14$ cm. Der Abstand vom Punkt D zur Geraden BC ist gleich:
a. 28 cm; b. 7 cm.



23. Welche der folgenden Aussagen ist richtig und welche ist falsch?
- Die Seite eines Quadrats mit der Fläche von 49 cm^2 ist 7 cm .
 - Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe der Grundlinien.
 - Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist auch der Mittelpunkt einer Seitenhalbierenden des Dreiecks.
 - Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.
24. Gebt jedem Bruch in Spalte A den entsprechenden Namen in Spalte B.

A	B
$Fl = L \cdot l$	Flächeninhalt des Rhombus
$Fl = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	Flächeninhalt des Rechtecks Flächeninhalt des Parallelogramms
$Fl = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$	Flächeninhalt des Trapezes

25. Bestimmt die natürlichen Zahlen a , b , c und d in der folgenden Tabelle:

Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$	a, b, c, d
16	$AB = a$
64	$Fl_{ABD} = b$
100	$Fl_{BOC} = c$
25	$AC \cdot BD = d$

26. Bestimmt die Zahlen a , b , c und d , für die die folgenden Aussagen wahr sind.

Wenn MN die Mittellinie in ABC ist, $MN \parallel BC$, $MN = 13 \text{ cm}$, dann ist $BC = a \text{ cm}$.

Wenn der Flächeninhalt des Rhombus $ABCD = 18 \text{ cm}^2$ und $AC = 6 \text{ cm}$ ist, dann ist $BD = b \text{ cm}$.

Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, $\sphericalangle A = 30^\circ$ und $AD = 18 \text{ cm}$, dann ist $d(D, AB) = c \text{ cm}$.

Wenn der Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ gleich 64 cm^2 ist, dann ist der Abstand von A zur Gerade BD gleich $d \text{ cm}$.

27. Es sei das Quadrat $ABCD$, wobei $AB = 8 \text{ cm}$ ist. Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Seiten DC und BC des Quadrats $ABCD$.

- Zeigt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ADM 16 cm^2 ist.
- Berechnet den Flächeninhalt des Vierecks $AMPB$.

28. Im Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 8 \text{ cm}$, $DC = 12 \text{ cm}$, ist der Winkel C 30° und $AD \perp BC$. E sei ein Punkt auf der Seite CD , sodass $CE = 8 \text{ cm}$ ist.

- Zeigt, dass das Viereck $ABCE$ ein Parallelogramm ist.
- Berechnet die Länge der Seite AD des Trapezes.

29. Der Punkt M sei der Mittelpunkt der Seite BC des Parallelogramms $ABCD$ und $AM \cap DC = \{P\}$.

- Beweist, dass die Dreiecke DMC und MCP gleiche Flächeninhalte haben.
- Bestimmt das Verhältnis zwischen dem Flächeninhalt des Dreiecks ADM und dem Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

30. Die gleichseitigen Dreiecke ABM und BCP werden außerhalb des Rechtecks $ABCD$ konstruiert.

- Beweist, dass das Dreieck MDP gleichseitig ist.
- Zeigt, dass $MB \perp CP$.

31. Im Rhombus $ABCD$ mit $AC \cap BD = \{O\}$ sind die Punkte E und F die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. AB , und H ist ein Punkt auf der Gerade CD , sodass $EH \parallel AC$. Zeigt, dass:

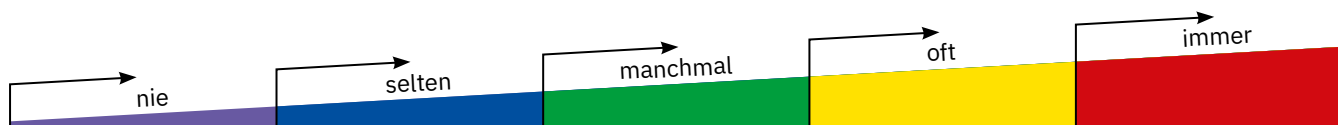
- das Viereck $BDEF$ ein gleichschenkliges Trapez ist;
- die Punkte F , O und H kollinear sind.

32. Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm mit $AC = BD$ und $AD = 4 \text{ cm}$. O sei der Mittelpunkt der Strecke AC und E ein Punkt auf der Seite AB , sodass $AE = 3 \text{ cm}$ und $EO \perp BD$.

- Zeigt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ADE gleich 6 cm^2 ist.
- Bestimmt den Umfang des Vierecks $ABCD$.

Systematischer Beobachtungsbogen

- Ich war sehr daran interessiert, Neues über Lösungsmethoden von Aufgaben zu lernen.
- Meine Teilnahme am Mathematikunterricht wurde von meinen Mitschülern und der Lehrkraft geschätzt.



E5

Der Kreis

1. Lektion

Der Kreis. Sehnen und Bogen in einem Kreis. Eigenschaften

2. Lektion

Umfangswinkel

3. Lektion

Tangenten eines Kreises

4. Lektion

Regelmäßige Vielecke, die dem Kreis einbeschrieben sind

5. Lektion

Länge des Kreises und Flächeninhalt des Diskus

Wiederholung und Bewertung



Der Kreis ist eine grundlegende Form, die überall zu finden ist, von den Atomen bis zu den Sternen, und die der Menschheit mit der Erfindung des Rades Mobilität gegeben hat. Es ist eine geometrische Figur ohne scharfe Kanten, die eine schnellere Veranschaulichung von Vorgängen ermöglicht und daher in Diagrammen verwendet wird. Der legendäre König Artus wollte, dass alle Ritter an seinem Hof als gleichberechtigt angesehen werden und nicht um einen höheren Rang kämpfen. Menschen, die an einem runden Tisch sitzen und sich unterhalten, fühlen sich gleichberechtigt.

1. Lektion: Der Kreis. Sehnen und Bogen in einem Kreis. Eigenschaften

Schlüsselwörter

Kreis

Bogen

Sehnen

Mittelpunktswinkel

Durchmesser

Radius

Sehnen und Bogen im Kreis

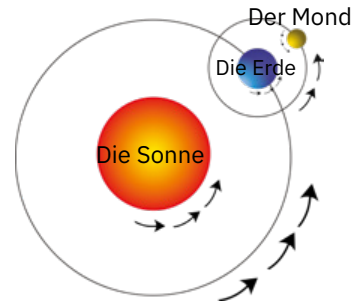


Mathe im Alltag

Die Sonne, der Planet Erde und der natürliche Satellit der Erde, der Mond, sind in der nebenstehenden Abbildung schematisch dargestellt.

Die Darstellung erfolgt durch drei Kreise. Durch Analyse des Maßstabs der Platte lassen sich die Radien der drei Himmelskörper und die Abstände zwischen ihnen berechnen.

Wir erweitern und erinnern an die folgenden Konzepte, die in der 6. Klasse eingeführt wurden.



Merke dir!

Der Kreis

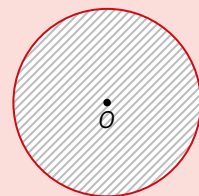
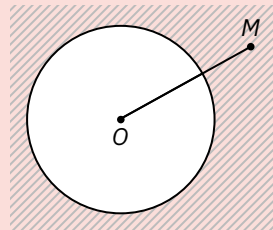
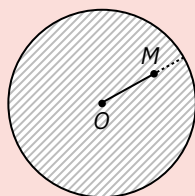
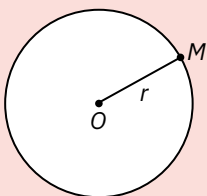
Bei einem Punkt O und einer positiven reellen Zahl r nennen wir einen *Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r* die Menge der Punkte in der Ebene $\mathcal{P}$ im Abstand r vom Punkt O . Wir bezeichnen $\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM = r\}$. Wir definieren auch die folgenden Mengen:

$\text{Int}\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM < r\}$, genannt *das Innere* des Kreises mit Mittelpunkt O und Radius r ;

$\text{Ext}\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM > r\}$, genannt *das Äußere* des Kreises mit Mittelpunkt O und Radius r ;

$\mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int}\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM \leq r\}$, bezeichnet durch *die Scheibe* mit Mittelpunkt O und Radius r .

$$\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM = r\} \quad \text{Int}\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM < r\} \quad \text{Ext}\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM > r\} \quad \mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int}\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathcal{P} \mid OM \leq r\}$$



Kreissehne

Die Strecke, die an zwei verschiedenen Punkten eines Kreises endet, wird als *Sehne* bezeichnet.

Eine Sehne, die den Mittelpunkt des Kreises enthält, wird als *Durchmesser* bezeichnet. Die Enden eines Durchmessers werden als *diametral entgegengesetzte Punkte* bezeichnet.

In einem Kreis mit dem Radius r ist die Länge jedes Durchmessers gleich $2r$ und größer oder gleich der Länge jeder anderen Sehne.

In Abbildung 1 sind AB und CD zwei Sehnen eines Kreises. Außerdem ist die Sehne CD ein Durchmesser, weil sie den Mittelpunkt O des Kreises enthält. Die Punkte C und D , die Enden des Durchmessers CD , sind diametral entgegengesetzte Punkte.

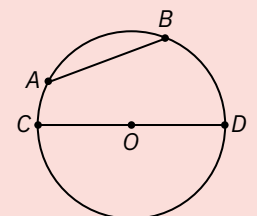


Abbildung 1

Mittelpunktswinkel

Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt im Mittelpunkt eines Kreises liegt, heißt *Mittelpunktswinkel*.

Die Winkel AOB und COD in Abbildung 2 sind Mittelpunktswinkel im Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r .

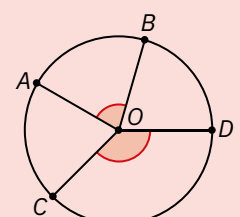


Abbildung 2

Kreisbogen

Die Menge der Punkte eines Kreises, die auf derselben Seite einer Sehne liegen, sowie die Enden der Sehne werden als *Bogen* bezeichnet.

Die Enden der Sehne sind auch die Enden des Bogens.

Zwei diametral entgegengesetzte Punkte auf einem Kreis bilden zwei Bogen, die Halbkreise genannt werden.

Zwei verschiedene Punkte A und B auf einem Kreis, die nicht diametral entgegengesetzt sind, ergeben zwei Kreisbogen:

- *kleiner Bogen* $\widehat{AB}$ – die Menge der Punkte auf dem Kreis innerhalb des Winkels AOB , zu der wir die Punkte A und B hinzufügen;
- *großer Bogen* $\widehat{AB}$ – die Menge der Punkte auf dem Kreis außerhalb des Winkels AOB , zu der wir die Punkte A und B hinzufügen.

Um Verwechslungen zwischen den beiden Bogen zu vermeiden, wird für die Schreibweise des großen Bogens ein anderer Punkt auf dem Bogen verwendet; in Abbildung 3 wird der große Bogen $\widehat{AB}$ beispielsweise mit $\widehat{ACB}$ bezeichnet, wobei der Punkt C ein Punkt auf dem Kreis ist, der außerhalb des Winkels AOB liegt.

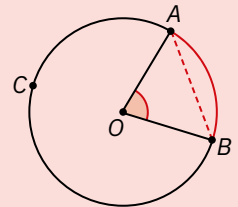


Abbildung 3

Maß eines Bogens

Das Maß des kleinen Bogens $\widehat{AB}$ ist gleich dem Maß des Mittelpunktswinkels AOB , und das Maß des großen Bogens $\widehat{AB}$ ist gleich $360^\circ - \sphericalangle AOB$.

Das Maß eines Halbkreises ist 180° und das Maß eines Kreises ist 360° .

Zwei Bogen $\widehat{AB}$ und $\widehat{CD}$ desselben Kreises oder Bogen zweier kongruenter Kreise heißen *kongruent*, wenn sie das gleiche Maß haben. Wir stellen fest: $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$.

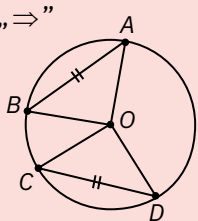
Eigenschaften von Kreissehnen und -bogen

Merke dir!

Lehrsatz 1 (betreffend Bogen mit entsprechenden kongruenten Sehnen und umgekehrt)

Zwei Kreissehnen sind genau dann kongruent, wenn die Bogen, die von den beiden Sehnen begrenzt werden, kongruent sind.

„ $\Rightarrow$ “



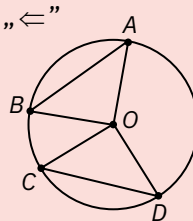
Voraussetzung: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
 $AB \equiv CD$

Schlussfolgerung: $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$

Beweis:

$\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (SSS) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD \Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$.

„ $\Leftarrow$ “



Voraussetzung: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
 $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$

Schlussfolgerung: $AB \equiv CD$

Beweis:

$\widehat{AB} \equiv \widehat{CD} \Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle AOB \equiv \triangle COD$ (SWS) $\Rightarrow AB \equiv CD$.

Anwendung

Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $r = 4$ cm sind die Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so zu betrachten, dass $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DO$ (Abbildung 4). Beweist, dass die Punkte A, O, D kollinear sind und $AC \equiv BD$.

Beweis:

$AB \equiv BO \equiv AO \Rightarrow \triangle AOB$ ist gleichseitig $\Rightarrow \sphericalangle AOB = 60^\circ$.

$BC \equiv CO \equiv OB \Rightarrow \triangle BOC$ ist gleichseitig $\Rightarrow \sphericalangle BOC = 60^\circ$.

$CD \equiv DO \equiv CO \Rightarrow \triangle COD$ ist gleichseitig $\Rightarrow \sphericalangle COD = 60^\circ$.

Wir erhalten $\sphericalangle AOD = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, sodass die Punkte A, O und D kollinear sind.

Also, $\widehat{ABC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{BC} + \widehat{CD} = \widehat{BCD}$, also $AC \equiv BD$.

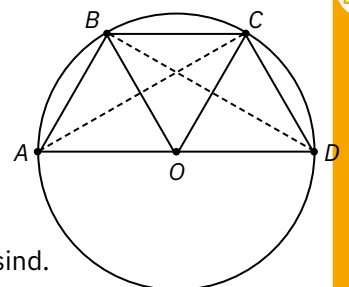


Abbildung 4

Merke dir!

Lehrsatz 2 (betreffend den Durchmesser senkrecht zu einer Sehne)

Wenn A und B zwei Punkte auf einem Kreis sind, dann enthält der Durchmesser senkrecht zur Sehne AB den Mittelpunkt der Sehne AB und die Mittelpunkte der Bogen $\widehat{AB}$ (kleiner und großer Bogen).

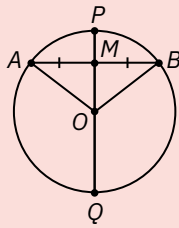


Abbildung 5

Beweis:

Im gleichschenkligen Dreieck OAB (mit $OA \equiv OB$ als Radien im Kreis) ist OM die Höhe, also auch die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende des Winkels AOB (Abbildung 5). Daraus ergibt sich $AM \equiv MB$ und $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP$. Da $\widehat{AP} = \sphericalangle AOP = \sphericalangle BOP = \widehat{BP}$ ist, ergibt sich $\widehat{AP} \equiv \widehat{BP}$.

Da die Strecke PQ ein Durchmesser ist, sind die Bögen $\widehat{PAQ}$ und $\widehat{PBQ}$ Halbkreise, also kongruent. Folglich ist $\widehat{AQ} \equiv \widehat{BQ}$, die Differenz der kongruenten Bögen.

Kehrsatz des Satzes 2. Teilt ein Kreisdurchmesser eine Sehne oder einen der durch sie bestimmten Bögen in kongruente Teile, so steht dieser Durchmesser senkrecht auf der Sehne.

Anwendung

Auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ seien die Punkte A und B so gewählt, dass $\widehat{AB} = 120^\circ$. M sei der Fußpunkt der von O auf AB gezogenen Senkrechten. Berechne die Länge des Radius des Kreises, wobei $OM = 5$ cm ist.

Beweis:

P sei der Schnittpunkt der Geraden OM mit dem kleinen Bogen $\widehat{AB}$. Nach Lehrsatz 2 sind die Bögen $\widehat{AP}$ und $\widehat{BP}$ kongruent, also sind auch die entsprechenden Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AOP$ und $\sphericalangle BOP$ kongruent. Daraus folgt, $\sphericalangle AOP = \sphericalangle BOP = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AOB = 60^\circ$. Da $OA = OP$ (als Radien im Kreis) ist, folgern wir, dass das Dreieck OAP gleichseitig ist. Da $AM \perp OP$ ist, ergibt sich, dass M der Mittelpunkt der Strecke OP ist, sodass der Radius des Kreises gleich $OP = 2 \cdot OM = 10$ cm ist.

Merke dir!

Lehrsatz 3 (betreffend Bögen zwischen zwei parallelen Sehnen)

Die Bögen und Sehnen zwischen zwei parallelen Sehnen sind jeweils kongruent.

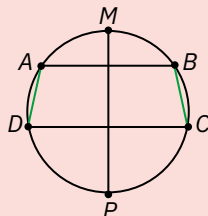


Abbildung 6

Voraussetzung: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
 $AB \parallel CD$
 $C \notin \widehat{BAD}$

Schlussfolgerung: $AD \equiv BC, \widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$

Beweis: Wir konstruieren, wie in Abbildung 6, den Durchmesser MP senkrecht zur Sehne AB so, dass M auf dem Bogen $\widehat{CAD}$ liegt. Da $AB \parallel CD$ ist, leiten wir ab, dass der Durchmesser MP auch senkrecht auf der Sehne CD steht.

Nach Lehrsatz 2 ist der Punkt M der Mittelpunkt des Bogens $\widehat{CAD}$, und der Punkt P der Mittelpunkt des Bogens $\widehat{CD}$. Da die Bögen $\widehat{PAM}$ und $\widehat{PBM}$ Halbkreise sind, erhalten wir $\widehat{AD} = 180^\circ - \widehat{AM} - \widehat{PD} = 180^\circ - \widehat{BM} - \widehat{PC} = \widehat{BC}$, also sind die Bögen $\widehat{AD}$ und $\widehat{BC}$ kongruent. Aus Lehrsatz 1 folgt, dass $AD \equiv BC$.

Kehrwert des Satzes 3. Wenn A, B, C, D Punkte auf einem Kreis sind, in dieser Reihenfolge, sodass $AD \equiv BC$ oder $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$, dann $AB \parallel CD$.

Anwendung

Zeigt, dass das Parallelogramm $ABCD$ ein Rechteck ist, wenn seine Eckpunkte auf einem Kreis liegen.

Beweis: Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, haben wir $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$ (Abbildung 7).

Aus Lehrsatz 3 folgt, da $AB \parallel CD$, dass $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$, und aus $AD \parallel BC$ folgt, dass $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$.

Dann ist $\widehat{ABC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{DA} = \widehat{ADC}$. Wir folgern, dass $\widehat{ABC}$ und $\widehat{ADC}$ Halbkreise sind, also ist AC der Durchmesser. Analog erhalten wir, dass BD der Durchmesser ist, also ist $AC = BD$. Da $ABCD$ ein Parallelogramm mit kongruenten Diagonalen ist, ist es ein Rechteck.

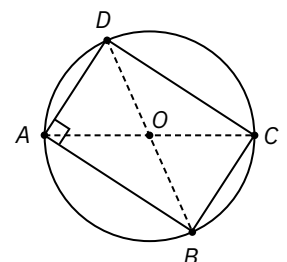


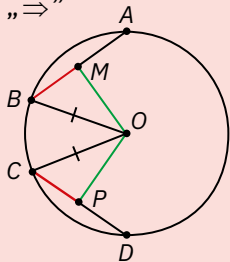
Abbildung 7

Merke dir!

Lehrsatz 4 (betreffend gleich weit vom Mittelpunkt entfernte Sehnen)

Zwei Sehnen eines Kreises sind genau dann kongruent, wenn sie gleich weit vom Mittelpunkt des Kreises entfernt sind.

„ $\Rightarrow$ “



Voraussetzung:
 $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
 $AB \equiv CD$
 $OM \perp AB, M \in AB$
 $OP \perp CD, P \in CD$

Schlussfolgerung: $OM \equiv OP$

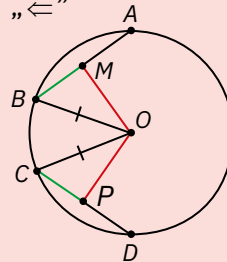
Beweis:

Aus $OM \perp AB, OP \perp CD$, ergibt sich aus Lehrsatz 2, dass

$$BM = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = CP.$$

Da $OB = OC = r, BM = CP$ und $OM \perp AB, OP \perp CD$, folgern wir, dass $\triangle MOB \equiv \triangle POC$ (HK), also $OM \equiv OP$.

„ $\Leftarrow$ “



Voraussetzung:
 $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
 $OM \perp AB, M \in AB$
 $OP \perp CD, P \in CD$
 $OM \equiv OP$

Schlussfolgerung: $AB \equiv CD$

Beweis:

Da $OB = OC = r, OM = OP$ und $OM \perp AB, OP \perp CD$, ergibt sich $\triangle MOB \equiv \triangle POC$ (der Fall HK), also $MB \equiv CP$.

Laut Lehrsatz 2 haben wir dann:

$$AB = 2 \cdot BM = 2 \cdot CP = CD.$$

Anwendung

Betrachtet die Punkte A, B und C auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 10 cm. Wenn $AB = AC$ und $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, berechnet den Abstand zwischen dem Punkt O und der Gerade AB.

Beweis:

Wir konstruieren $OM \perp AB, M \in AB$, und $OP \perp AC, P \in AC$. Aus Lehrsatz 4 folgt, dass $OM \equiv OP$. Dann ist $\triangle AOM \equiv \triangle AOP$ (der Kongruenzfall HK), also $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle OAP$, also $\sphericalangle OAM = 30^\circ$ (Abbildung 8). Auf das rechtwinklige Dreieck AOM wird die Winkelseigenschaft mit dem Maß 30°

angewandt, daraus ergibt sich, dass $d(O, AB) = OM = \frac{AO}{2} = 5$ cm ist.

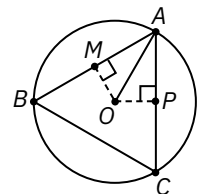


Abbildung 8

Bemerkungen

1. Wenn ein Trapez die Eckpunkte auf einem Kreis hat, dann ist das Trapez gleichschenkelig.

Beweis:

$ABCD$ sei ein Trapez mit Eckpunkten auf einem Kreis und $AB \parallel CD$. Nach Lehrsatz 3 sind die Bogen zwischen den parallelen Geraden AB und CD kongruent, d. h., $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$, und, da kongruente Bogen kongruenten Sehnen entsprechen (Satz 1), ergibt sich $AD \equiv BC$, d. h., das Trapez $ABCD$ ist gleichschenkelig.

2. Liegt ein Rhombus mit seinen Eckpunkten auf einem Kreis, so ist der Rhombus ein Quadrat.

Beweis:

Wir haben bereits bewiesen, dass ein Parallelogramm mit Eckpunkten auf einem Kreis ein Rechteck ist. Daher ist ein Rhombus, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, auch ein Rechteck, also ist ein solcher Rhombus ein Quadrat.

Portfolio

1. Ermittelt mithilfe einer Internetsuchmaschine vier Logos, die den Kreis verwenden.
2. Schreibt und beweist die Kehrsätze der in dieser Lektion aufgestellten Sätze 2 und 3. Sammelt diese Seiten in eurer Portfoliomappe zur **Kreisgeometrie**.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. In Abbildung 9 ist $BC \parallel OE$. Beweist, dass $\widehat{BD} = 2 \cdot \widehat{CE}$.

Lösung:

Sei $EO \cap \mathcal{C}(O, r) = \{M, E\}$. Da $BC \parallel ME$ ist, folgt gemäß Lehrsatz 3, dass $\widehat{BM} \equiv \widehat{CE}$ ist (1).

Außerdem ist zu beachten, dass $\sphericalangle MOD \equiv \sphericalangle EOC$ (Scheitelwinkel), also $\widehat{DM} \equiv \widehat{CE}$ (2).

Aus (1) und (2) ergibt sich $\widehat{BD} = \widehat{BM} + \widehat{MD} = 2 \cdot \widehat{CE}$.

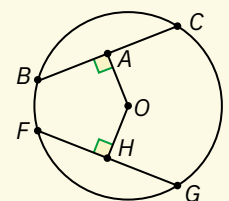


Abbildung 10



2. Man betrachte den Kreis mit dem Mittelpunkt O , wie in Abbildung 10, und den kongruenten Sehnen BC und FG . Wenn $OA \perp BC$, $A \in BC$, $OH \perp FG$, $H \in FG$, und $OA = 5x + 11$ cm, $OH = 3x + 19$ cm, dann berechne die Länge der Strecke OA .

Lösung:

Da $BC \cong FG$ ist, folgt aus Lehrsatz 4, dass $OA \cong OH$ ist.

Wir erhalten $5x + 11 = 3x + 19$, also $x = 4$ cm, also $OA = 5 \cdot 4 + 11 = 31$ cm.

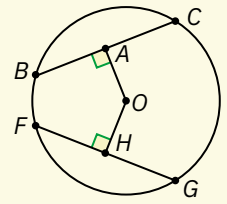


Abbildung 10

Vorgeschlagene Aufgaben

- Eine Sonnenfinsternis tritt auf, wenn der Mond vor der Sonne zwischen der Erde und der Sonne vorbeizieht. Wenn die Scheibe des Mondes die Scheibe der Sonne vollständig bedeckt, ist das helle Bild der Sonne vollständig verdeckt, und für ein bestimmtes Sichtfeld und eine bestimmte Dauer, die in der Größenordnung von einigen Minuten liegt, handelt es sich um eine *totale* Sonnenfinsternis, wie auf dem nebenstehenden Bild. Nennt weitere Beispiele von Alltagsgegenständen, in denen Kreise und Disken vorkommen.
- Abbildung 11 zeigt einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r und den Punkten M, N, P, Q, S und T . Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt aus den dargestellten Punkten ausgewählt wird:
 - innerhalb des Kreises mit Mittelpunkt O und Radius r ;
 - auf dem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r ;
 - auf dem Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r ;
 - außerhalb des Kreises mit Mittelpunkt O und Radius r .
- Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r seien MP und NQ zwei Durchmesser.
 - Beweist, dass $NP \cong MQ$.
 - Wenn $NP \cong OP$, berechne das Maß des Winkels PMN .
- Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O liegen die Punkte A, B, C so, dass $\widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CA}$. Bestimme das Maß des Winkels AOB .
- Auf einem Kreis werden die Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge so gewählt, dass $\widehat{AB} = 60^\circ$ ist, $\widehat{AC} = 80^\circ$ und $\widehat{DC} = 120^\circ$. Berechne das Maß der Bogen $\widehat{AD}$ und $\widehat{BC}$.
- Betrachte die Punkte A, C, D und B in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r . Wenn A, O, B kollinear sind, $\widehat{AD} = 130^\circ$ und $\widehat{CD} = 80^\circ$, dann beweist, dass $AC \cong DB$ und $AD \cong BC$.
- Innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt O und Radius r sei ein Punkt A , $A \neq O$. Konstruiere zwei Punkte B und C auf dem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r , sodass das Viereck $OBAC$ ein Rhombus ist.
- Nehme auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r die Punkte A, B und C so an, dass das Dreieck ABC nicht gleichschenkelig ist. Konstruiere zwei Sehnen CP und CQ so, dass $PC \cong CQ \cong AB$.
- Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r sind die Punkte A, B und C so beschaffen, dass $AB \cong AC$. Wenn der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke BC ist, beweist, dass die Punkte A, O und M kollinear sind.
- In einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r sei ein Durchmesser AB gegeben. Die Punkte C, D, E liegen in dieser Reihenfolge auf einem der durch den Durchmesser AB bestimmten Halbkreise, sodass die Bogen AC, CD, DE und EB kongruent sind. Zeigt, dass das Viereck $CEQP$ ein Quadrat ist, wobei P und Q auf dem Kreis liegen, sodass CQ und EP Durchmesser sind.
- Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r sind die Punkte A, B, P, Q und D so zu betrachten, dass $\angle POQ = 40^\circ$, $\angle AOB = 80^\circ$ und der Strahl OD die Winkelhalbierende des Winkels AOB ist. Beweist, dass $AD \cong PQ$.
- Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 12 cm sind die Punkte A, B, C so zu betrachten, dass $AB \cong AC$ und $\angle BAC = 90^\circ$. Wenn $OP \perp AB$, $P \in AB$, $OQ \perp AC$, $Q \in AC$, dann berechne den Flächeninhalt des Vierecks $APOQ$.

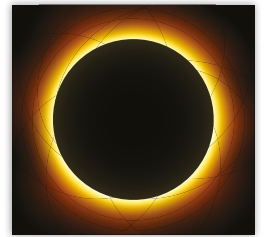


Abbildung 11

Test

- Die Abstände vom Mittelpunkt eines Kreises zu zwei parallelen Sehnen sind 4 cm und 6 cm. Berechne den Abstand zwischen den Mittelpunkten der beiden Sehnen. Wie viele Situationen gibt es? (3 Pkte.)
- Beweist, dass die Mittelpunkte von fünf kongruenten Kreissehnen auf einem Kreis liegen. (3 Pkte.)
- In einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 10 cm seien die Sehne AB und der Durchmesser CD so, dass $AB \perp CD$ und $\widehat{AC} = 60^\circ$. Berechne die Länge der Sehne AC und den Abstand vom Punkt C zur Sehne AB . (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

2. Lektion: Umfangswinkel

Schlüsselwörter

Umfangswinkel

Punkt außerhalb des Kreises

Punkt innerhalb des Kreises

Merke dir!

Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt auf einem Kreis liegt, wird als *Umfangswinkel* bezeichnet, wenn seine Schenkel Sehnen des Kreises enthalten.

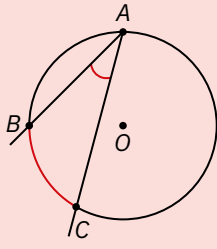


Abbildung 1

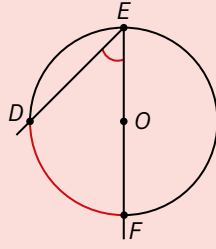


Abbildung 2

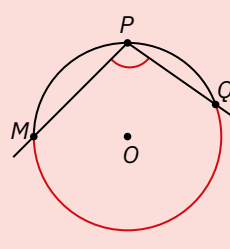


Abbildung 3

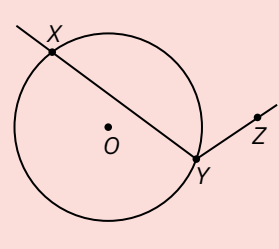


Abbildung 4

In Abbildung 1 ist der Winkel BAC ein *Umfangswinkel* in dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$. Wir sagen, dass der Winkel BAC den Bogen $\widehat{BC}$ umfasst oder dass der Bogen $\widehat{BC}$ zwischen den Schenkeln des Winkels BAC liegt. Der Winkel mit der Bezeichnung DEF in Abbildung 2 umfasst den Bogen $\widehat{DF}$, und der Winkel mit der Bezeichnung MPQ in Abbildung 3 umfasst den Bogen $\widehat{MQ}$. Der Winkel XYZ in Abbildung 4 ist kein Umfangswinkel.

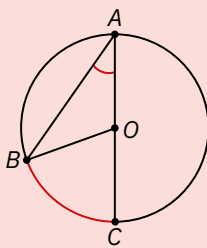
Merke dir!

Lehrsatz. Das Maß eines Umfangswinkels ist gleich der Hälfte des Maßes des Kreisbogens, den er umfasst.

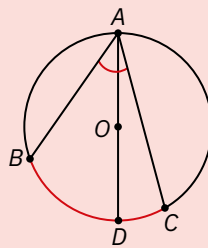
Beweis:

Es seien $A, B, C \in \mathcal{C}(O, r)$. Wir beweisen, dass $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BC}$.

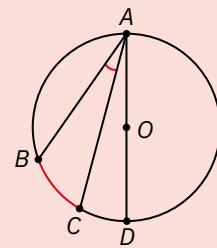
Es werden drei Fälle untersucht, die von der Lage des Kreismittelpunkts O in Bezug auf den Winkel BAC abhängen, wie in den folgenden Abbildungen dargestellt:



Fall I



Fall II



Fall III

Fall I: Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf einem Schenkel des Winkels BAC .

Der Winkel BOC liegt außerhalb des gleichschenkligen Dreiecks AOB mit der Basis AB , also $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAO = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOC$. Da BOC Mittelpunktswinkel ist, folgt, dass $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BOC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BC}$.

Fall II: Der Mittelpunkt des Kreises liegt im Inneren des Winkels BAC .

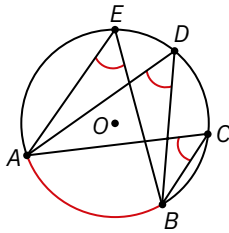
Sei $AO \cap \mathcal{C}(O, r) = \{A, D\}$. Nach Fall I erhalten wir: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BD} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{CD} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BC}$.

Fall III: Der Mittelpunkt des Kreises liegt im Äußeren des Winkels BAC .

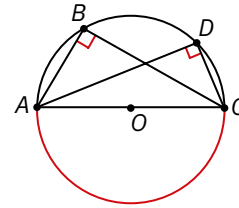
Sei $AO \cap \mathcal{C}(O, r) = \{A, D\}$. Nach Fall I erhalten wir: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD - \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BD} - \frac{1}{2} \cdot \widehat{CD} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BC}$.

Bemerkungen

1. *Umfangswinkel, die in einen Kreis denselben Bogen einschließen, sind kongruent.*
2. *Jeder Umfangswinkel über einen Halbkreis ist ein rechter Winkel.*



$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AB}$$

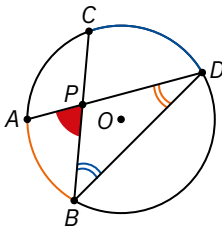


$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \widehat{AC} : 2 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$$

Portfolio

Beweist die folgenden Eigenschaften, schreibe sie auf und sammle diese Seiten in der Mappe **Kreisgeometrie**.

1. Das Maß eines Winkels, dessen Scheitelpunkt innerhalb des Kreises liegt, ist gleich dem Halbsummenwert der Maße der Bogen, die auf dem Kreis durch die Seiten des Winkels und ihre Verlängerungen bestimmt werden.

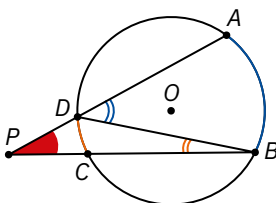


Voraussetzung: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
 $P \in \text{Int}(\mathcal{C}(O, r))$
 $AD \cap BC = \{P\}$

Schlussfolgerung: $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{AB} + \widehat{CD})$

Hinweis: Die Winkel ADB und CBD sind Umfangswinkel in einem Kreis und der Winkel APB liegt außerhalb des Dreiecks BDP.

2. Das Maß eines Winkels, dessen Scheitelpunkt außerhalb eines Kreises liegt, ist gleich dem Absolutwert der halben Differenz der Maße der Bogen, die die Schenkel des Winkels auf dem Kreis bestimmen.

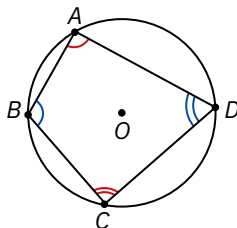


Voraussetzung: $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$
 $P \in \text{Ext}(\mathcal{C}(O, r))$
 $AD \cap BC = \{P\}$

Schlussfolgerung: $\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{AB} - \widehat{CD})$

Hinweis: Die Winkel ADB und CBD sind Umfangswinkel in dem Kreis und der Winkel APB liegt außerhalb des Dreiecks BDP.

3. Die Summe der Maße der gegenüberliegenden Winkel eines Vierecks, bei dem alle Eckpunkte auf einem Kreis liegen, ist gleich 180° .



Voraussetzung: ABCD konvexes Viereck
 $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$

Schlussfolgerung: $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$

Hinweis: Die Winkel BAD und BCD sind Umfangswinkel, ebenso die Winkel ABC und ADC.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Man betrachte die Punkte A, B, C und D auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$.
 - a. Wenn $\sphericalangle ACB = 73^\circ$, bestimme das Maß des Winkels AOB.
 - b. Wenn $\widehat{BC} = 36^\circ$ ist, berechne die Maße der Winkel BOC und BAC.
 - c. Wenn $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 84^\circ$ ist, zeige, dass AC und BD keine gemeinsamen Punkte haben.

Lösung:

- a. $\widehat{AB} = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 146^\circ = \sphericalangle AOB$.

b. Wenn A auf dem großen Bogen $\widehat{BC}$ liegt, dann ist $\sphericalangle BOC = \widehat{BC} = 36^\circ$, und $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BC} = 18^\circ$.

Wenn A auf dem kleinen Bogen $\widehat{BC}$ liegt, dann $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 36^\circ) = 162^\circ$.

c. Wenn D auf dem Bogen $\widehat{ABC}$ liegt, dann haben die Strecken AC und BD keine gemeinsamen Punkte, und die Winkel ADC und ABC umfassen den kleinen Bogen $\widehat{AC}$, also $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AC} = \sphericalangle ABC = 84^\circ$.

Nehmen wir an, dass es einen Punkt D auf dem Kreis gibt, für den $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 84^\circ$ gilt, und die Strecken AC und BD schneiden sich, sodass B und D auf beiden Seiten der Gerade AC liegen. Dann hat das Viereck $ABCD$ alle Eckpunkte auf $\mathcal{C}(O, r)$ und es folgt, dass $168^\circ = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = \widehat{ADC} : 2 + \widehat{ABC} : 2 = 180^\circ$, falsch. D befindet sich also auf dem Bogen $\widehat{ABC}$, und die Strecken AC und BD schneiden einander nicht.

2. Auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ seien die Punkte A, B und C so, dass die Maße der kleinen Bogen $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ und $\widehat{BC}$ direkt proportional zu den Zahlen 6, 8 und 10 sind. Bestimmt die Winkelmaße des Dreiecks ABC und beweist, dass $\sphericalangle ATC \equiv \sphericalangle ABC$ ist, wobei der Punkt T der Schnittpunkt der Geraden AO und des kleinen Bogens $\widehat{BC}$ ist.

Lösung:

Die Voraussetzung besagt, dass $k > 0$ ist, also $\widehat{AB} = 6k^\circ$, $\widehat{AC} = 8k^\circ$ und $\widehat{BC} = 10k^\circ$.

Da $\widehat{AB} + \widehat{BC} > \widehat{AC}$ ist, folgt daraus, dass $\widehat{ABC} > 180^\circ$ ist, sodass der kleine Bogen $\widehat{AC}$ den Punkt B nicht enthält.

Daraus folgt, dass $24k^\circ = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ$, also $k = 15$. Also $\widehat{AB} = 90^\circ$, $\widehat{AC} = 120^\circ$ und $\widehat{BC} = 150^\circ$.

Wir erhalten $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BC} = 75^\circ$, $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AC} = 60^\circ$ und $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AB} = 45^\circ$.

Die Winkel ATC und ABC umfassen den kleinen Bogen $\widehat{AC}$, und $\sphericalangle ATC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AC} = 60^\circ = \sphericalangle ABC$.

Vorgeschlagene Aufgaben

- Betrachtet ein Dreieck ABC , das einem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$, einbeschrieben ist, sodass der Mittelpunkt O im Inneren des Dreiecks liegt. Gebt den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an:
 - Der Winkel AOB ist ein Umfangswinkel in $\mathcal{C}(O, r)$.
 - Der Winkel ABC ist ein Umfangswinkel in $\mathcal{C}(O, r)$.
 - Der Winkel CAB ist kein Umfangswinkel in $\mathcal{C}(O, r)$.
 - Der Winkel OBC ist kein Umfangswinkel in $\mathcal{C}(O, r)$.
- Zeichnet einen Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ und wählt die Punkte A, B, C, D auf dem Kreis so, dass sich B und D diametral gegenüberliegen. Füllt die Lücken aus, sodass die Aussagen wahr sind.
 - Der Winkel $AO\dots$ ist kein Umfangswinkel in $\mathcal{C}(O, r)$.
 - Die Winkel $OB\dots$ und $OB\dots$ sind Umfangswinkel.
 - Die Winkel $BA\dots$ und $BA\dots$ sind Umfangswinkel in einem Kreis.
 - Die Winkel $DA\dots$ und $BC\dots$ sind kongruent.
- Bestimmt den Wert von x in jedem der in den Abbildungen 5, 6 und 7 dargestellten Fälle:

a.

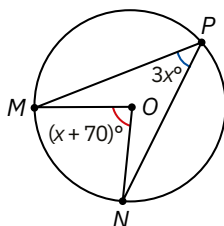


Abbildung 5

b.

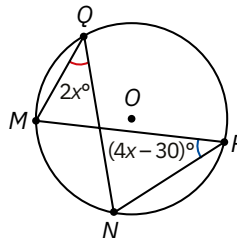


Abbildung 6

c.

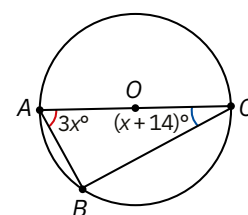


Abbildung 7

- Die Punkte A, B, C und D liegen, in dieser Reihenfolge, auf $\mathcal{C}(O, r)$. Wenn $\widehat{AB} = 80^\circ$, $\widehat{CD} = 60^\circ$ und $\widehat{DA} = 120^\circ$, berechnet die Maße der Winkel ABD , ABC , BAC , CDA , CDB und ACB und beweist, dass die Punkte A, O und C kollinear sind.



5. Die Punkte A, B, C und D liegen auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$. Wenn AB und CD senkrechte Durchmesser sind und der Punkt P auf dem kleinen Bogen $\widehat{AC}$, mit $\widehat{AP} = 20^\circ$, liegt, berechne die Maße der Winkel $CPD, PCD, CPB, DPB, DPB, PBA$ und APD .
6. Die Punkte A, B und C auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ seien so, dass die Maße der Bogen $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ und $\widehat{BC}$ direkt proportional zu den Zahlen 9, 12 und 15 sind. Bestimmt die Maße der Winkel des Dreiecks ABC .
7. In Abbildung 8 sind die Bogen $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}, \widehat{EF}, \widehat{FG}, \widehat{GH}$ und $\widehat{HA}$ kongruent.
 - a. Berechne die Bogenmaße $\widehat{AB}, \widehat{AC}, \widehat{AD}$ und $\widehat{AE}$.
 - b. Berechne die Maße der in der Abbildung markierten Winkel.
 - c. Beweist, dass $AD = DG = GB = BE = EH = HC = CF = FA$.
8. Das Quadrat $ABCD$ hat alle Eckpunkte auf einem Kreis, und $AB \perp AD$ und $AC \perp BD$. Beweist, dass:
 - a. $AD = CD$;
 - b. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADB$.
9. Die Punkte A, B und C liegen auf einem Kreis, für den $\widehat{AB} = 46^\circ$ und $\widehat{BC} = 134^\circ$ gilt. Bestimmt die Winkelmaße des Dreiecks ABC . Wie viele Lösungen hat die Aufgabe?
10. Die Punkte A, B, C und D liegen auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$, sodass sich A und B diametral gegenüberliegen, die Halbgerade OC ist die Winkelhalbierende von $\sphericalangle DOB$ und die Halbgerade OD ist die Winkelhalbierende von $\sphericalangle AOC$.
 - a. Wenn $CD = 4$ cm ist, bestimme die Länge des Radius des Kreises.
 - b. Bestimme das Maß des Winkels BAC .
 - c. Wenn M und N die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Strecken CD mit dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ sind, berechne $\sphericalangle CDM + \sphericalangle DCN$.
11. Betrachte das Dreieck ABC , das dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ einbeschrieben ist, mit $\sphericalangle A = 72^\circ$ und $\sphericalangle B = 48^\circ$. Es seien $A', B', C' \in \mathcal{C}(O, r)$, sodass die Geraden AA', BB' und CC' die Höhen des Dreiecks ABC sind. Bestimme die Maße der kleinen Bogen $\widehat{BA'}, \widehat{CB'}, \widehat{AC'}, \widehat{A'B'}, \widehat{B'C'}$ und $\widehat{C'A'}$.
12. Man betrachte die Punkte A, B, C, D auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$, sodass BC die Mittelsenkrechte der Strecke OA ist und $CD \parallel OA$. M sei der Mittelpunkt des Radius OD und der Punkt E , sodass $CM \cap \mathcal{C}(O, r) = \{C, E\}$.
 - a. Beweist, dass die Punkte B, O und D kollinear sind.
 - b. Bestimme das Maß des Winkels CAD .
 - c. Beweist, dass die Punkte A, O und E kollinear sind.

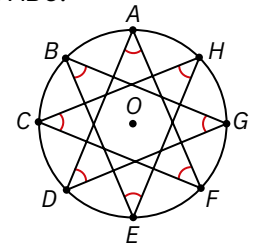


Abbildung 8

Test

1. Die Punkte A, B und C liegen auf $\mathcal{C}(O, r)$, sodass $\widehat{AB} = 120^\circ$ ist. Bestimme das Maß der Winkel AOB und ACB . Wie viele Lösungen gibt es? (3 Pkte.)
2. Die Punkte A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis, sodass $\widehat{AB} = 60^\circ$ und $\widehat{CD} = \widehat{DA} = 100^\circ$. Bestimme die Maße der Winkel ABD, BCD und ADC . (3 Pkte.)
3. Das Viereck $ABCD$ hat alle Eckpunkte auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$. Wenn $\sphericalangle ACB = 32^\circ$ und $\sphericalangle ABD = 58^\circ$ ist, beweist, dass BD der Durchmesser ist. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

3. Lektion: Tangenten eines Kreises

Schlüsselwörter

Tangente

Berührungspunkt

Sekanten

Gerade außerhalb des Kreises

Merke dir!

Erinnert euch aus der sechsten Klasse, dass eine Gerade und ein Kreis höchstens zwei Punkte gemeinsam haben können.

- Eine Gerade, die keinen gemeinsamen Punkt mit einem Kreis hat, liegt *außerhalb des Kreises*.
- Eine Gerade, die zwei Punkte mit einem Kreis gemeinsam hat, ist eine *Sekante des Kreises*.
- Eine Gerade, die nur einen Punkt mit einem Kreis gemeinsam hat, ist *tangent an den Kreis*, und der Schnittpunkt zwischen der Geraden und dem Kreis wird *Berührungspunkt* genannt.

In Abbildung 1 liegt die Gerade d außerhalb des Kreises, die Gerade g ist die Sekante des Kreises und die Gerade h ist die Tangente im Punkt T an den Kreis.

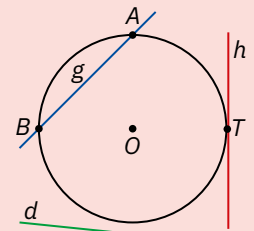


Abbildung 1

Lehrsatz 1. Die Tangente an einen Kreis steht senkrecht auf dem Radius des Kreises, der den Berührungspunkt enthält.
Voraussetzung:

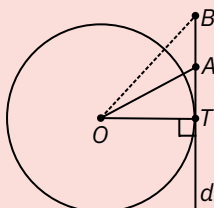


Abbildung 2

Voraussetzung: $d \cap \mathcal{C}(O, r) = \{T\}$

Schlussfolgerung: $d \perp OT$

Beweis:

Nehmen wir absurderweise an, dass d nicht senkrecht auf OT steht. $A, B \in d$ sei so, dass $d \perp OA$ und $AB = AT$. Die Dreiecke AOT und AOB sind kongruent (KK), also ist $OB = OT = r$, also ist die Gerade d eine Sekante des Kreises, falsch. Folglich ist $d \perp OT$.

Bemerkung: Der Kehrsatz von Lehrsatz 1 gilt ebenfalls:

Wenn T ein Punkt auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ ist, dann ist die Senkrechte in T zur Geraden OT tangent zum Kreis.

Lehrsatz 2. Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises können genau zwei Tangenten an diesen Kreis konstruiert werden.

Beweis: Sei M ein Punkt außerhalb des Kreises $\mathcal{C}(O, r)$ und T ein Punkt auf dem Kreis, sodass MT den Kreis berührt. Aus Lehrsatz 1 folgt, dass $MT \perp OT$ ist, also $\sphericalangle MTO = 90^\circ$, d. h., T liegt auf dem Kreis $\mathcal{C}'$ mit dem Durchmesser OM . Die Kreise $\mathcal{C}(O, r)$ und $\mathcal{C}'$ sind sekant; ihre Schnittpunkte T_1 und T_2 sind die beiden gesuchten Berührungspunkte, und die Tangenten von M an den Kreis sind die Geraden MT_1 und MT_2 .

Lehrsatz 3. Die Strecken, bestimmt von einem Punkt außerhalb des Kreises und den Berührungspunkten der Tangenten aus diesem Punkt an den Kreis, sind kongruent.

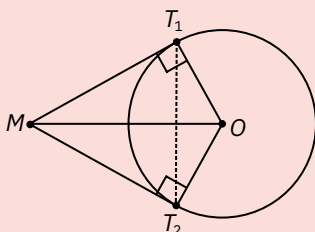


Abbildung 3

Voraussetzung: $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$, $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(O, r)$
 MT_1, MT_2 Tangente zu $\mathcal{C}(O, r)$

Schlussfolgerung: $MT_1 = MT_2$

Beweis:

Aus Lehrsatz 1 folgt, dass $MT_1 \perp OT_1$ und $MT_2 \perp OT_2$, also $\sphericalangle OT_1M = \sphericalangle OT_2M = 90^\circ$. Daraus folgt, dass $\triangle OMT_1 \cong \triangle OMT_2$ (Hyp.K.), also $MT_1 = MT_2$.

Bemerkung (Eigenschaften des „Krähenschnabels“)

Sei M ein Punkt außerhalb des Kreises $\mathcal{C}(O, r)$ und MT_1, MT_2 die durch M gezogenen Tangenten an den Kreis, wobei $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(O, r)$ (wie in Abbildung 3). Aus der Kongruenz der Dreiecke OMT_1 und OMT_2 folgt, dass:

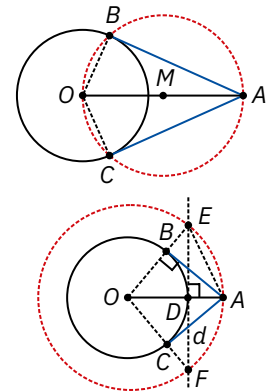
- $MT_1 = MT_2$;
- die Halbgerade MO ist die Winkelhalbierende des Winkels T_1MT_2 ;
- die Gerade MO ist die Mittelsenkrechte der Strecke T_1T_2 ;
- die Halbgerade OM ist die Winkelhalbierende des Winkels T_1OT_2 .



Portfolio

Schreibt auf die Portfolioseiten der Mappe **Kreisgeometrie** die folgenden zwei Möglichkeiten, Tangenten von einem äußeren Punkt A an den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ zu konstruieren. Führt die Konstruktion dieser Tangenten durch und begründet jede Methode.

1. a. Konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke OA .
 b. Konstruiert einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius MO .
 c. Wir bezeichnen mit B und C die Schnittpunkte der Kreise $\mathcal{C}(O, r)$ und $\mathcal{C}(M, MO)$. Die Tangenten von A an den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ sind die Geraden AB und AC .
2. a. Durch den Punkt D , wo die Strecke OA den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ schneidet, konstruieren wir die Gerade d , senkrecht zu OA .
 b. Wir konstruieren den Kreis $\mathcal{C}(O, OA)$ und bezeichnen $d \cap \mathcal{C}(O, OA) = \{E, F\}$.
 c. Wir bezeichnen mit B und C die Schnittpunkte der Strecken OE und OF mit $\mathcal{C}(O, r)$. Die Tangenten von A an den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ sind die Geraden AB und AC .



Anwendung 1 (Winkel, der durch eine Kreistangente und eine Sekante gebildet wird)

Der Winkel BAC mit dem Scheitelpunkt A liege auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ und der Schenkel AC sei eine Sehne dieses Kreises.

- a. Wenn die Gerade AB den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ berührt, dann ist das Maß des Winkels BAC gleich der Hälfte des Maßes des Bogens $\widehat{AC}$, der innerhalb des Winkels liegt.
- b. Wenn umgekehrt das Maß des Winkels BAC gleich der Hälfte des Maßes des Bogens $\widehat{AC}$ innerhalb des Winkels ist, dann ist die Gerade AB eine Tangente zum Kreis $\mathcal{C}(O, r)$.

Beweis:

- a. Wir analysieren drei Fälle je nach dem Maß des Winkels BAC .

- I. Wir gehen zunächst davon aus, dass der Winkel BAC spitz ist, wie in Abbildung 4 dargestellt.

D ist der diametral entgegengesetzte Punkt von A . Da $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BAD = 90^\circ$, haben die Winkel ADC und BAC das gleiche Komplement (Winkel CAD), also

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AC}.$$

- II. Da $\sphericalangle BAD = 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot \widehat{ACD}$, gilt die Eigenschaft auch für rechte Winkel.

- III. Sei $B' \in AB$ so, dass A auf der Strecke BB' liegt. Der Winkel $B'AC$ ist stumpf und verläuft durch den Bogen $\widehat{ADC}$, und $\sphericalangle B'AC = 180^\circ - \sphericalangle BAC = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{AC} = \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{AC}) = \frac{1}{2} \widehat{ADC}$.

- b. Nehmen wir absurderweise an, dass AB nicht tangent zum Kreis ist. Sei d die Tangente in A an den Kreis und E ein Punkt dem Kreis, auf der gleichen Seite wie B , rechts von AD . Aus a folgt, dass $\sphericalangle EAC = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AC} = \sphericalangle BAC$, also die Halbgeraden AB und AE fallen zusammen, falsch. Die Vermutung ist also falsch, also ist AB tangent zum Kreis.

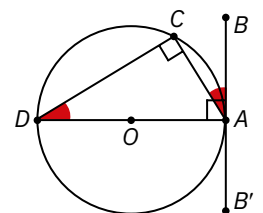


Abbildung 4

Bemerkung: Punkt b von Anwendung 1 kann verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Gerade einen Kreis berührt.



Anwendung 2 (Pitot-Theorem)

Wenn alle Seiten des Vierecks $ABCD$ den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ berühren, dann ist $AB + CD = AD + BC$.

Beweis:

M, N, P, Q seien die Berührungspunkte der Seiten AB, BC, CD und DA mit dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$, wie in Abbildung 5 dargestellt. Da AM und AQ Tangenten an den Kreis sind, folgt daraus, dass $AM = AQ$ ist. Analog dazu erhalten wir $BM = BN$, $CN = CP$ und $DP = DQ$. Daraus folgt:

$$AB + CD = (AM + BM) + (CP + DP) = AQ + BN + CN + DQ = (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC.$$

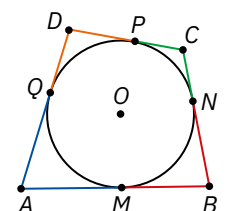


Abbildung 5

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Die Tangenten von einem äußeren Punkt M zu einem Kreis mit Mittelpunkt O bilden einen Winkel von 90° . Wenn $OM = 4\sqrt{2}$ cm, bestimmt den Radius des Kreises.

Lösung:

A und B seien Berührungspunkte. Da $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OBM = \sphericalangle AMB = 90^\circ$ und $OA = OB$ ist, folgt daraus, dass $OAMB$ ein Quadrat ist. Wir erhalten $r = OA = 4$ cm.

2. Die Seiten AB , BC und CA des Dreiecks ABC in Abbildung 6 berühren den Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r in D , E bzw. F . Wenn $AD = 8$ cm, $BE = 6$ cm und $CF = 4$ cm ist, berechnet den Umfang des Dreiecks ABC .

Lösung:

AD und AF sind Tangenten von A an den Kreis, also ist $AF = AD = 8$ cm. Daraus folgt analog, dass $BD = BE = 6$ cm und $CE = CF = 4$ cm. Dies ergibt $AB = 14$ cm, $BC = 10$ cm und $CA = 12$ cm. Der Umfang des Dreiecks ABC beträgt $U_{ABC} = 36$ cm.

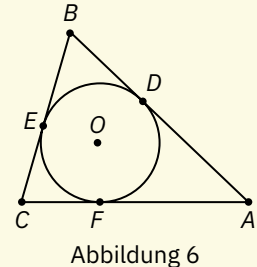


Abbildung 6

Vorgeschlagene Aufgaben

- Konstruiert einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 4 cm. Konstruiert drei Geraden a , b und c so, dass:
 - die Gerade a tangential zum Kreis ist;
 - die Gerade b außerhalb des Kreises liegt;
 - die Gerade c eine Sekante des Kreises ist.
- Zeichnet einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 5 cm. Konstruiert Tangenten von einem äußeren Punkt A an den Kreis.
- Betrachtet $A \in \mathcal{C}(O, 10 \text{ cm})$ und die Gerade MA , die den Kreis berührt. Berechne:
 - die Länge der Strecke MA , wobei $\sphericalangle AMO = 45^\circ$;
 - die Länge der Strecke OM , wobei $\sphericalangle AMO = 30^\circ$.
- Auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, 24 \text{ cm})$ liegt ein Punkt P . Konstruiert eine Tangente an den Kreis durch P , auf der die Punkte A und B so angenommen werden, dass $AP = PB$. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AOB , wenn $AP = 48$ cm.
- Auf der Tangente in M an den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ seien die Punkte A und B symmetrisch in Bezug auf M . Die Strecken OA und OB schneiden den Kreis in C bzw. D . Wenn $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ ist, beweise, dass:
 - $CD \parallel AB$;
 - $DOCM$ ein Rhombus ist.
- Auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, 2 \text{ cm})$ werden die Punkte M und N so gewählt, dass $\widehat{MN} = 240^\circ$ ist. P sei der Schnittpunkt der Tangenten in M und N an den Kreis.
 - Bestimme die Länge der Strecke OP .
 - Beweise, dass das Dreieck MNP gleichseitig ist.
- Seien $A \in \mathcal{C}(O, 4 \text{ cm})$ und zwei Punkte B, C in der Ebene, mit $OB = 3 \text{ cm}$, $OC = 5 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$ und $\sphericalangle AOB = 90^\circ$.
 - Gibt die Lage jeder der Geraden AB , BC und AC in Bezug auf den Kreis an.
 - Bestimme die Länge der Strecke BC . Wie viele Lösungen gibt es?
- Auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ sind die Punkte A, B, C so gewählt, dass $\widehat{AC} = \widehat{CB} = 40^\circ$. Beweise, dass die Tangente in C an den Kreis parallel zur Geraden AB ist.
- Auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ sind die Punkte M, N, P in dieser Reihenfolge so zu betrachten, dass $\widehat{MP} = 84^\circ$ und die Tangente in N an den Kreis parallel zur Geraden MP ist. Bestimme das Maß des Bogens $\widehat{MN}$.
- Die Kreise $\mathcal{C}(O, r)$ und $\mathcal{C}(Q, r')$ schneiden sich in den Punkten A und B . Beweise, dass:
 - $OQ \perp AB$;
 - Wenn OA den Kreis $\mathcal{C}(Q, r')$ berührt, dann berührt OB auch den Kreis $\mathcal{C}(Q, r')$.



11. Sei P ein Punkt außerhalb des Kreises $\mathcal{C}(O, r)$ und die Punkte $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$, so, dass PA und PB den Kreis berühren. Wenn $\angle APB = 60^\circ$ und $PO \cap \mathcal{C}(O, r) = \{S, M\}$, wobei S zwischen M und P liegt, beweist, dass:
- das Dreieck ABM gleichseitig ist;
 - das Dreieck MAP gleichschenkelig ist;
 - das Viereck $OASB$ ein Rhombus ist.
12. Seien D, E, F die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit den Seiten BC, CA und AB . Wenn $\angle EDF = 60^\circ$ und $\angle DEF = 80^\circ$, bestimmt die Winkelmaße des Dreiecks ABC .
13. D, E, F seien die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit den Seiten BC, CA und AB . Wenn $BC = a, CA = b, AB = c$ und $p = \frac{a+b+c}{2}$, beweist, dass $AF = p - a, BD = p - b$ und $CE = p - c$ (die Längen der Strecken werden in der gleichen Maßeinheit ausgedrückt).
14. Auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ sind die Punkte A, B, C so gewählt, dass AB der Durchmesser ist. Die Tangente in C an den Kreis schneidet die Tangenten in A und B an den Kreis in den Punkten D bzw. E . Es sei $AC \cap OD = \{F\}$ und $BC \cap OE = \{G\}$. Beweist, dass:
- $DE = AD + BE$;
 - $\angle DOE = 90^\circ$;
 - $OFCG$ ein Rechteck ist.
15. Ein Zahnriemen wird über zwei kreisförmige Räder gespannt, die sie entlang der Bogen $\widehat{A_1C_1B_1}$ und $\widehat{A_2C_2B_2}$, wie in Abbildung 7 schneiden. Zeigt, dass $\widehat{A_1C_1B_1} + \widehat{A_2C_2B_2} = 360^\circ$.

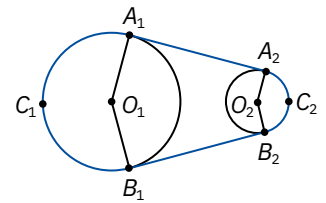


Abbildung 7

Test

- Die Tangenten von einem äußeren Punkt A an einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 8 cm bilden einen Winkel mit dem Maß von 60° . Berechne die Länge der Strecke AO . (3 Pkte.)
- Es seien $A, B, C \in \mathcal{C}(O, r)$ und T ein Punkt außerhalb des Kreises. Wenn $\widehat{ACB} = 144^\circ$ ist und die Geraden AT und BT den Kreis berühren, bestimmt das Maß des Winkels ATB . (3 Pkte.)
- Es sei ein Kreis $\mathcal{C}(O, 2 \text{ cm})$ und die Punkte $A \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, 2 \text{ cm})$ und $B \in \mathcal{C}(O, 2 \text{ cm})$ so, dass AB den Kreis berührt, $BO \cap \mathcal{C}(O, 2 \text{ cm}) = \{B, C\}$ und $AC \cap \mathcal{C}(O, 2 \text{ cm}) = \{C, T\}$. Wenn $OT \parallel AB$, berechne die Länge der Sehne BT . (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

4. Lektion: Regelmäßige Vielecke, die dem Kreis einbeschrieben sind

Schlüsselwörter

regelmäßiges
Vieleckeinem Kreis
einbeschriebenes Vieleck

Umkreis

gleichseitiges
Dreieck

Quadrat

regelmäßiges
Sechseck

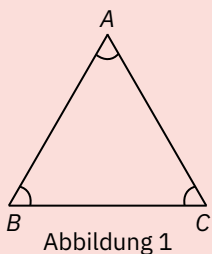
Regelmäßige Vielecke, die dem Kreis einbeschrieben sind

Ein Vieleck ist *einem Kreis einbeschrieben*, wenn die Eckpunkte des Vielecks zum Kreis gehören. In diesem Fall sagen wir, dass der Kreis dem Vieleck *umschrieben* wird.

Merke dir!

Definition. Ein konvexes Vieleck, bei dem alle Seiten kongruent und alle Winkel kongruent sind, heißt *regelmäßiges Vieleck*.

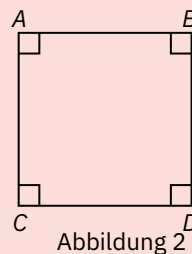
Beispiele: Das gleichseitige Dreieck (Abbildung 1) und das Quadrat (Abbildung 2) sind regelmäßige Vielecke.



$$AB = AC = BC$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$$

Abbildung 1



$$ABCD \text{ Quadrat}$$

$$AB = BC = CD = DA$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$$

Abbildung 2

Lehrsatz. Jedes regelmäßige Vieleck kann einem Kreis einbeschrieben werden.

Unter Verwendung der Tatsache, dass kongruente Bogen kongruenten Sehnen entsprechen, kann Folgendes gezeigt werden:

- Ein Vieleck, bei dem alle Seiten kongruent sind und das einem Kreis einbeschrieben ist, ist ein regelmäßiges Vieleck.
- Ein Vieleck, bei dem alle Winkel kongruent sind und das einem Kreis einbeschrieben ist, ist ein regelmäßiges Vieleck.

Bemerkungen

- Das Maß eines jeden Winkels eines regelmäßigen Vielecks mit n Seiten ($n \geq 3$) ist gleich $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.
- Die n kongruenten Seiten eines regelmäßigen Vielecks $A_1A_2 \dots A_n$ unterteilen den Kreis in n kongruente Bogen.

Jeder von diesen Bogen (und jeder der entsprechenden Mittelpunktswinkel) messen $\frac{360^\circ}{n}$:

$$\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \dots = \widehat{A_{n-1}A_n} = \widehat{A_nA_1} = \frac{360^\circ}{n}; \quad \sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \dots = \sphericalangle A_{n-1}OA_n = \sphericalangle A_nOA_1 = \frac{360^\circ}{n}.$$

Wusstet ihr das?

Je nach Anzahl der Seiten werden die folgenden Namen für Vielecke verwendet:

<i>Pentagon</i> (Fünfeck, 5 Seiten)	<i>Heptagon</i> (Siebeneck, 7 Seiten)	<i>Nonagon</i> (Neuneck, 9 Seiten)	<i>Dodekagon</i> (Zwölfeck, 12 Seiten)
<i>Hexagon</i> (Sechseck, 6 Seiten)	<i>Oktagon</i> (Achteck, 8 Seiten)	<i>Dekagon</i> (Zehneck, 10 Seiten)	<i>Ikosagon</i> (Zwanzigeck, 20 Seiten)

Benutzt eine Internetsuchmaschine, um die Namen anderer Vielecke zu finden.

Verwendung geometrischer Instrumente zur Konstruktion regelmäßiger Vielecke

Wenn $n \geq 3$ ein Teiler von 360 ist, ist eine einfache Methode zur Konstruktion eines regelmäßigen n -seitigen Vielecks, das einem Kreis einbeschrieben ist, folgende:

- einen Kreis und einen Radius des Kreises zeichnen;
- mithilfe des Winkelmessers konstruieren wir benachbarte Mittelpunktswinkel mit dem Maß $(360 : n)^\circ$. Verbindet man die Punkte, erhält man ein regelmäßiges Vieleck.





Beispiel

Um ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ (Abbildung 3) zu konstruieren, wählen wir einen Punkt A auf dem Kreis und konstruieren die Mittelpunktswinkel $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE, \angle EOA$, mit $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = 360^\circ : 5 = 72^\circ$. Darüber hinaus haben wir: $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA} = 72^\circ$ und $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 108^\circ$.

Für die Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks, des Quadrats bzw. des Sechsecks gibt es spezielle, schnellere und raffiniertere Methoden, die nur ein Lineal und einen Zirkel verwenden.

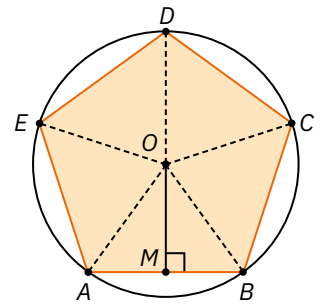


Abbildung 3

1. Konstruktion eines einem $\mathcal{C}(O, r)$ einbeschriebenen Quadrats $ABCD$

- Wählt den Punkt A auf dem Kreis und konstruiert den Durchmesser AC .
- Konstruiert den Durchmesser BD senkrecht zu AC .
- Verbindet die Punkte A, B, C, D . Das resultierende Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat (Abbildung 4).

2. Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$, das einem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ einbeschrieben ist

- Wählt den Punkt A auf dem Kreis und konstruiert den Punkt D , der A diametral gegenüberliegt.
- Nimmt den Radius des Kreises in die Öffnung des Zirkels. Mit der Zirkelspitze in A zeichnet zwei Kreisbögen, die den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ in den Punkten B und F schneiden, und mit der Zirkelspitze in D zeichnet zwei Kreisbögen, die den Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ in den Punkten C und E schneiden.
- Verbindet die Punkte A, B, C, D, E, F . Das Vieleck $ABCDEF$ ist ein regelmäßiges Sechseck (Abbildung 5).

3. Konstruktion eines einem Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks PQR

- Wählt den Punkt P auf dem Kreis und konstruiert den Punkt S , der P diametral gegenüberliegt.
- Mit der Zirkelspitze in S und der Zirkelöffnung gleich dem Radius des Kreises konstruiert zwei Kreisbögen, die den ursprünglichen Kreis in den Punkten Q und R schneiden.
- Verbindet die Punkte P, Q und R und erhält das gleichseitige Dreieck PQR (Abbildung 6).

Alternativ dazu können wir mithilfe der Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks feststellen, dass die Dreiecke ACE und BDF gleichseitig sind (Abbildung 7).

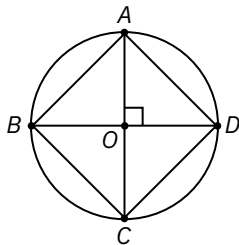


Abbildung 4

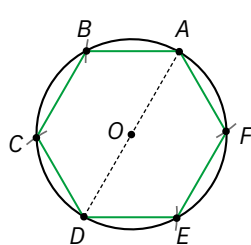


Abbildung 5

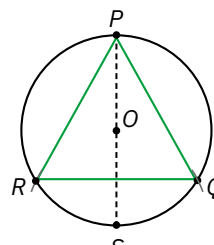


Abbildung 6

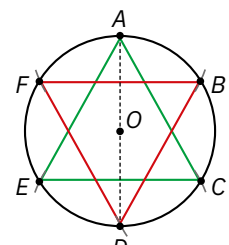


Abbildung 7



Portfolio

Ergänzt eure Arbeitsblätter zur **Kreisgeometrie** mit den folgenden Eigenschaften und ihren Beweisen für den besonderen Fall des Fünfecks bzw. des regelmäßigen Sechsecks.

- Die Mittelpunkte der Seiten eines regelmäßigen Vielecks liegen gleichzeitig in der Mitte des Kreises, der das Vieleck umschreibt.
- Die Winkelhalbierenden eines regelmäßigen Vielecks fallen im Mittelpunkt des Kreises zusammen, der das Vieleck umschreibt.

Vorgeschlagene Aufgaben

- Konstruiert mit geometrischen Instrumenten ein regelmäßiges Vieleck mit:
 - 6 Seiten;
 - 8 Seiten;
 - 9 Seiten;
 - 10 Seiten;
 - 12 Seiten.
- Bestimmt das Maß eines Winkels eines regelmäßigen Vielecks mit:
 - 9 Seiten;
 - 10 Seiten;
 - 12 Seiten;
 - 15 Seiten;
 - 20 de Seiten.

3. Bestimmt das Maß eines Bogens, dessen Eckpunkte aufeinanderfolgende Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks mit ... sind.
- a. 9 Seiten; b. 12 Seiten; c. 18 Seiten; d. 24 Seiten; e. 30 Seiten.
4. Bestimmt die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Vielecks in jedem der folgenden Fälle:
- a. das Maß eines Vieleckwinkels ist gleich 170° ;
- b. das Maß eines Außenwinkels des Vielecks ist gleich 20° ;
- c. der kleine Bogen, der durch zwei aufeinanderfolgende Scheitelpunkte des Vielecks bestimmt wird, beträgt $7^\circ 30'$;
- d. der große Bogen, der durch zwei aufeinanderfolgende Scheitelpunkte des Vielecks bestimmt wird, beträgt 351° .
5. Verbindet den Scheitelpunkt A mit allen anderen Scheitelpunkten des regelmäßigen Vielecks $ABCDEFGHI$. Bestimmt die Maße der 7 benachbarten Winkel mit dem Scheitelpunkt A .
6. Die Geraden AB und CD schneiden sich im Punkt P . Berechne das Maß des Winkels BPC , wenn ihr wisst, dass A, B, C, D aufeinanderfolgende Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks mit ... sind:
- a. 5 Seiten; b. 8 Seiten; c. 10 Seiten.
7. Man betrachte ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$, das einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 6 cm eingeschrieben ist.
- a. Berechne den Umfang des Sechsecks $ABCDEF$.
- b. Zeige, dass das Viereck $BCEF$ ein Rechteck ist.
- c. Berechne die Maße der Winkel ACD , ACE und ACF .
8. Betrachte die gleichseitigen Dreiecke ABC und MPQ , die einem Kreis mit Mittelpunkt O eingeschrieben sind, sodass $\widehat{AM} = 60^\circ$, der Punkt M auf dem kleinen Bogen $\widehat{AC}$ und der Punkt P auf dem kleinen Bogen $\widehat{AB}$ liegt. Beweise, dass das Vieleck $MAPBQC$ ein regelmäßiges Sechseck ist.
9. Die Quadrate $ABCD$ und $MNPQ$ seien einem Kreis mit Mittelpunkt O so eingeschrieben, dass $\widehat{AM} = 45^\circ$, der Punkt M auf dem kleinen Bogen $\widehat{AD}$, und der Punkt N auf dem kleinen Bogen $\widehat{AB}$ liegt. Beweise, dass das Vieleck $MANBPCPCQD$ ein regelmäßiges Achteck ist.
10. Auf den Seiten des gleichseitigen Dreiecks ABC liegen die Punkte $M, N \in BC$, $P, Q \in CA$ bzw. $R, S \in AB$, sodass $BM = MN = NC$, $CP = PQ = QA$ und $AR = RS = SB$. Zeige, dass $MNPQRS$ ein regelmäßiges Sechseck ist.
11. Konstruiere gleichseitige Dreiecke außerhalb eines regelmäßigen Sechsecks auf dessen Seiten. Beweise, dass die Eckpunkte der gleichseitigen Dreiecke, die nicht auch Eckpunkte des Sechsecks sind, ein regelmäßiges Sechseck bilden.



Test

1. Betrachte ein Quadrat $ABCD$, das einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius R eingeschrieben ist. Konstruiere ein regelmäßiges Achteck, wobei vier der Eckpunkte die Eckpunkte des Quadrats $ABCD$ sind. (3 Pkte.)
2. Der Umfang eines Quadrats ist gleich dem Umfang eines regelmäßigen Sechsecks, das einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 6 cm eingeschrieben ist. Bestimme die Seitenlänge des Quadrats. (3 Pkte.)
3. Konstruiere anhand der Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks ein regelmäßiges Vieleck mit 12 Seiten. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.



5. Lektion: Länge des Kreises und Flächeninhalt des Diskus

Schlüsselwörter

Länge des Kreises

Flächeninhalt des Diskus

Länge des Bogens

Flächeninhalt des Kreissektors

Länge des Kreises. Länge des Bogens



Untersuchung

Länge des Kreises. Teilt die Klasse in fünf Gruppen ein. Jede Gruppe erhält ein Flipchartpapier, einen Marker, einen Zirkel und ein Knäuel Schnur.

Arbeitsaufgaben:

- Die Schüler zeichnen auf Flipchartpapier einen Kreis mit einem Radius von 6 cm (erste Gruppe), 8 cm (zweite Gruppe), 10 cm (dritte Gruppe), 12 cm (vierte Gruppe) bzw. 15 cm (fünfte Gruppe).
- Jeder Schüler in der Gruppe schätzt die Länge des Kreises wie folgt: Er befestigt ein Ende der Schnur an einem Punkt des Kreises (von Schüler zu Schüler unterschiedlich), wickelt die Schnur um den Umfang des Kreises ab, bis er den gewählten Punkt wieder erreicht, und schneidet das Ende der Schnur an dem gewählten Punkt ab. Er notiert dann die Länge l der verwendeten Schnur und berechnet mit drei Dezimalstellen das Verhältnis zwischen der erhaltenen Länge l und dem Durchmesser d des Kreises. Tragt die erhaltenen Daten in eine Tabelle der Form ein:



Gruppe	Name der Schülerin/ des Schülers	Durchmesser des Kreises (d)	Länge der Schnur (l)	Das Verhältnis d/l
Nr. 2	Andrei	$2 \cdot 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$	50,3 cm	3,143

- Jede Gruppe errechnet das arithmetische Mittel der ermittelten Verhältnisse.
- Vergleicht die Ergebnisse der einzelnen Gruppen und prüft, ob sie zwischen 3,13 und 3,15 liegen.

Merke dir!

Der Wert des Verhältnisses zwischen der Länge eines beliebigen Kreises und der Länge seines Durchmessers ist konstant (er hängt nicht vom Radius des Kreises ab).

Diese Konstante wird mit π bezeichnet (der Buchstabe π im griechischen Alphabet entspricht dem Buchstaben p im lateinischen Alphabet) und wird pi gelesen. Die Zahl π ist irrational: $\pi = 3,14159265358979 \dots$

In der Praxis verwenden wir die Annäherung auf zwei exakte Dezimalstellen $\pi \approx 3,14$ und die Rahmung $3,14 < \pi < 3,15$.

Die Länge eines Kreises mit dem Radius R ergibt sich aus der Formel: $L_{\text{Kreis}} = 2\pi R$.

Die Länge eines Bogens ist direkt proportional zum Maß des Bogens. Da die Länge des Kreises der Länge eines Bogens von 360° entspricht, gilt die Beziehung $\frac{L_{\widehat{AB}}}{\widehat{AB}} = \frac{2\pi R}{360^\circ}$, also $L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \widehat{AB}$.

Die Länge eines Halbkreises mit dem Radius R ist gleich πR .

Wenn $\angle AOB$ ein Mittelpunktswinkel mit dem Maß x° ist (Abbildung 1), dann:

- die Länge des kleinen Bogens $\widehat{AB}$ ist gleich $\frac{\pi R}{180} \cdot x$;
- die Länge des großen Bogens $\widehat{AB}$ ist gleich $\frac{\pi R}{180} \cdot (360 - x)$.

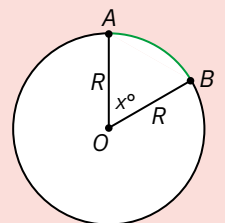


Abbildung 1

Beispiele

- Ein Kreis mit dem Radius 7 cm hat die Länge $L = 2\pi R = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$ cm.
- Wenn ein Kreis die Länge $L = 36\pi$ cm hat, dann ist sein Radius $R = \frac{L}{2\pi} = \frac{36\pi}{2\pi} = 18$ cm.
- Wenn AOB ein Mittelpunktswinkel von 60° in einem Kreis mit dem Radius $R = 9$ cm ist, ist die Länge des kleinen Bogens $\widehat{AB}$ gleich $\frac{\pi R}{180} \cdot 60 = 3\pi$ cm, und die des großen Bogens $\widehat{AB}$ ist $\frac{\pi R}{180} \cdot (360 - 60) = 15\pi$ cm.

Flächeninhalt des Diskus (Kreisscheibe). Flächeninhalt des Kreissektors

Merke dir!

Erinnert euch, dass ein Diskus die Menge der Punkte eines Kreises ist, die mit der Menge der Punkte innerhalb des Kreises verbunden ist: $\mathcal{D}(O, R) = \mathcal{C}(O, R) \cup \text{Int}(\mathcal{C}(O, R))$ (Abbildung 2).

Die Fläche eines Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R berechnet man nach der Formel $Fl_{\text{Diskus}} = \pi R^2$.

Ein Teil innerhalb eines Kreises, der durch zwei Radien des Kreises begrenzt ist, wird als *Kreissektor* (oder *Kreisausschnitt*) bezeichnet.

Die Fläche eines Kreissektors ist direkt proportional zu der Länge des Kreisbogens, der dem Sektor entspricht. Da der Diskus einem Bogen von 360° entspricht, gilt für den Sektor des Kreises, der dem Bogen $\widehat{AB}$ entspricht

$$\frac{Fl_{\text{Sektor}}}{\widehat{AB}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}, \text{ also } Fl_{\text{Sektor}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \widehat{AB}.$$

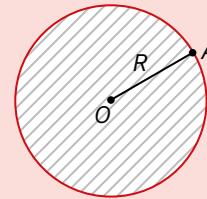


Abbildung 2

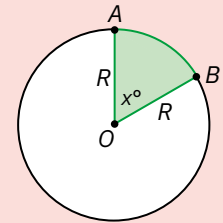


Abbildung 3

Portfolio

Identifiziert in eurem Alltag Gegenstände, die die Form eines Kreises haben (CD, DVD, Pizza, Glasdeckel usw.). Berechnet die Flächen ihrer Oberflächen.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. In Abbildung 4 sind BA und BC Tangenten an einen Kreis mit Mittelpunkt O , Radius 4 cm und $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

- Beweist, dass das Viereck $ABCO$ ein Quadrat ist.
- Berechnet die Länge des Kreises und die Fläche des Diskus mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA .
- Bestimmt die Länge des kleinen Bogens $\widehat{AC}$.
- Bestimmt den Flächeninhalt S der Fläche innerhalb des Vierecks $ABCO$, aber außerhalb des Kreises mit Mittelpunkt O und Radius 4 cm.

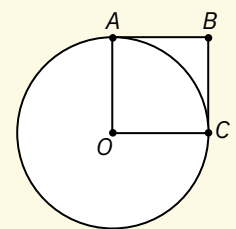


Abbildung 4

Lösung:

- a. BA und BC sind Tangenten vom Punkt B an den Kreis, also $BA = BC$, $BA \perp OA$ und $BC \perp OC$. Da $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ ist, folgt daraus, dass $ABCO$ ein Rechteck mit zwei aufeinanderfolgenden kongruenten Seiten ist, es ist also ein Quadrat.

b. $L_{\text{Kreis}} = 2\pi \cdot R = 8\pi \text{ cm}$, $Fl_{\text{Diskus}} = \pi R^2 = 16\pi \text{ cm}^2$.

c. $\widehat{AC} = \sphericalangle AOC = 90^\circ$, also $L_{\widehat{AC}} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \widehat{AC} = \frac{\pi \cdot 4}{180^\circ} \cdot 90^\circ = 2\pi \text{ cm}$.

d. $S = Fl_{ABCO} - Fl_{\text{Sektor}} = 16 - \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \widehat{AC} = 16 - 4\pi = 4(4 - \pi) \text{ cm}^2$.

2. Das Quadrat $ABCD$ in Abbildung 5 ist einem Kreis mit dem Radius 4 cm einbeschrieben. Bestimmt den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

Lösung: $AC = 2 \cdot AO = 8 \text{ cm} \Rightarrow Fl_{ABCD} = \frac{AC^2}{2} = 32 \text{ cm}^2$.

Die Fläche des Diskus ist gleich $\pi R^2 = 16\pi \text{ cm}^2$.

$Fl_{\text{schraffiert}} = Fl_{\text{Diskus}} - Fl_{ABCD} = 16\pi - 32 \text{ cm}^2 = 16(\pi - 2) \text{ cm}^2$.

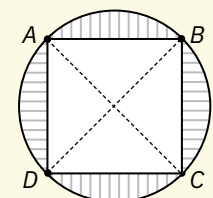


Abbildung 5

3. Auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $R = 6 \text{ cm}$ werden die Punkte A , B und C wie in Abbildung 6, in dieser Reihenfolge betrachtet, sodass $\sphericalangle AOB = 120^\circ$ und $\widehat{BC} = 90^\circ$ ist. Berechnet die Fläche Fl_1 des Kreissektors, der dem kleinen Bogen $\widehat{AB}$ entspricht, und die Fläche Fl_2 des Kreissektors, der dem kleinen Bogen $\widehat{AC}$ entspricht.

Lösung: $\sphericalangle AOB = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120^\circ \Rightarrow Fl_1 = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \widehat{AB} = \frac{36\pi}{360^\circ} \cdot 120^\circ = 12\pi \text{ cm}^2$.

$\widehat{AC} = 360^\circ - \widehat{AB} - \widehat{BC} = 150^\circ$, also $Fl_2 = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \widehat{AC} = \frac{36\pi}{360^\circ} \cdot 150^\circ = 15\pi \text{ cm}^2$.

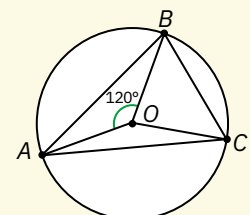


Abbildung 6



Vorgeschlagene Aufgaben



- Bestimmt die Länge eines Kreises mit dem Radius gleich:
 - 12 cm;
 - 3,5 cm;
 - $\frac{17}{2}$ cm.
- Bestimmt den Radius eines Kreises der Länge gleich:
 - 14 π cm;
 - 72 π cm;
 - $\frac{11\pi}{3}$ cm.
- Man betrachte die Punkte A und B auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R . Bestimmt die Länge des kleinen Bogens $\widehat{AB}$ und den Flächeninhalt des entsprechenden Kreissektors, wenn ihr wisst, dass:
 - $R = 2$ cm und $\sphericalangle AOB = 60^\circ$;
 - $R = 6$ cm und $\sphericalangle AOB = 45^\circ$;
 - $R = 7$ cm und $\sphericalangle AOB = 120^\circ$;
 - $R = 11$ cm und $\sphericalangle AOB = 90^\circ$.
- Bestimmt die Maße der Bogen eines Kreises mit Mittelpunkt O und Radius 10 cm, die die Längen haben:
 - 5 π cm;
 - 7 π cm;
 - $\frac{5\pi}{9}$ cm.
- In Abbildung 7 haben die beiden konzentrischen Kreise einen Radius von 8 cm und 6 cm. Berechnet den Flächeninhalt des schraffierten Teils.
- Bestimmt die Länge des Durchmessers eines Kreises, wenn ihr wisst, dass die Fläche des durch den Kreis begrenzten Diskus $196\pi \text{ cm}^2$ beträgt.
- Die Länge eines Kreises mit dem Radius $2R$ ist gleich 12π cm. Berechnet den Flächeninhalt des Diskus mit dem Radius $3R$.
- Am Rande eines diskusförmigen Grundstücks mit einem Radius von 5 m sind 8 Bäume in gleichem Abstand voneinander gepflanzt. Zeigt, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Bäumen mehr als 3,9 m, aber weniger als 4 m beträgt, wenn man am Rande des Feldes entlanggeht.
Hinweis. Berechnet die Länge des Kreises, der das Feld begrenzt, und verwendet die Beziehung $3,14 < \pi < 3,15$.
- Abbildung 8 zeigt zwei Disken. Die Punkte A und P liegen sich im Kreis C_1 mit Mittelpunkt O diametral gegenüber, und AB ist der Durchmesser des Kreises C_2 mit Mittelpunkt P . Berechnet:
 - das Verhältnis zwischen der Länge des Kreises C_2 und der Länge des Kreises C_1 ;
 - das Verhältnis zwischen dem Flächeninhalt des großen Diskus und dem Flächeninhalt des kleinen Diskus.
- Raisa hat drei Kreise gezeichnet, wie in Abbildung 9. Die Punkte A , O und B sind kollinear und $AB = 8$ cm. Anhand von Raisas Modell hat Sara die Zeichnung auf zwei Arten gefärbt, wie in Abbildung 10 bzw. Abbildung 11.

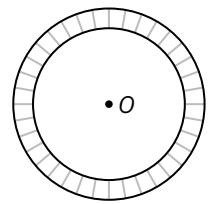


Abbildung 7

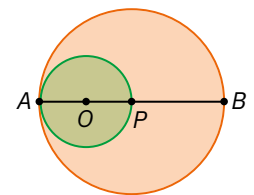


Abbildung 8

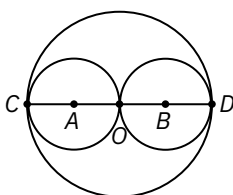


Abbildung 9

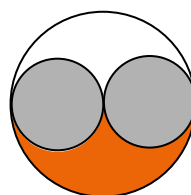


Abbildung 10

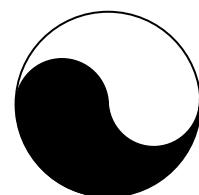


Abbildung 11

- Berechnet den Umfang U_1 und den Flächeninhalt Fl_1 der weißen Fläche in Abbildung 10.
 - Berechnet den Umfang U_2 und den Flächeninhalt Fl_2 der weißen Fläche in Abbildung 11
- Betrachtet ein Quadrat $ABCD$ mit der Seite $AB = 10$ cm. Im Inneren des Quadrats konstruiert man Kreissektoren mit den Mittelpunkten A und C , deren Radius gleich der Seite des Quadrats ist, wie in Abbildung 12. Bestimmt den Flächeninhalt des Schnittes der beiden Sektoren (Flächeninhalt der schraffierten Fläche).
 - Betrachtet ein Quadrat $ABCD$ mit der Seite $AB = 8$ cm. Im Inneren des Quadrats werden Halbkreise mit den Durchmessern AD und BC konstruiert, wie in Abbildung 13 dargestellt. Bestimmt den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

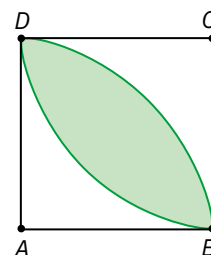


Abbildung 12

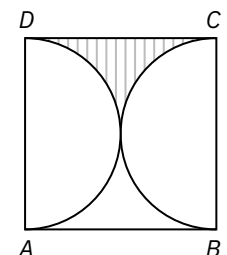


Abbildung 13

13. Betrachtet ein Quadrat $ABCD$ mit der Seite $AB = 6$ cm. Konstruiert im Inneren des Quadrats Halbkreise mit den Durchmessern AB , BC , CD und DA , wie in Abbildung 14 dargestellt. Bestimmt den Flächeninhalt der farbigen Fläche.
14. Ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ ist einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R einbeschrieben. Wenn $AB = 6$ cm ist, berechnet die Länge des Kreises, den Flächeninhalt des Diskus, die Länge des Bogens $\widehat{ABC}$ und den Flächeninhalt des Kreissektors, der dem Bogen $\widehat{DEF}$ entspricht.
15. In der Pizzeria *Bon Appetit* gibt es jede Pizza in drei Größen: klein, mittel und groß. Welche Pizza sollte Tudor angesichts der angezeigten Preise kaufen, um zufrieden zu sein, dass er so wenig wie möglich für die Pizza bezahlt hat bezüglich der „Oberfläche“ der gekauften Pizza?

<i>Bon Appetit</i>		
Pizza-Tipp	Durchmesser	Preis
Klein	24 cm	28 Lei
Mittel	32 cm	40 Lei
Groß	40 cm	64 Lei

16. Auf dem Reifen des rechten Vorderrades des Autos seines Vaters markiert Andrei Punkt A, der dem Punkt, an dem der Reifen den Boden berührt, diametral gegenüberliegt. Der Reifendurchmesser beträgt 63,2 cm.
- a. Gebt den Wahrheitswert der Aussage „Die Strecke, die das Auto zurücklegt, bis der Punkt A den Boden 1000 Mal berührt, beträgt mindestens 2 km.“ an.
- b. Zeigt, dass der Punkt A nach einer 100 km langen Reise den Boden mehr als 50 000 Mal berührt (nutzt die Tatsache, dass $3,14 < \pi < 3,15$).

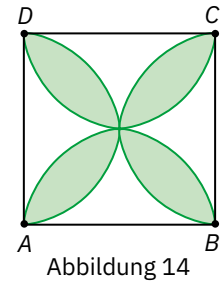


Abbildung 14



Selbstbewertung

1. In einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 4 cm wird ein Seil AB mit der Länge 4 cm angenommen. Berechnet die Länge des Kreises, die Fläche des Diskus und die Länge des großen Bogens $\widehat{AB}$. (3 Pkte.)
2. In einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R wird der Durchmesser AB betrachtet. Wissend, dass $AB = 12$ cm, der Punkt C auf dem Kreis liegt und $\widehat{AC} = 120^\circ$ ist, bestimmt den Flächeninhalt des Kreissektors, der dem kleinen Bogen $\widehat{BC}$ entspricht. (3 Pkte.)
3. Ein Grundstück hat die Form eines Quadrats $ABCD$ mit der Seite $AB = 30$ m. Im kreisförmigen Sektor mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AB pflanzt der Eigentümer des Grundstücks Blumen an, und in der schraffierten Fläche pflanzt er Gras (Abbildung 15). Berechnet den Flächeninhalt des mit Gras bepflanzten Teils. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

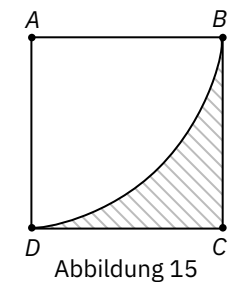


Abbildung 15



Wiederholung und Bewertung

Sehnen und Bogen im Kreis. Eigenschaften • Umfangswinkel im Kreis • Tangenten an den Kreis • Dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Vielecke • Länge des Kreises und Flächeninhalt des Diskus

Schreibt für die Aufgaben 1–2 den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, in eure Hefte. Für die Aufgaben 23–30 schreibt die vollständigen Lösungen.

1. Betrachtet die kongruenten Bogen $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ im Kreis $\mathcal{C}(O, r)$. Wenn $AB = 8$ cm ist, dann hat CD die Länge von:
 - a. 16 cm; b. 8 cm; c. 6 cm; d. 4 cm.
2. Der Durchmesser senkrecht zu einer Sehne AB schneidet die Sehne im Punkt P . Wenn $AB = 20$ cm, dann ist die Länge der Strecke PB :
 - a. 10 cm; b. 20 cm; c. 30 cm; d. 40 cm.
3. Die Strecke AB ist der Durchmesser des Kreises mit dem Mittelpunkt O und Radius 6,4 cm. Die Länge der Strecke AB ist:
 - a. 64 cm; b. 3,2 cm; c. 12,8 cm; d. 32 cm.
4. Die Länge eines Kreises mit einem Radius von 4,5 cm ist gleich:
 - a. $4,5\pi$ cm²; b. 18π cm²;
 - c. $2,25\pi$ cm²; d. 9π cm.
5. Die Fläche des Sektors mit einem Radius von 3 cm ist kleiner als:
 - a. 26 cm²; b. 27 cm²; c. 29 cm²; d. 28 cm².
6. Die Länge eines Bogens von 60° in einem Kreis mit dem Radius 3 cm ist gleich:
 - a. 6 cm; b. π cm; c. 6π cm; d. 3π cm.
7. In $\mathcal{C}(O, r)$ ist das Maß eines Umfangswinkels ABC gleich 40° . Das Maß des Winkels AOC ist gleich:
 - a. 80° ; b. 20° ; c. 60° ; d. 120° .
8. Wenn BA eine Tangente vom äußeren Punkt B an einen Kreis mit Mittelpunkt O ist, dann ist das Maß des Winkels BAO gleich:
 - a. 90° ; b. 45° ; c. 180° ; d. 60° .
9. Der Umfang eines regelmäßigen Sechsecks, das einem Kreis mit Radius 6 cm einbeschrieben ist, beträgt:
 - a. 72 cm; b. 36 cm; c. 108 cm; d. 24 cm.
10. Die Fläche eines Quadrats, das einem Kreis mit dem Radius von 12 cm einbeschrieben ist, beträgt:
 - a. 288 cm²; b. 144 cm²; c. 72 cm²; d. 36 cm².
11. Das Maß eines Winkels in einem regelmäßigen Vieleck mit 18 Seiten ist:
 - a. 18° ; b. 144° ; c. 160° ; d. 180° .
12. Einer der Winkel eines regelmäßigen Vielecks ist 144° . Die Anzahl der Seiten des regelmäßigen Vielecks ist gleich:
 - a. 18; b. 14; c. 12; d. 10.
13. Der Durchmesser eines Kreises der Länge 32π cm ist gleich:
 - a. 256 cm; b. 16 cm; c. 32 cm; d. 64 cm.
14. Der Durchmesser des Kreises mit dem Flächeninhalt 81π cm² ist gleich:
 - a. 18 cm; b. 9 cm; c. 162 cm; d. 81 cm.
15. Auf einem Kreis mit Mittelpunkt O sind die Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge zu betrachten. Wenn das Maß des Winkels BAC 30° ist, dann ist das Maß des Winkels BDC gleich:
 - a. 30° ; b. 60° ; c. 90° ; d. 15° .
16. Das Quadrat $ABCD$ ist einem Kreis einbeschrieben. Wenn Punkt T der Mittelpunkt des kleinen Bogens $\widehat{CD}$ ist, dann ist das Winkelmaß von ATB gleich:
 - a. 90° ; b. 45° ; c. 30° ; d. 60° .
17. In einem Kreis mit dem Mittelpunkt O sind zwei Sehnen, AB und CD , gleich weit vom Mittelpunkt des Kreises entfernt. Wenn $AB = 22$ cm ist, dann ist die Länge der Strecke CD gleich:
 - a. 22 cm; b. 11 cm; c. 9 cm; d. 7 cm.
18. Im Trapez $ABCD$, das einem Kreis mit Mittelpunkt O und Radius R einbeschrieben ist, ist $AB \parallel CD$, $BC = 13$ cm. Die Länge der Seite AD ist gleich:
 - a. 26 cm; b. 13 cm; c. 11 cm; d. 6,5 cm.
19. Die Tangenten AB und AC vom äußeren Punkt A zum Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ stehen senkrecht aufeinander. Das Maß des Winkels BOC ist gleich:
 - a. 90° ; b. 45° ; c. 30° ; d. 180° .
20. Betrachtet die Tangenten AB und AC vom äußeren Punkt A zum Kreis $\mathcal{C}(O, r)$. Wenn $AB = 9$ cm, dann ist die Länge der Strecke AC gleich:
 - a. 4,5 cm; b. 9 cm; c. 13,5 cm; d. 18 cm.
21. Man betrachte die Punkte A, B und C auf einem Kreis in dieser Reihenfolge, sodass $\widehat{AB} = 150^\circ$ und $\widehat{BAC} = 50^\circ$. Das Maß des kleinen Bogens $\widehat{AC}$ ist gleich:
 - a. 110° ; b. 55° ; c. 100° ; d. 160° .



22. Das gleichseitige Dreieck ABC ist dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ einbeschrieben. Das Maß des Bogens $\widehat{ABC}$ ist gleich:

- a. 240° ; b. 120° ; c. 90° ; d. 60° .

23. Welche der folgenden Aussagen ist richtig und welche ist falsch?

- a. „Bei jedem regelmäßigen Vieleck mit mehr als drei Seiten sind alle Diagonalen kongruent.“
 b. „Die Länge eines Kreises ist kleiner als die Länge eines Kreisdurchmessers.“
 c. „Wenn AB ein Durchmesser in $\mathcal{C}(O, r)$ ist, dann sind die Punkte A, O, B kollinear.“
 d. „Wenn das gleichseitige Dreieck ABC einem Kreis einbeschrieben ist, dann ist das Maß des kleinen Bogens $\widehat{AC}$ gleich 60° .“

24. Ordnet jedem Vieleckstyp in Spalte **A** den Wert in Spalte **B** zu, der dem Maß eines Winkels des betreffenden Vielecks entspricht.

A	B
a. Regelmäßiges Vieleck mit 20 Seiten	1. 176°
b. Regelmäßiges Vieleck mit 30 Seiten	2. 168°
c. Regelmäßiges Vieleck mit 90 Seiten	3. 192°
	4. 162°

25. Bestimmt die natürlichen Zahlen a, b, c und d in der folgenden Tabelle:

Kreisradius	Länge des Kreises
5	a
b	38π
c	$2\pi c^2$
$2d$	πd^2

26. Betrachtet auf einem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ die Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge. Bestimmt die Zahlen a, b, c und d , für die die folgenden Aussagen wahr sind.

Wenn $\widehat{BC} = 30^\circ$, dann ist $\sphericalangle BOC = a^\circ$.

Wenn $\widehat{ABC} = 130^\circ$, dann ist $\sphericalangle ADC = b^\circ$.

Wenn $\sphericalangle DCB = 110^\circ$, dann ist $\widehat{BAD} = c^\circ$.

Wenn $\sphericalangle AOD = 80^\circ$, dann ist $\sphericalangle ABD = d^\circ$.

27. Ein Auto legt eine solche Strecke zurück, dass eines seiner Räder mit einem Durchmesser von 40 cm 8000 vollständige Umdrehungen macht. Zeigt, dass die vom Auto zurückgelegte Strecke größer als 10 km ist.

28. Betrachtet die Tangenten AB und AC aus A an $\mathcal{C}(O, r)$. Der Strahl CO schneidet den Kreis im Punkt P . Wenn $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, dann bestimmt das Maß des Winkels OPB .

29. Betrachten wir ein Dreieck ABC , dessen Eckpunkte auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ liegen, wobei AD, BE und CF senkrecht auf die Geraden BC, AC bzw. AB stehen, mit $D, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$. Wir wissen, dass $\sphericalangle A = 40^\circ$ und $\sphericalangle B = 66^\circ$.

a. Bestimmt die Maße der Winkel BAD und CAD .

b. Bestimmt die Bogenmaße $\widehat{BD}, \widehat{DC}, \widehat{AF}$ und $\widehat{FB}$.

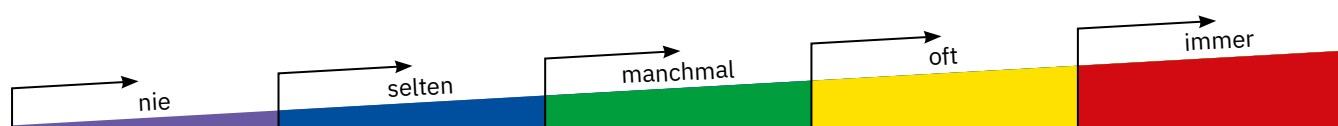
30. Betrachtet die Punkte A, B und C auf dem Kreis $\mathcal{C}(O, r)$ in dieser Reihenfolge, sodass $\widehat{AB} = 2 \cdot \widehat{BC}$ und $\widehat{AC} = \frac{3}{2} \cdot \widehat{AB}$.

a. Bestimmt die Bogenmaße $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ und $\widehat{BC}$.

b. Zeigt, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Systematischer Beobachtungsbogen

- Ich war sehr daran interessiert, Neues über Lösungsmethoden von Aufgaben zu lernen.
 ► Meine Teilnahme am Matheunterricht wurde von meinen Mitschülern und der Lehrkraft geschätzt.



E6

Ähnlichkeit der Dreiecke

1. Lektion

Proportionale Strecken. Lehrsatz der äquidistanten (abstandsgleichen) Parallelen

2. Lektion

Lehrsatz des Thales

3. Lektion

Ähnliche Dreiecke. Hauptsatz der Ähnlichkeit

4. Lektion

Ähnlichkeitskriterien der Dreiecke.
Schätzen von Entfernungen im Alltag mithilfe der Ähnlichkeit

Wiederholung und Bewertung



Das Konzept der ähnlichen Dreiecke ist im Alltag sehr nützlich. Wir können die Höhe eines Gebäudes oder eines Turms bestimmen, indem wir zunächst die Länge des Schattens dieses Objekts messen und dann ähnliche Dreiecke verwenden.

Mithilfe der ähnlichen Dreiecke können wir auch die Höhe eines Baumes bestimmen, ohne auf die Spitze zu klettern und die Entfernung bis zum Boden mit einem Maßband zu messen.

1. Lektion: Proportionale Strecken. Lehrsatz der äquidistanten (abstandsgleichen) Parallelen

Schlüsselwörter

Verhältnis

Verhältnissgleichung

Proportionalitätsfaktor

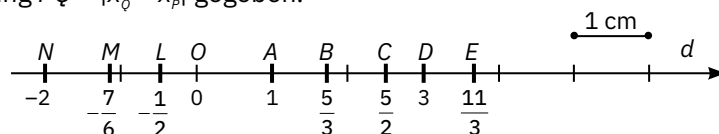
äquidistante Parallelen

Verhältnis zweier Strecken

Problemstellung

Auf der unten dargestellten Zahlenachse d ist die Maßeinheit 1 cm. Man betrachte die Punkte $O, A, B, C, D, E, L, M, N$ auf der Achse, deren Abszissen in der Abbildung dargestellt sind.

Wenn x_p und x_q die Abszissen zweier beliebiger Punkte P und Q auf der Achse sind, dann ist die Länge der Strecke PQ durch die Beziehung $PQ = |x_q - x_p|$ gegeben.



Die Strecke OA ist 1 cm lang und die Länge von ON beträgt 2 cm. Mit anderen Worten: ON ist doppelt so lang wie OA , d. h., $ON = 2OA$. Wir können auch schreiben $\frac{ON}{OA} = 2$ oder $\frac{OA}{ON} = \frac{1}{2}$. Wir haben $CD = \left|3 - \frac{5}{2}\right| \text{ cm} = \frac{1}{2} \text{ cm} = 0,5 \text{ cm}$ und

$$BE = \left|\frac{11}{3} - \frac{5}{3}\right| \text{ cm} = 2 \text{ cm}.$$

Da $\frac{2}{0,5} = 4$ ist, folgt daraus, dass die Strecke BE viermal so groß ist wie CD . Kurz gesagt, $\frac{BE}{CD} = \frac{2 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = \frac{2}{0,5} = 4$.

Um auf der Achse einen Punkt F darzustellen, der sich von den vorherigen unterscheidet, sodass $\frac{MN}{CF} = \frac{5}{9}$, gehen wir wie folgt vor: Da $MN = \left|(-2) - \left(-\frac{7}{6}\right)\right| = \frac{5}{6} \text{ cm}$, folgt, dass $CF = \frac{9}{5} \cdot MN = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{6} \text{ cm} = \frac{3}{2} \text{ cm}$. Da $AC = 1,5 \text{ cm}$ ist, würde die Darstellung von F links von C mit A zusammenfallen, also muss F 1,5 cm rechts von C platziert werden. Genauer gesagt, ist die Abszisse des Punktes F gleich 4.

Was stellen wir fest?

Um die Länge einer Strecke in Bezug auf die Länge der anderen auszudrücken, können wir das Verhältnis der Längen der beiden Strecken verwenden.

Merke dir!

Definition. Das Verhältnis zweier Strecken ist das Verhältnis ihrer Längen, in der gleichen Maßeinheit ausgedrückt.

In Abbildung 1 haben wir:

a. $\frac{PQ}{AB} = \frac{3}{4};$

b. $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2};$

c. $\frac{PR}{AC} = \frac{1}{2};$

d. $\frac{AB}{PR} = 4.$

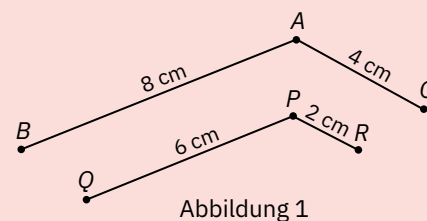


Abbildung 1

Gruppenarbeit

Zeichnet die Zahlenachse und die Punkte $O, A, B, C, D, E, L, M, N$ aus der Rubrik **Mathe im Alltag**. Stellt dann den zuvor gefundenen Punkt F dar. Findet in Teams von je vier Schülern (die an je zwei Tischen sitzen): **1.** Drei Streckenpaare, deren Verhältnis eine ganze Zahl ist; **2.** fünf Streckenpaare, deren Verhältnis ein echter Bruch ist; **3.** zwei Streckenpaare mit demselben Verhältnis. Vergleicht eure Ergebnisse mit denen eurer Mitschüler.

Bemerkungen

1. Das Verhältnis zweier Strecken hängt nicht von der Maßeinheit ab, die zum Messen der Strecken gewählt wurde.

Beispiel: In der folgenden Tabelle haben wir das Verhältnis der Strecken $AB = 24 \text{ cm}$ und $CD = 36 \text{ cm}$ unter Verwendung verschiedener Maßeinheiten berechnet.

	Maßeinheit		
	Zentimeter	Meter	Millimeter
AB	24 cm	0,24 m	240 mm
CD	36 cm	0,36 m	360 mm
$\frac{AB}{CD}$	$\frac{AB}{CD} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$	$\frac{AB}{CD} = \frac{0,24}{0,36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$	$\frac{AB}{CD} = \frac{240}{360} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

2. Um das Verhältnis zweier Strecken zu bestimmen, die nicht in der gleichen Maßeinheit ausgedrückt sind, muss man die Längen durch Umwandlungen auf die gleiche Maßeinheit bringen.

Beispiel: Bei den Strecken $MN = 14$ dm und $PQ = 3,5$ m werden wir umwandeln, um die gleiche Maßeinheit zu erhalten. Wir können eine der Maßeinheiten verwenden, in denen die gegebenen Strecken ausgedrückt werden (Dezimeter oder Meter), oder eine andere Maßeinheit für die Länge.

Bei Verwendung des Dezimeters (dm) als Maßeinheit ergibt sich $PQ = 35$ dm, also $\frac{MN}{PQ} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$.

Wenn man den Meter (m) als Maßeinheit verwendet, ergibt sich Folgendes: $\frac{MN}{PQ} = \frac{14 \text{ dm}}{3,5 \text{ m}} = \frac{1,4 \text{ m}}{3,5 \text{ m}} = \frac{1,4}{3,5} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$.

Wenn man beide Einheiten in Zentimeter (cm) umwandelt, erhält man: $\frac{MN}{PQ} = \frac{14 \text{ dm}}{3,5 \text{ m}} = \frac{140 \text{ cm}}{350 \text{ cm}} = \frac{140}{350} = \frac{2}{5}$.

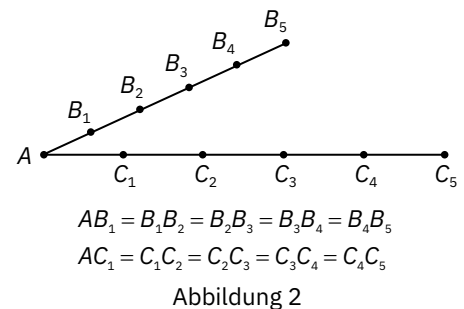
Auch hier gilt, dass das Verhältnis der beiden Strecken nicht von der Maßeinheit abhängt.

Proportionale (verhältnisgleiche) Strecken

Problemstellung

In Abbildung 2 sehen wir, dass:

- $\frac{AB_1}{B_2B_5} = \frac{1}{3}$ und $\frac{AC_1}{C_2C_5} = \frac{1}{3}$, d. h., $\frac{AB_1}{B_2B_5} = \frac{AC_1}{C_2C_5}$;
- $\frac{AB_2}{AB_3} = \frac{2}{3}$ und $\frac{AC_2}{AC_3} = \frac{2}{3}$, also $\frac{AB_2}{AB_3} = \frac{AC_2}{AC_3}$;
- $\frac{B_1B_5}{B_2B_3} = 4$ und $\frac{C_1C_5}{C_2C_3} = 4$, also $\frac{B_1B_5}{B_2B_3} = \frac{C_1C_5}{C_2C_3}$.



Mit zwei Streckenpaaren, die das gleiche Verhältnis haben, können wir also eine Verhältnisgleichung (Proportion) bilden.

Merke dir!

Definition. Die Strecken AB und CD sind proportional (verhältnisgleich) zu den Strecken $A'B'$ und $C'D'$, wenn $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Mit anderen Worten: Mit den Längen der vier Strecken kann man eine Verhältnisgleichung bilden. Im gegebenen Beispiel:

- sind die Strecken AB_1 und AC_1 proportional zu den Strecken B_2B_5 und C_2C_5 , weil $\frac{AB_1}{B_2B_5} = \frac{AC_1}{C_2C_5}$;
- sind die Strecken AB_2 und AC_2 proportional zu den Strecken AB_3 und AC_3 , weil $\frac{AB_2}{AB_3} = \frac{AC_2}{AC_3}$.

Bemerkung

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zwei Folgen von reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $y_1, y_2, \dots, y_n$ sind proportional, wenn: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n} = k$, und der k -Wert, der diesen Verhältnissen gemeinsam ist, wird als Proportionalitätskoeffizient (Proportionalitätsfaktor) bezeichnet.

Da in der vorherigen Abbildung $AB_2 = 2AB_1$ und $AB_3 = 3AB_1$ bzw. $AC_2 = 2AC_1$ und $AC_3 = 3AC_1$ ist, ergibt sich $\frac{AB_2}{AC_2} = \frac{2AB_1}{2AC_1} = \frac{AB_1}{AC_1}$ und $\frac{AB_3}{AC_3} = \frac{3AB_1}{3AC_1} = \frac{AB_1}{AC_1}$, d. h., $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_3}{AC_3}$.

In Erweiterung der obigen Definition sagen wir, dass die Strecken AB_1, AB_2, AB_3 proportional zu den Strecken AC_1, AC_2 und AC_3 sind.



Lehrsatz der äquidistanten Parallelen



Problemstellung

Die parallelen Geraden d_1, d_2, d_3 schneiden sich mit zwei Sekanten und ergeben die Punkte A, B, C, D, E, F , wie in Abbildung 3. Misst mit dem Lineal die erhaltenen Strecken und prüft, ob $AB = BC$ und $DE = EF$ ist. Wir werden zeigen, dass, wenn $AB = BC$, dann $DE = EF$. Umgekehrt: Wenn $DE = EF$, dann $AB = BC$.

Wir konstruieren durch A die Parallele zur Geraden DE und bezeichnen mit B' und C' die Schnittpunkte mit den beiden anderen Parallelen (Abbildung 4). Wir bemerken, dass die Vierecke $ADEB'$ und $EFC'B'$ Parallelogramme sind, also $DE = AB'$ und $EF = B'C'$.

Es ist offensichtlich, dass, wenn B der Mittelpunkt der Strecke AC ist, dann ist die Strecke BB' die Mittellinie im Dreieck ACC' . Folglich ist B' die Mitte der Strecke AC' , also $AB' = B'C'$ und folglich $DE = EF$.

Das Gleiche gilt für den Kehrsatz.

Was stellen wir fest?

Wenn drei parallele Geraden, die von zwei Sekanten geschnitten werden, auf einer der Sekanten kongruente Strecken ergeben, dann ergeben sie auch auf der anderen Sekanten kongruente Strecken.

Diese Eigenschaft ist ein Sonderfall des folgenden Lehrsatzes, den wir ohne Beweis annehmen.

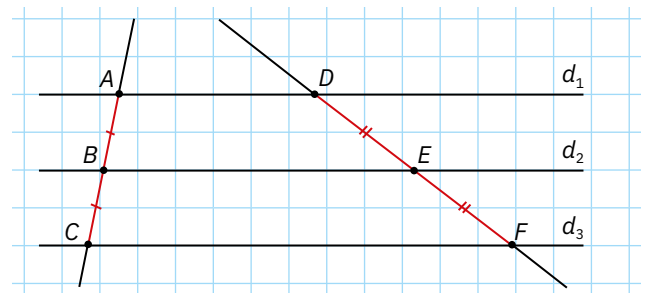


Abbildung 3

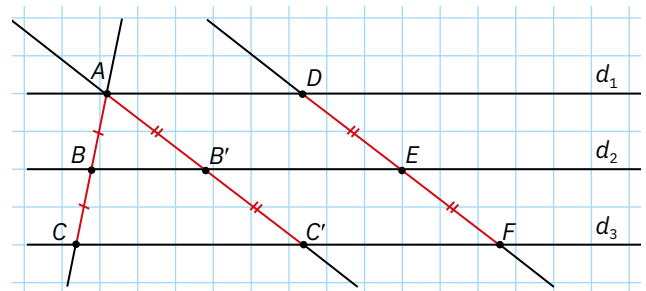


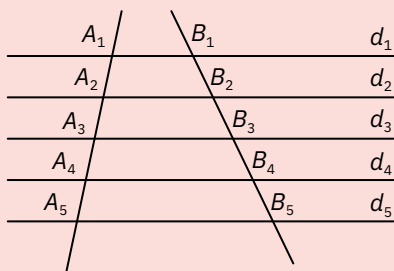
Abbildung 4



Merke dir!

Lehrsatz der äquidistanten Parallelen

Wenn mehrere parallele Geraden kongruente Strecken auf einer Sekante bestimmen, dann bestimmen sie kongruente Strecken auf jeder anderen Sekante.



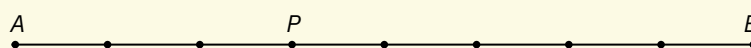
Voraussetzung: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \parallel \dots$
 $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = \dots$

Schlussfolgerung: $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = \dots$

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. Auf der Strecke AB ist der Punkt P so anzunehmen, dass $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}$ ist.



Berechnet die Verhältnisse:

- a. $\frac{PB}{AP}$; b. $\frac{AP}{AB}$; c. $\frac{PB}{AB}$; d. $\frac{5PA}{11PB}$; e. $\frac{AP+AB}{AB}$; f. $\frac{2 \cdot PB + AP}{AP + 3 \cdot PB}$.

Lösung:

Die Beziehung $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}$ wird äquivalent geschrieben $\frac{AP}{3} = \frac{PB}{5} = k$, $AP = 3k$, $PB = 5k$ und $AB = 8k$. Wir erhalten:

- a. $\frac{PB}{AP} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}$; b. $\frac{AP}{AB} = \frac{3k}{8k} = \frac{3}{8}$; d. $\frac{5PA}{11PB} = \frac{15k}{55k} = \frac{3}{11}$; f. $\frac{2 \cdot PB + AP}{AP + 3 \cdot PB} = \frac{13}{18}$.

Vorgeschlagene Aufgaben

- Seien die Strecken AB und CD so, dass $AB = 6$ cm und $CD = 3$ cm ist. Berechne den Wert der Verhältnisse:
 - $\frac{AB}{CD}$;
 - $\frac{CD}{AB}$;
 - $\frac{AB}{AB}$;
 - $\frac{AB+CD}{CD}$.
- Seien die Strecken AB und CD so, dass $AB = 4$ dm und $CD = 0,1$ m. Berechne den Wert der Verhältnisse:
 - $\frac{AB}{CD}$;
 - $\frac{CD}{AB}$;
 - $\frac{AB+CD}{AB}$;
 - $\frac{AB+CD}{AB-CD}$.
- A, B, C seien in dieser Reihenfolge kollineare Punkte mit $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm. Berechne den Wert der Verhältnisse:
 - $\frac{AB}{BC}$;
 - $\frac{AC}{AB}$;
 - $\frac{AB+BC}{AC}$;
 - $\frac{AB}{BC} + \frac{AB}{AC}$.
- Berechne das Verhältnis der Strecken AB und CD , wenn bekannt ist, dass:
 - $AB = 4$ cm, $CD = 20$ mm;
 - $AB = 50$ mm, $CD = 0,5$ dm;
 - $AB = 8$ m, $CD = 1,6$ dam;
 - $AB = 4,8$ hm, $CD = 0,24$ km.
- Im Dreieck ABC ist die Strecke EF die Mittellinie, $E \in AB$, $F \in AC$. Berechne den Wert der Verhältnisse:
 - $\frac{AE}{EB}$;
 - $\frac{AF}{AC}$;
 - $\frac{EF}{BC}$;
 - $\frac{AB}{EB}$;
 - $\frac{BC}{EF}$.
- Der Punkt M liegt auf der Strecke AB , sodass $AM = \frac{1}{4}AB$ ist. Bestimme:
 - $\frac{AM}{AB}$;
 - $\frac{MB}{AB}$;
 - $\frac{AM}{MB}$;
 - $\frac{AB}{MB}$;
 - $\frac{AM}{MB} + \frac{AB}{MB}$.
- Wenn A, B und C in dieser Reihenfolge kollineare Punkte sind, $AC = 24$ cm und $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$, berechne AB und BC .
- Die Längen der Seiten AB, AC und BC des Dreiecks ABC sind proportional zu den Zahlen 3, 4 und 6. Wenn der Umfang des Dreiecks ABC 39 cm beträgt, bestimme AB, AC und BC .
- Bestimme, ob die Strecken AB und BC proportional zu den Strecken CD und DE sind, wenn bekannt ist, dass:
 - $AB = 8$ cm; $BC = 4$ cm; $CD = 16$ cm und $DE = 8$ cm;
 - $AB = 12$ cm; $BC = 0,4$ dm und $\frac{CD}{DE} = 0,3$.
- In Abbildung 6 ist $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \parallel d_6$ und $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Wenn $B_1B_6 = 25$ cm ist, berechne B_1B_2, B_1B_4, B_2B_4 und B_3B_6 .
- Es sei das Trapez $ABCD$ mit der großen Grundlinie AB , die Punkte M, N auf der Seite AD und die Punkte P, Q auf der Seite BC , sodass $AM = MN = ND$ und $MP \parallel NQ \parallel AB$. R und S seien die Schnittpunkte der Diagonale AC mit den Geraden MP bzw. NQ . Wenn $SQ = 2$ cm und $MR = 1$ cm ist, bestimme die Länge der Grundlinien AB und CD des Trapezes.
- Es sei das Trapez $ABCD$ mit der großen Grundlinie AB , die Punkte M, N, P auf der Seite AD und die Punkte Q, R, S auf der Seite BC , sodass $AM = MN = NP = PD$ und $MQ \parallel NR \parallel PS \parallel CD$.
 - Beweise, dass R der Mittelpunkt der Strecke SQ ist.
 - Wenn $MQ = 14$ cm, $PS = 10$ cm und die Punkte E und F die Schnittpunkte der Diagonalen AC bzw. BD mit der Strecke NR sind, bestimme die Länge der Strecke EF .

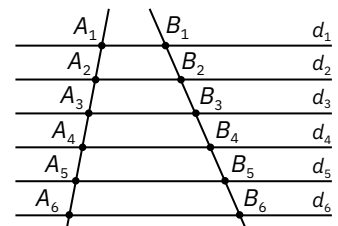


Abbildung 6

Test

- Betrachte die Strecke AB und CD so, dass $AB = 0,12$ dam und $CD = 40$ cm. Berechne den Wert der Verhältnisse:
 - $\frac{AB}{CD}$;
 - $\frac{CD}{AB}$;
 - $\frac{AB+CD}{AB}$. (3 Pkte.)
- Wenn A, B und C in dieser Reihenfolge kollineare Punkte sind, $AC = 18$ cm und $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$, berechne AB und BC . (3 Pkte.)
- Die Längen der Seiten AB, AC und BC des Dreiecks ABC sind direkt proportional zu den Zahlen 2, 4 und 5. Wenn bekannt ist, dass die längste Seite 15 cm beträgt, bestimme den Umfang des Dreiecks ABC . (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



2. Lektion: Lehrsatz des Thales

Schlüsselwörter

proportionale
Strecken

nicht-äquidistante
Parallelen

direkter
Lehrsatz

abgeleitete Proportionen
(Verhältnissgleichungen)

Kehrsatz eines
Lehrsatzes

Lehrsatz des Thales

Mathe im Alltag

Betrachtet das Dreieck ABC und die Punkte D und E auf den Seiten AB bzw. AC , sodass $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ und $DE \parallel BC$ (Abbildung 1).

Wir wollen herausfinden, in welchem Verhältnis der Punkt E die Seite AC teilt.

Weil $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ ist, unterteilen wir die Strecke AD in zwei gleiche

Teile: $AM = MD$ und die Strecke DB in drei gleiche Teile: $DN = NP = PB$. Somit teilen die Punkte M, D, N und P die Gerade AB in fünf kongruente Strecken: $AM = MD = DN = NP = PB$ (Abbildung 2).

Wir konstruieren Parallelen durch M, N und P zur Geraden BC ; sie schneiden die Gerade AC in den Punkten Q, R bzw. S . Unter Anwendung des Lehrsatzes der äquidistanten Parallelen ergibt sich $AQ = QE = ER = RS = SC$, also

$$\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}.$$

Was stellen wir fest?

Die Parallele DE zur Seite BC teilt die Seiten AB und AC im gleichen Verhältnis: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$.

Mit anderen Worten: Die Gerade DE bestimmt proportionale Strecken auf den beiden Seiten des Dreiecks.

Die obige Aufgabe ist ein Sonderfall des folgenden Lehrsatzes, den wir ohne Beweis annehmen.

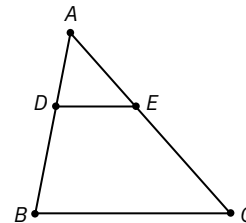


Abbildung 1

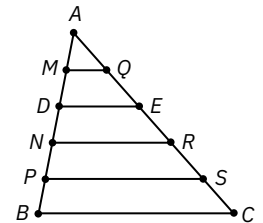
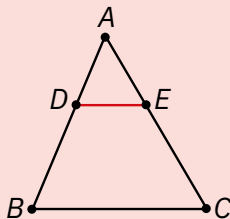


Abbildung 2

Merke dir!

Lehrsatz des Thales

Eine Parallele zu einer Dreiecksseite, die keinen Eckpunkt des Dreiecks enthält, bestimmt proportionale Strecken auf den beiden anderen Seiten.



Voraussetzung: $\triangle ABC$
 $DE \parallel BC, D \in AB, E \in AC$

Schlussfolgerung: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Beispiel

Auf der Seite AB des Dreiecks ABC mit $AB = 6$ cm liegt der Punkt D mit der Eigenschaft, dass $AD = 4$ cm ist. Die Parallele durch D zu BC schneidet die Seite AC in E . Da wir wissen, dass $AE = 6$ cm ist, bestimmen wir die Länge der Seite AC .

Laut Lehrsatz des Thales ist $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ und da $DB = AB - AD = 2$ cm ist, ergibt sich $EC = 3$ cm. Daher: $AC = AE + EC = 9$ cm.

Addiert man alternativ die Zähler zu den Nennern in der Verhältnissgleichung $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, erhält man $\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$, d. h., $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, wobei $AC = \frac{AB \cdot AE}{AD} = 9$ cm.

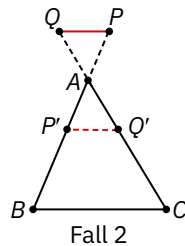
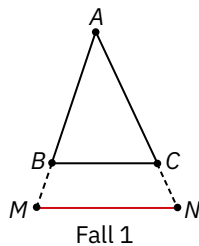
Bemerkungen

1. Unter Verwendung von abgeleiteten Verhältnisgleichungen kann die Schlussfolgerung des Lehrsatzes des Thales auch in einer der Formen geschrieben werden:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ oder } \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}.$$

2. Der Lehrsatz von Thales gilt auch dann, wenn die Parallele zu einer der Seiten die Verlängerungen der beiden anderen Seiten schneidet.

Es gibt zwei mögliche Konfigurationen: Eine Parallele zur Geraden BC kann in der durch die Parallele durch A zu BC und den Punkt B bestimmten Halbebene (Fall 1) oder in der entgegengesetzten Halbebene (Fall 2) gezogen werden:



Voraussetzung:

1. $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$
2. $PQ \parallel BC$, $P \in (BA)$, $Q \in (CA)$

Schlussfolgerung:

1. $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
2. $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$

1. Es ist offensichtlich, dass es ausreicht, den Lehrsatz von Thales im Dreieck AMN , mit $BC \parallel MN$, anzuwenden.
2. Wir konstruieren die Symmetriepunkte P' und Q' der Punkte P und Q in Bezug auf den Punkt A . Das Viereck $PQP'Q'$ ist ein Parallelogramm, also $P'Q' \parallel PQ \parallel BC$. Wendet man den Lehrsatz von Thales im Dreieck ABC an, in dem $P'Q' \parallel BC$, erhält man $\frac{AP'}{AB} = \frac{AQ'}{AC}$, und die Schlussfolgerung lautet, dass $AP' = AP$ und $AQ' = AQ$.

In Anbetracht der obigen Ergebnisse können wir eine erweiterte Form des Lehrsatzes des Thales aufstellen, die alle vorgestellten Konfigurationen einschließt:

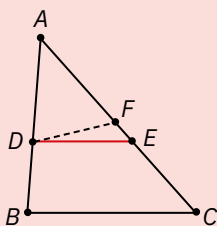
Lehrsatz des Thales

Eine Parallele zu einer Dreiecksseite bestimmt auf den anderen beiden Seiten oder auf deren Verlängerungen proportionale Strecken.

Merke dir!

Kehrsatz des Lehrsatzes des Thales

Eine Gerade, die auf den Seiten eines Dreiecks homologe (entsprechende) Strecken proportional zu diesen Seiten bestimmt, ist parallel zur dritten Seite des Dreiecks.



Voraussetzung: $\triangle ABC$
 $d \cap AB = \{D\}$, $d \cap AC = \{E\}$
 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Schlussfolgerung: $DE \parallel BC$

Beweis:

Wir wenden die Methode der Zurückführung auf einen Widerspruch an. Unter der Annahme, dass DE nicht parallel zu BC ist, konstruieren wir die Parallele durch D zu BC und bezeichnen mit F ihren Schnittpunkt mit AC ; dann ist $F \neq E$. Gemäß dem Lehrsatz von Thales folgt aus $DF \parallel BC$, dass $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Aber $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, also $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AC}$, was zu $AE = AF$ führt. Daraus folgt, dass die Punkte E und F übereinstimmen, gegen Widerspruch. Diese Annahme ist falsch, also $DE \parallel BC$.

Bemerkung

Wie oben können wir die Schlussfolgerung des Kehrsatzes des Lehrsatzes des Thales auf Situationen ausdehnen, in denen eine Gerade auf den Verlängerungen der Seiten eines Dreiecks homologe Strecken proportional zu den Seiten bestimmt. Somit gilt das folgende allgemeinere Ergebnis:

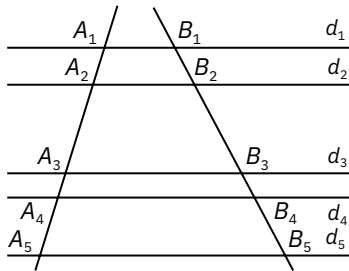
Lehrsatz. Es seien das Dreieck ABC und die Punkte $D \in AB$, $E \in AC$, die in derselben Halbebene liegen, die durch die Parallele durch A zu BC bestimmt wird. Wenn $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, dann $DE \parallel BC$.



Anwendungen des Lehrsatzes des Thales

1. Der Lehrsatz der nicht-äquidistanten Parallelen

Mehrere parallele Geraden bestimmen auf zwei Sekanten proportionale Strecken.



Voraussetzung: $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5 \parallel \dots$

Schlussfolgerung: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{A_4A_5}{B_4B_5} = \dots$

Portfolio

Beweise den obigen Lehrsatz für den Sonderfall von vier parallelen Geraden, die von zwei Sekanten geschnitten werden.

Du kannst die folgenden Ideen in deinem Beweis verwenden:

- Konstruiere eine Parallele durch den Punkt B_1 zur Geraden A_1A_2 und schneide diese Parallele mit d_2 und d_3 (siehe Abbildung 3).
- Wende den Lehrsatz des Thales im Dreieck $B_1C_3B_3$ an und beweise die Gleichheit $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$.
- Konstruiere eine neue Parallele zur Geraden A_1A_2 , diesmal durch den Punkt B_2 , und vervollständige den Beweis.

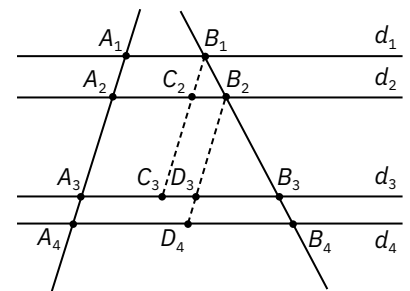


Abbildung 3

2. Teilen einer Strecke in Teile, die proportional zu gegebenen Zahlen (Strecken) sind

Betrachten wir eine gegebene Strecke AB , die wir in Teile (Strecken), proportional zu den Zahlen 2, 3 und 6, unterteilen wollen. Mit anderen Worten, wir stellen uns die Aufgabe, zwei Punkte M und N auf der Strecke AB so zu bestimmen, dass $\frac{AM}{2} = \frac{MN}{3} = \frac{NB}{6}$.

Die Aufgabe besteht also darin, die Strecke AB in $2 + 3 + 6 = 11$ gleich lange Strecken zu unterteilen. Zu diesem Zweck konstruieren wir einen Strahl Ax , auf dem wir mithilfe des Zirkels 11 kongruente Strecken konstruieren (siehe Abbildung 4). Wir bemerken, dass $AA_2 = 2u$, $A_2A_5 = 3u$ und $A_5A_{11} = 6u$. Wir konstruieren die Parallelen $A_2M \parallel A_{11}B$ und $A_5N \parallel A_{11}B$.

Mithilfe des Lehrsatzes der nicht-äquidistanten Parallelen erhält man $\frac{AM}{2} = \frac{MN}{3} = \frac{NB}{6}$.

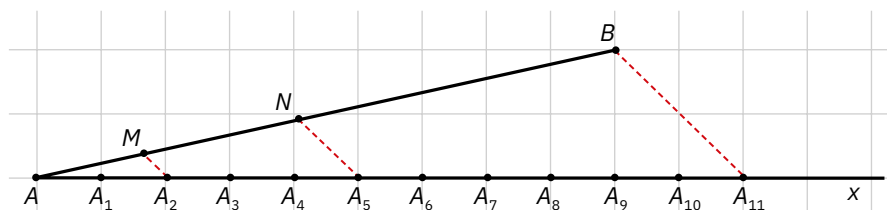


Abbildung 4

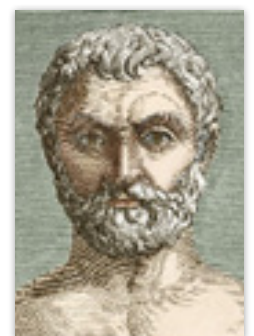
Mathe-Kultur

Thales von Milet (623 v. Chr. – 546 v. Chr.)

Thales von Milet war ein griechischer Philosoph, Mathematiker und Astronom, der als Vater der Wissenschaften und einer der sieben Weisen des antiken Griechenlands gilt. Thales wird oft als der „erste große griechische Mathematiker“ angesehen.

Thales ist die erste Person, der eine mathematische Entdeckung zugeschrieben wird. Er gilt auch als der Erste, der das deduktive Denken auf die Geometrie anwendete. Der Mathematiker lernte die Geometrie auf seinen Reisen in Ägypten kennen; er entwickelte dieses Gebiet weiter und vertiefte seine Kenntnisse der Geometrie in Griechenland. Die von ihm entwickelten geometrischen Lehrsätze bildeten die Grundlage der griechischen Mathematik.

Lest mehr über Thales von Milet in den von eurem Lehrer empfohlenen Internetquellen.



Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Im Trapez $ABCD$ gilt: $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $BD = 20$ cm und $\frac{AO}{OC} = \frac{2}{3}$. Berechne die Längen der Strecken BO und OD .

Lösung:

Die Gerade AB verläuft parallel zur Seite CD des Dreiecks ODC und schneidet die Verlängerungen der Seiten OC und OD in den Punkten A und B (Abbildung 5).

Unter Anwendung des Lehrsatzes des Thales ist $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$, also $\frac{BO}{OD} = \frac{2}{3}$.

Dann ist $\frac{BO}{BO+OD} = \frac{2}{2+3}$, d. h., $\frac{BO}{BD} = \frac{2}{5}$, also $BO = \frac{2}{5} \cdot BD = \frac{2}{5} \cdot 20$ cm = 8 cm, und

$DO = BD - BO = 12$ cm.

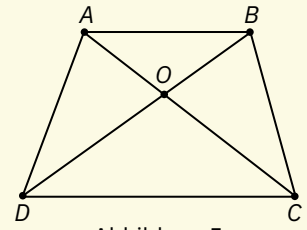
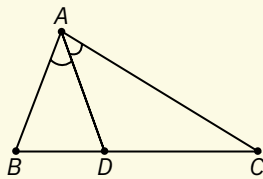


Abbildung 5

2. In jedem Dreieck bestimmt die Winkelhalbierende eines Winkels auf der gegenüberliegenden Seite zwei Strecken, die zu den beiden anderen Seiten proportional sind.



Voraussetzung: $\triangle ABC$
 $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, $D \in BC$

Schlussfolgerung: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Lösung: Die Schlussfolgerung ist offensichtlich wahr, wenn $AB = AC$. Nehmen wir weiter an, $AB \neq AC$. Wir konstruieren die Parallele durch B zu AD und bezeichnen mit P den Punkt, in dem sie die Gerade AC schneidet (Abbildung 6). Da $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle CAD$ (Stufenwinkel) und $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABP$ (innere Wechselwinkel) sind, folgt daraus, dass $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle ABP$, d. h., das Dreieck ABP gleichschenkelig ist.

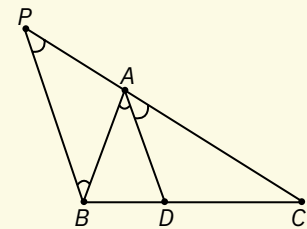
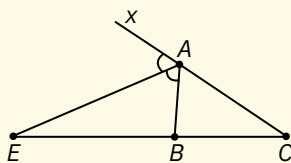


Abbildung 6

Daher ist $AP = AB$. Da $BP \parallel AD$ ist, ergibt die Anwendung des Lehrsatzes von Thales $\frac{DB}{DC} = \frac{AP}{AC}$, d. h., $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Bemerkung: Die Aufgabe ist in der Fachliteratur als *Lehrsatz der Winkelhalbierenden* bekannt. Versucht anhand der Lösung von Aufgabe 3 (Lehrsatz der Winkelhalbierenden) zu beweisen, dass: Wenn zwei Seiten eines Dreiecks nicht kongruent sind, bestimmt die äußere Winkelhalbierende des von ihnen gebildeten Winkels auf der Stützgeraden der gegenüberliegenden Seite Strecken, die proportional zu den nicht kongruenten Seiten sind (Lehrsatz der äußeren Winkelhalbierenden).



Voraussetzung: $\triangle ABC$, $AB \neq AC$
 $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle EAX$, $E \in BC$

Schlussfolgerung: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$

Vorgeschlagene Aufgaben

- In Abbildung 7 ist $DE \parallel BC$, $AD = 4$ cm, $AE = 3$ cm und $EC = 6$ cm. Berechne AC , DB und AB .
- Die Punkte D und E liegen auf den Seiten AB bzw. AC des Dreiecks ABC , sodass $DE \parallel BC$ ist.
 - Wenn $AD = 2$ cm, $AB = 6$ cm und $AC = 12$ cm, berechne DB , AE und EC .
 - Wenn $AD = 3$ cm, $DB = 4$ cm und $AE = 6$ cm, berechne AB , EC und AC .
 - Wenn $DB = 6$ cm, $AB = 9$ cm und $AC = 12$ cm, berechne AD , AE und EC .
- Im Dreieck ABC liegen die Punkte D und E auf den Seiten AB bzw. AC so, dass $DE \parallel BC$.
 - Wenn $BE = 6$ cm, $AE = 8$ cm und $BF = 4$ cm, berechne AB , FC und BC .
 - Wenn $BF = 12$ cm, $FC = 8$ cm und $AE = 5$ cm, berechne BC , BE und AB .
 - Wenn $BE = 16$ cm, $AB = 24$ cm und $BF = 8$ cm, berechne AE , FC und BC .
- In Abbildung 8 wissen wir, dass $MN \parallel BC$, $AM = 4$ cm, $AN = 3$ cm und $AB = 9$ cm. Berechne AC und MC .

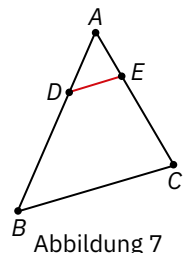


Abbildung 7

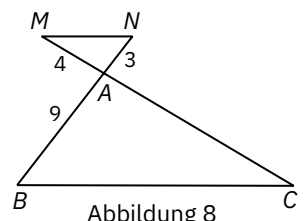


Abbildung 8



5. In Abbildung 9 wissen wir, dass $MN \parallel BC$, $AB = 10$ cm, $AN = 15$ cm und $AM = 25$ cm. Berechne NB , AC , MC .

6. Im Dreieck ABC liegen die Punkte E und F auf den Seiten AB und AC , sodass $EF \parallel BC$. Wenn $AE = 2EB$, $AB = 12$ cm und $AC = 18$ cm, berechne AE , EB , AF und FC .

7. Im Dreieck ABC liegen der Punkt M auf der Seite AB und der Punkt N auf der Seite AC so, dass $MN \parallel BC$ ist. Wenn $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ und $AN = 20$ cm, berechne NC und AC .

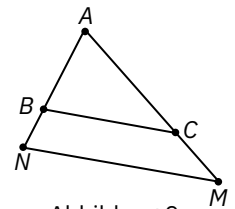


Abbildung 9

8. Auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen die Punkte M und N , $M \in AB$, $N \in BC$. Prüfe, ob $MN \parallel AC$ in den Fällen:

- $AM = 8$ cm, $MB = 6$ cm, $BN = 12$ cm und $NC = 9$ cm;
- $AM = 12$ cm, $AB = 16$ cm, $BN = 11$ cm und $NC = 33$ cm;
- $MB = 15$ cm, $AB = 36$ cm, $BN = 10$ cm und $BC = 24$ cm;
- $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$, $BN = 6$ dm, $NC = 0,12$ dm.

9. $ABCD$ sei ein Rechteck und E auf der Seite AB so, dass $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$. Wenn $EF \parallel BD$, $F \in AD$, und $AD = 24$ cm ist, berechne AF und FD .

10. Im Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $AB < CD$, sei M auf der Seite AD und $P \in BC$ so, dass $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{4}$ und $MP \parallel AB$. Bekannt ist, dass $BC = 28$ cm und $AC \cap MP = \{N\}$.

- Berechne das Verhältnis der Strecken AN und AC .
- Bestimme die Längen der Strecken BP und PC .

11. Gegeben sei das Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Betrachte die Punkte E und F , $E \in AD$, $F \in BC$, sodass $\frac{DE}{AE} = \frac{CF}{BF}$ ist. Zeige, dass $EF \parallel AB$.

12. Im Trapez $ABCD$ gilt: $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $AC = 24$ cm und $\frac{BO}{OD} = \frac{3}{5}$. Berechne die Längen der Strecken AO und OC .

13. In Abbildung 10 ist $ABCD$ ein Rhombus, $EF \parallel AB$ und $EG \parallel BD$. Zeige, dass $\frac{AG}{AB} + \frac{DF}{BD} = 1$ ist.

14. In Abbildung 11 stellen die Strecken BC und DE zwei Trampoline dar, die an einer Stange AD befestigt sind. Die beiden Trampoline befinden sich über einem Schwimmbecken. Es ist bekannt, dass $AB = 4$ m und $BD = 6$ m, $BC \parallel DE$, und der Abstand zwischen den Punkten A und C 6 Meter beträgt. Berechne den Abstand zwischen den Punkten A und E , wobei bekannt ist, dass die Punkte A , C und E kollinear sind.

15. Abbildung 12 zeigt eine schematische Darstellung der Positionen der Häuser von fünf Kindern: Mihai, Adi, Rareș, Dana und Corina. Zeige anhand der in der Abbildung dargestellten Entfernungen, dass die Lunii-Straße und die Unirii-Straße parallel sind.

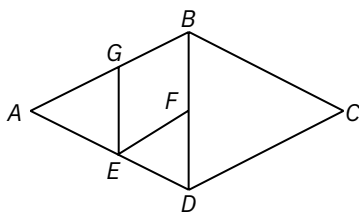


Abbildung 10

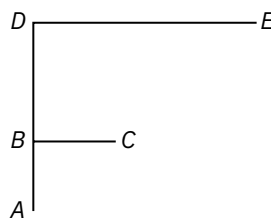


Abbildung 11

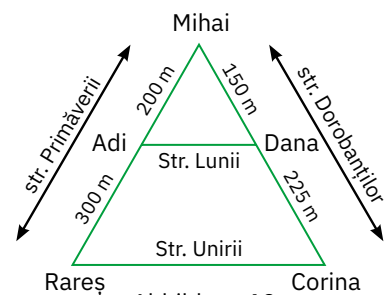


Abbildung 12

Test

1. Man betrachte das Dreieck ABC und die Punkte D und E auf den Seiten AB bzw. AC , sodass $DE \parallel BC$ ist. Wenn $AB = 12$ cm, $AE = 10$ cm und $EC = 6$ cm, berechne AD , DB und AC . (3 Pkte.)

2. Gegeben sei das Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $BD = 25$ cm, und $\frac{AO}{OC} = \frac{2}{3}$. Berechne die Längen der Strecken BO und OD . (3 Pkte.)

3. Im Parallelogramm $ABCD$ seien $M \in BC$, $N \in BD$ und $P \in DC$, sodass $MN \parallel CD$ und $NP \parallel BC$. Beweise, dass $\frac{BM}{BC} + \frac{DP}{DC} = 1$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

3. Lektion: Ähnliche Dreiecke. Hauptsatz der Ähnlichkeit

Schlüsselwörter

Ähnlichkeit

ähnliche Figuren

ähnliche Dreiecke

Ähnlichkeitsverhältnis

proportionale Strecken

Hauptsatz der Ähnlichkeit

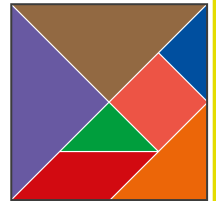
Ähnliche Dreiecke

Mathe im Alltag

Tangram ist ein altes chinesisches Puzzlespiel, das aus sieben Teilen besteht, die Tans genannt werden (fünf rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke, ein Quadrat und ein Parallelogramm) und aus denen sich verschiedene Figuren bilden lassen. Dina, Vlad und Eliza analysieren die Teile.

Dina: Das grüne Dreieck ist kongruent mit dem blauen Dreieck und das lila Dreieck ist kongruent mit dem braunen Dreieck.

Eliza: Obwohl sie nicht alle identisch sind, haben die Dreiecke eine ähnliche Form.



Vlad: So wie ich es sehe, gibt es eine gemeinsame Form (Figur), die eine bestimmte Anzahl von Malen vergrößert oder verkleinert wurde, um diese Dreiecke zu erzeugen. Das ist wie die Zoomfunktion bei einer Kamera oder einem Mikroskop.

Eliza: Die Technik, von der du sprichst, nennt sich Skalierung. Die Zahl, die angibt, wie oft du ein Bild vergrößern oder verkleinern kannst, wird Skalierungsfaktor genannt. Wenn dieser Faktor unter einer Einheit liegt, wird das Bild verkleinert. Liegt er über einer Einheit, wird es größer.

Dina: Ich habe eine Version desselben Spiels mit mehr Formen (Figuren). Ich zeige euch ein paar Arten von Figuren:



Eliza: Die gleichfarbigen Teile haben die gleiche Form. Aber obwohl alle Quadrate *sich ähneln*, gilt dies nicht für alle Rechtecke oder Dreiecke. Genauer gesagt, können nicht alle Dreiecke (oder Rechtecke) durch Vergrößerung oder Verkleinerung einer gemeinsamen Form hergestellt werden.

Was stellen wir fest?

In den oben genannten ähnlich gefärbten Figuren bleiben das Verhältnis der Seitenlängen und das Maß der Winkel von einer Figur zur anderen erhalten. Wir werden sagen, dass dies *ähnliche Figuren* sind.

Intuitiv sind zwei beliebige gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke ähnlich, aber zwei beliebige rechtwinklige Dreiecke sind nicht unbedingt ähnlich. Ebenso sind zwei beliebige Quadrate ähnlich, aber nicht zwei beliebige Rechtecke.

In diesem Sinne werden wir im Folgenden Dreiecke untersuchen.

Merke dir!

Definition. Zwei Dreiecke werden als ähnlich bezeichnet, wenn die Winkel des einen Dreiecks kongruent zu den Winkeln des anderen Dreiecks sind und die gegenüberliegenden Seiten der kongruenten Winkel proportional sind.

Wenn die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich sind, schreiben wir:

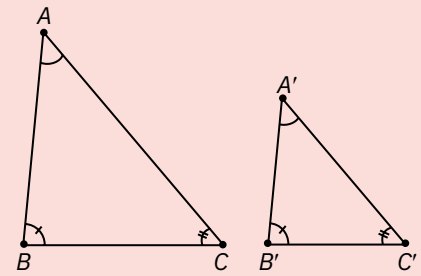
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$



Laut Definition finden die Beziehungen statt:

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C' \text{ und } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Der gemeinsame Wert der drei Verhältnisse wird als *Ähnlichkeitsverhältnis* der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ bezeichnet.



Beispiele

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen Paare ähnlicher Dreiecke. Anhand der Definition können wir von jedem Dreieck die unbekannten Elemente (Seitenlängen oder Winkelmaße) bestimmen.

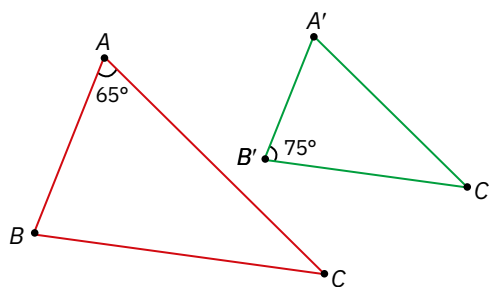


Abbildung 1

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle A = \sphericalangle A' = 65^\circ \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' = 75^\circ \end{cases}$$

$$\sphericalangle C = \sphericalangle C' = 180^\circ - (\sphericalangle A' + \sphericalangle B') = 40^\circ$$

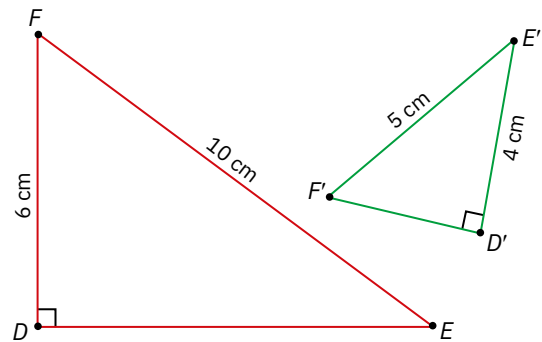


Abbildung 2

$$\Delta DEF \sim \Delta D'E'F' \Rightarrow \frac{DE}{D'E'} = \frac{DF}{D'F'} = \frac{EF}{E'F'}$$

$$\frac{EF}{E'F'} = 2 \Rightarrow \begin{cases} DE = 8 \text{ cm} \\ D'F' = 3 \text{ cm} \end{cases}$$

Eigenschaften der Ähnlichkeitsbeziehung zweier Dreiecke

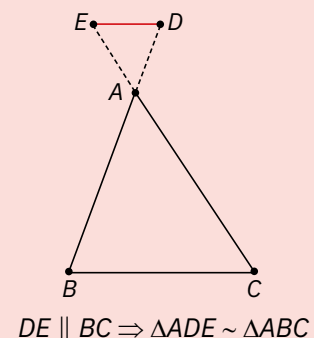
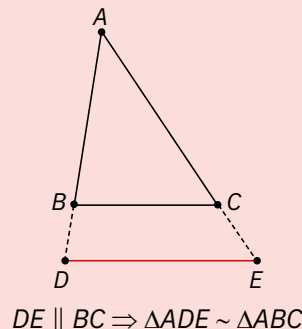
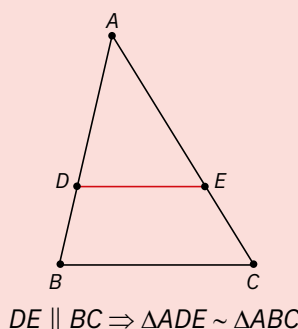
1. Jedes Dreieck ist ähnlich mit sich selbst: $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.
2. Wenn ein Dreieck ähnlich mit einem zweiten Dreieck ist, dann ist das zweite Dreieck auch ähnlich mit dem ersten Dreieck:
wenn $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, dann $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.
3. Zwei Dreiecke, die jeweils ähnlich mit einem dritten Dreieck sind, sind einander ähnlich:
wenn $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$ und $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$, dann $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
4. Zwei beliebige kongruente Dreiecke sind ähnlich (das Ähnlichkeitsverhältnis ist gleich 1):
wenn $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, dann $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



Merke dir!

Hauptsatz der Ähnlichkeit

Eine Parallele zu einer Dreiecksseite bildet mit den beiden anderen Seiten (oder mit deren Verlängerungen) ein mit dem gegebenen Dreieck ähnliches Dreieck.



Beweis:

Wir werden dies nur für den Fall beweisen, dass D auf der Strecke AB liegt. Wir müssen zeigen, dass $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ und $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

Die Winkel DAE und BAC fallen zusammen, also $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$. Dann ergibt sich aus $DE \parallel BC$, $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ (Stufenwinkel).

Der Lehrsatz des Thales, im Dreieck ABC angewendet, zeigt uns, dass $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (Abbildung 3).

Um zu beweisen, dass $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ist, konstruieren wir die Parallele durch E zu AB , die die Gerade BC in F schneidet. Da $EF \parallel AB$ ist, ergibt sich unter erneuter Anwendung des Lehrsatzes des Thales $\frac{EC}{EA} = \frac{FC}{FB}$.

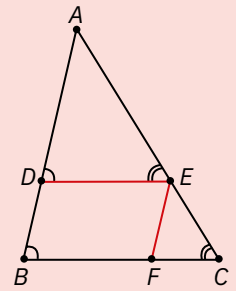


Abbildung 3

Unter Verwendung der abgeleiteten Verhältnisgleichungen ergibt sich $\frac{EC+EA}{EA} = \frac{FC+FB}{FB}$, oder $\frac{AC}{EA} = \frac{BC}{FB}$, d. h., $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$.

Das Viereck $DEFB$ ist ein Parallelogramm, also ist $DE = BF$, und die obige Beziehung wird $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, was zu beweisen war.

Portfolio

Beweise den obigen Lehrsatz für die beiden anderen Fälle.

Für den Beweis kannst du verwenden:

- Eigenschaften von Winkeln, die von zwei parallelen Geraden mit einer Sekanten gebildet werden, um die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle B$ und $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle C$ zu beweisen;
- Lehrsatz des Thales und ähnliche Begründungen wie im Beweis von Fall 1, um Fall 2 zu beweisen;
- die Konstruktion der Symmetriepunkte D' und E' der Punkte D und E in Bezug auf den Punkt A , gefolgt von dem Vergleich der Dreiecke $AD'E'$ und ABC , um Fall 3 zu beweisen.

**Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken**

1. D und E seien Punkte auf den Seiten AB bzw. AC des Dreiecks ABC , sodass die Geraden DE und BC parallel sind. Wenn bekannt ist, dass $AB = 18$ cm, $DB = 12$ cm, $DE = 4$ cm und $AE = 9$ cm sind, bestimmt die Längen der Strecken AD , BC und EC .

Lösung:

Da $DE \parallel AB$ ist, folgt laut dem Hauptsatz der Ähnlichkeit, dass $\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$.

Aber $AD = AB - DB = 6$ cm, also $\frac{6}{18} = \frac{4}{BC} = \frac{9}{AC}$, daher $BC = \frac{18 \cdot 4}{6} = 12$ cm, $AC = \frac{9 \cdot 18}{6} = 27$ cm und $EC = AC - AE = 18$ cm.

2. In Abbildung 4 ist die Gerade DE parallel zu AB und die Gerade DF parallel zu BC .

Beweist, dass $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{BC} = 1$ ist.

Lösung:

Wir wenden den Hauptsatz der Ähnlichkeit an:

$$DE \parallel AB \Rightarrow \triangle CDE \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} \quad (1);$$

$$DF \parallel BC \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{CA} \quad (2).$$

Aus den Beziehungen (1) und (2) erhält man: $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{BC} = \frac{CD}{CA} + \frac{AD}{CA} = \frac{CD+AD}{CA} = \frac{AC}{AC} = 1$.

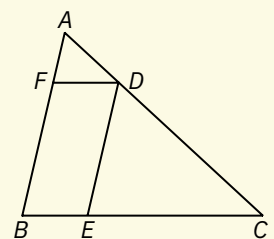


Abbildung 4



Vorgeschlagene Aufgaben

1. Man betrachte die Dreiecke ABC und DEF so, dass $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Es ist bekannt, dass $\sphericalangle A = 45^\circ$ und $\sphericalangle B = 50^\circ$. Bestimmt $\sphericalangle C$, $\sphericalangle E$, $\sphericalangle D$ und $\sphericalangle F$.

2. In Abbildung 5 sind die Dreiecke ABC und DEF ähnlich. Bestimmt x und y .

3. Man betrachte die Dreiecke ABC und MNP so, dass $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

$AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm und $\frac{AB}{MN} = 3$. Berechne MN und NP .

4. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, $AB = 7$ cm, $AC = 9$ cm, $MN = 21$ cm und $NP = 36$ cm, bestimme die Umfänge der beiden Dreiecke.

5. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB = 10$ cm, $AC = 6$ cm, $DF = 12$ cm und $\sphericalangle A = 64^\circ$, bestimme DE und $\sphericalangle D$.

6. Im Dreieck ABC liegen die Punkte D und E auf den Seiten AB bzw. AC , sodass $DE \parallel BC$.

a. Wenn $AB = 15$ cm, $BC = 18$ cm, $AC = 21$ cm und $BD = 10$ cm, berechne AD , AE , EC und DE .

b. Wenn $DE = 12$ cm, $AB = 20$ cm, $BC = 15$ cm und $AC = 30$ cm, berechne AD , DB , AE und EC .

c. Wenn $AB = 16$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 24$ cm und $AE = 18$ cm, berechne AD , DB , EC und DE .

7. Im Dreieck ABC liegen die Punkte D und E auf den Seiten AB bzw. AC , sodass

$DE \parallel BC$. Wenn bekannt ist, dass $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$, $AE = 4$ cm, $AB = 20$ cm und $BC = 15$ cm, bestimme AD , DB , EC , AC und DE .

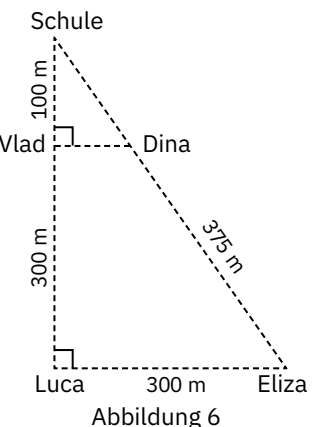
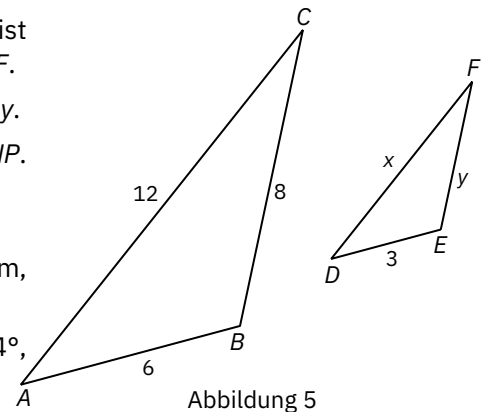
8. Das Dreieck ABC hat die Eigenschaft $\triangle ABC \sim \triangle BCA$. Gebt die Art des Dreiecks ABC an.

9. Das Trapez $ABCD$ hat $AB \parallel CD$, $AB = 30$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 10$ cm und $AD = 14$ cm. Wenn $AD \cap BC = \{M\}$, berechne den Umfang des Dreiecks MAB .

10. Bestimme anhand der Anleitungen in Abbildung 6:

a. die Entfernungen, die Dina und Eliza zur Schule zurücklegen müssen;

b. die Entfernung zwischen den Häusern von Vlad und Dina.



Mathe-Kultur

Legende des TANGRAM-Spiels

Es wird erzählt, dass vor vielen Jahren, in fast unvordenklichen Zeiten, in China ein gewisser Tan lebte, dessen einziger wertvoller Besitz ein wunderschönes Keramikstück war. Er wollte es dem Kaiser zeigen, und Tan machte sich auf den Weg, stolperte aber unglücklicherweise und das Stück zerbrach in sieben geometrische Formen: zwei größere Dreiecke, ein mittleres Dreieck, zwei kleinere Dreiecke, ein Quadrat und ein Parallelogramm. Beim Versuch, sie wieder zusammenzusetzen, wurde Tan vom Pech verfolgt, denn er fand einen Hund, einen Vogel und eine tanzende Frau. Tan war erstaunt über seine Entdeckung und stellte sie schließlich dem Kaiser in Form eines Spiels vor.



Selbstbewertung

1. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB = 20$ cm, $AC = 12$ cm, $DF = 24$ cm und $\sphericalangle B = 52^\circ$, bestimme DE und $\sphericalangle E$. (3 Pkte.)

2. Im Dreieck ABC ist der Punkt D auf der Seite AB und der Punkt E auf der Seite AC so anzunehmen, dass $DE \parallel BC$. Wenn $AC = 12$ cm, $AD = 6$ cm, $AE = 9$ cm und $DE = 12$ cm, berechne EC , DB , AB und BC . (3 Pkte.)

3. In dem Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, sind $AB = 35$ cm, $CD = 10$ cm, $AC = 18$ cm und $BD = 27$ cm. Wenn $AC \cap BD = \{O\}$, berechne AO , OC , BO und OD . (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.

4. Lektion: Ähnlichkeitskriterien der Dreiecke. Schätzen von Entfernungen im Alltag mithilfe der Ähnlichkeit

Schlüsselwörter

Ähnlichkeitskriterien

Winkel-Winkel (WW)

Seite-Winkel-Seite (SWS)

Ähnlichkeitsverhältnis

Seite-Seite-Seite (SSS)

Ähnlichkeitskriterien der Dreiecke

Mathe im Alltag

Stellt das Puzzleteil in Abbildung 1 auf zwei Arten aus Karton her.

- Konstruiert das große Dreieck und schneidet das kleine Dreieck aus. Achtet dabei darauf, dass die Abmessungen wie abgebildet sind und dass die nicht-horizontalen Seiten der beiden Dreiecke parallel sind.
- Fertigt zunächst eine Kartonvorlage an, mit der ihr dann das kleine Dreieck aus dem großen Dreieck ausschneidet. Um die Vorlage anzufertigen, geht ihr folgendermaßen vor: Konstruiert zuerst das Dreieck ABC und wählt dann den Punkt M auf der Seite AB so, dass $AM = 3,2$ cm ist. Konstruiert man eine Parallele durch M zu BC , so ergibt der Hauptsatz der Ähnlichkeit ein Dreieck AMN , ähnlich mit dem Dreieck ABC . Da $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ist, wissen wir, wo wir den Punkt N auf der Seite AC wählen müssen, sodass $AN = 4$ ist. Dies ist unsere Kartonvorlage.

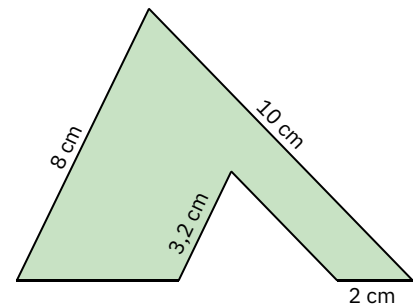


Abbildung 1

Wir konstruieren das große Dreieck, das wir ABC nennen, aus Karton. Es reicht aus, die Vorlage so zu verschieben, dass die Gerade MN mit der Geraden BC zusammenfällt, und den Abstand von 2 cm in der Abbildung zu behalten. Dann müssen wir nur noch das kleine Dreieck ausschneiden (Abbildung 2).

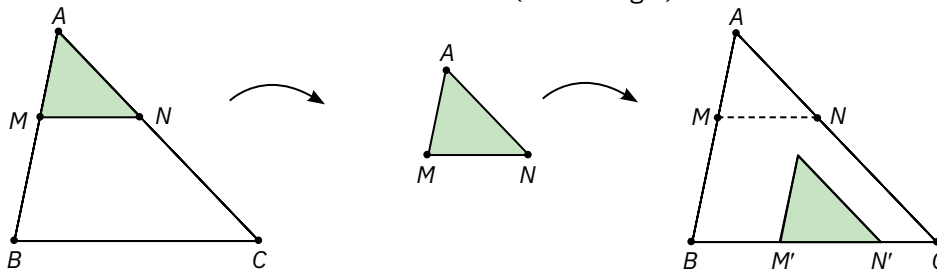


Abbildung 2

Was stellen wir fest?

Die Herstellung der Vorlage AMN gründet auf der Konstruktion des Dreiecks ABC . In der oben beschriebenen Situation haben wir den Konstruktionsfall Seite-Winkel-Seite (SWS) verwendet.

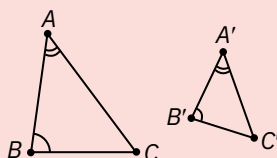
Mithilfe des Hauptsatzes der Ähnlichkeit ist es offensichtlich, dass wir, sobald wir ein Dreieck konstruiert haben, beliebig viele zu diesem ähnliche Dreiecke bilden können. In der 6. Klasse haben wir eine Verbindung zwischen den Konstruktionsfällen und den Kongruenzfällen der Dreiecke hergestellt. Man könnte sich fragen, ob es einen ähnlichen Zusammenhang zwischen der Konstruktion und der Ähnlichkeit der Dreiecke gibt.

Wir erinnern uns, dass eine Entsprechung zwischen zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ durch die Reihenfolge der Scheitelpunkte bestimmt wird. So entspricht der Scheitelpunkt A dem Scheitelpunkt A' , der Scheitelpunkt B dem Scheitelpunkt B' , der Scheitelpunkt C dem Scheitelpunkt C' , und die entsprechenden (oder homologen) Seiten liegen den entsprechenden (homologen) Scheitelpunkten gegenüber.

Merke dir!

Das Ähnlichkeitskriterium Winkel-Winkel (WW)

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Paare kongruenter homologer Winkel haben.



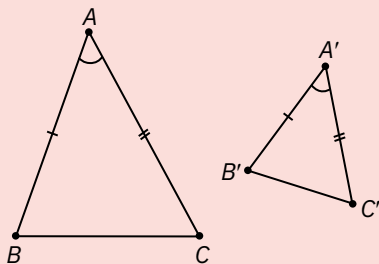
Voraussetzung: $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$
 $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$

Schlussfolgerung: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



Das Ähnlichkeitskriterium Seite-Winkel-Seite (SWS)

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Paare von proportionalen homologen Seiten und die von ihnen bestimmten Winkel kongruent haben.

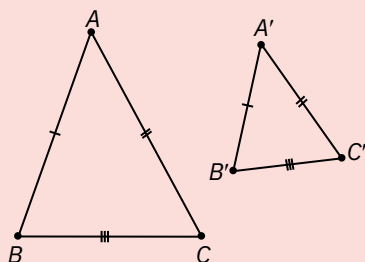


Voraussetzung: $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$
 $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$
 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

Schlussfolgerung: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Das Ähnlichkeitskriterium Seite-Seite-Seite (SSS)

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie proportionale homologe Seiten haben.



Voraussetzung: $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$
 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Schlussfolgerung: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Beweis:

Auf der Halbgeraden AB nehmen wir den Punkt D so an, dass $AD \equiv A'B'$, dann konstruieren wir die Parallele durch D zu BC und bezeichnen mit E ihren Schnittpunkt mit der Geraden AC (Abbildung 3).

Da $DE \parallel BC$, ist laut dem Hauptsatz der Ähnlichkeit $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Anhand der Annahmen für jedes Kriterium zeigen wir in jedem Fall, dass die Dreiecke ADE und $A'B'C'$ kongruent sind, was genügt, um abzuleiten, dass $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Fall 1 (WW-Kriterium)

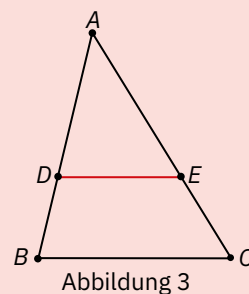
Die Winkel ADE und ABC sind homolog, also $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$. Da $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle B'A'C'$ und $AD = A'B'$, folgt, dass $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ (WSW-Kongruenzfall).

Fall 2 (SWS-Kriterium)

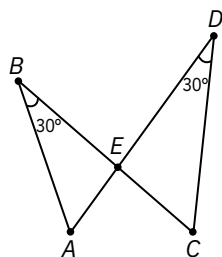
Da $DE \parallel BC$ ist, ergibt sich unter Anwendung des Lehrsatzes des Thales, dass $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. Da $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ und $AD = A'B'$, erhält man $AE = A'C'$, wobei $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ (SSW-Kongruenzfall).

Fall 3 (SSS-Kriterium)

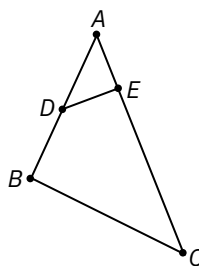
Die oben ermittelte Beziehung $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ zeigt, dass $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$. Aber $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ und $AD = A'B'$, wobei $AE = A'C'$ und $DE = B'C'$, also $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$ (SSS-Kongruenzfall).



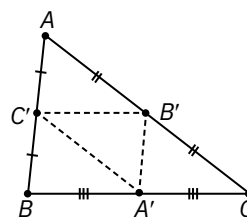
Beispiele



$\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle CDE$ (jeweils 30°)
 $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle CED$ (Scheitelwinkel)
 $\triangle AEB \sim \triangle CED$ (WW)



$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$, $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CAB$
 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ (SWS)



$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2}$
 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (SSS)

Bemerkungen

1. Das Verhältnis der Höhen, Seitenhalbierenden und Winkelhalbierenden ähnlicher Dreiecke

Das Verhältnis der Längen der Höhen, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden ausgehend von den homologen Eckpunkten zweier ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Ähnlichkeitsverhältnis der beiden Dreiecke.

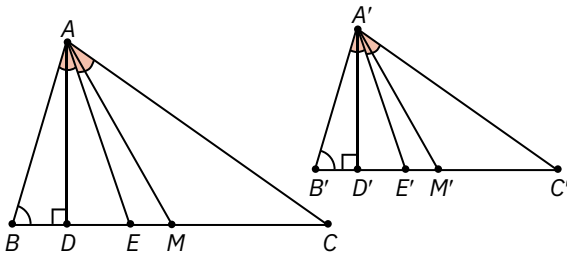


Abbildung 4

Voraussetzung: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; $\frac{AB}{A'B'} = k$
 $AD, A'D'$ Höhen
 $AE, A'E'$ Winkelhalbierende
 $AM, A'M'$ Seitenhalbierende

Schlussfolgerung: $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{AM}{A'M'} = k$

Beweis:

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ folgt, dass $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ und $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ (Abbildung 4).

- Die Dreiecke ABD und $A'B'D'$ sind rechtwinklig, mit $\sphericalangle D = \sphericalangle D' = 90^\circ$. Da $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle A'B'D'$, folgt, dass $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ (WW). Daraus folgt: $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = k$.
- Die Winkel BAE und $B'A'E'$ sind kongruent, weil ihre Maße die Hälfte der Maße der kongruenten Winkel BAC und $B'A'C'$ betragen. Da $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle B'A'E'$ und $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle A'B'E'$, erhalten wir $\triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$ (WW). Folglich: $\frac{AE}{A'E'} = \frac{AB}{A'B'} = k$.
- Aus den Beziehungen $BM = \frac{1}{2}BC$ und $B'M' = \frac{1}{2}B'C'$ ergibt sich $\frac{BM}{B'M'} = \frac{BC}{B'C'} = k$. Für die Dreiecke ABM und $A'B'M'$ gilt $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle A'B'M'$ und $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'} = k$, woraus wir $\triangle ABM \sim \triangle A'B'M'$ erhalten (SWS).

Daher ist $\frac{AM}{A'M'} = \frac{AB}{A'B'} = k$.

2. Das Verhältnis der Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke

Das Verhältnis der Flächeninhalte zweier ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Quadrat des Ähnlichkeitsverhältnisses.

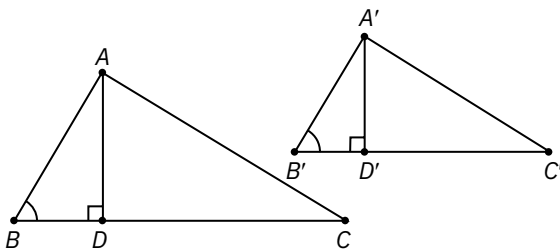


Abbildung 5

Voraussetzung: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; $\frac{AB}{A'B'} = k$

Schlussfolgerung: $\frac{Fl_{ABC}}{Fl_{A'B'C'}} = k^2$

Beweis:

Durch Konstruktion der Höhen $AD \perp BC$ und $A'D' \perp B'C'$ erhält man $Fl_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$ und $Fl_{A'B'C'} = \frac{A'D' \cdot B'C'}{2}$ (Abbildung 5).

Da das Verhältnis der Längen der Höhen gleich dem Ähnlichkeitsverhältnis ist, lässt sich daraus ableiten:

$$\frac{Fl_{ABC}}{Fl_{A'B'C'}} = \frac{AD \cdot BC}{A'D' \cdot B'C'} = \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{BC}{B'C'} = k \cdot k = k^2.$$

Schätzen von Entfernungen im Alltag mithilfe der Ähnlichkeit der Dreiecke

Praktische Aufgaben im Alltag erfordern oft das Messen der Entfernung zwischen zwei Punkten. Die konkrete Situation im Gelände kann es schwierig machen, diese Entfernungen direkt zu messen, z. B. wenn wir die Höhe eines Baumes oder eines Gebäudes messen oder die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten bestimmen müssen usw. In den folgenden Aufgaben werden wir die in dieser Einheit gelernten Begriffe, insbesondere die Ähnlichkeit der Dreiecke, zur Bestimmung solcher Entfernungen verwenden.



Beispiele

1. Messen der Höhe eines Baumes

Nehmen wir an, die Senkrechte durch die Mitte des Baumstamms schneidet den Boden im Punkt A und die Baumkrone im Punkt X . Wir wollen die Höhe des Baumes, d. h. die Länge der Strecke AX , schätzen.

An einem Punkt B , der a Meter von A entfernt ist, befestigen wir einen Stab (in Abbildung 6 durch die Strecke BD dargestellt) mit der Länge b Meter.

Wir bewegen uns auf der Halbgeraden $[AB$, bis wir vom Boden sehen, dass die Punkte X , D und C kollinear sind. Die Länge der Strecke BC kann gemessen werden; wir bezeichnen diese Länge mit c .

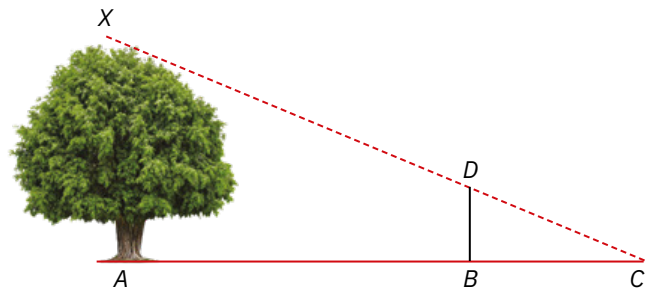


Abbildung 6

Aus dem Hauptsatz der Ähnlichkeit ergibt sich $\triangle CBD \sim \triangle CAX$, also $\frac{BD}{AX} = \frac{CB}{CA}$.

Daraus folgt, dass die Höhe des Baumes gleich ist mit $AX = \frac{BD \cdot AC}{BC} = \frac{b \cdot (a + c)}{c}$.

Setzt man beispielsweise $AB = a = 6$ m, $BD = b = 1$ m und misst $BC = 1,5$ m, beträgt die Höhe des Baumes 5 m.

2. Bestimmen der Entfernung zwischen zwei Punkten auf beiden Seiten eines Sees

In Abbildung 7 befinden sich Punkt Q (das Haus) und Punkt P (der Baum) auf gegenüberliegenden Seiten eines Sees.

Um die Entfernung zwischen dem Haus und dem Baum zu bestimmen, legen wir einen Punkt O fest, von dem aus die beiden Punkte sichtbar sind, und messen die Entfernungen $OP = u$ und $OQ = v$.

Betrachten wir eine positive Zahl $a < u$ und berechnen die Zahl $b = \frac{a \cdot v}{u}$; dann wählen wir die Punkte A und B , auf der Strecke OP bzw. OQ so aus, dass $OA = a$ und $OB = b$. Bei der Wahl von a achten wir darauf, dass die Gerade AB den See nicht „durchschneidet“. Dann messen wir die Strecke $AB = c$.



Abbildung 7

Unter den oben genannten Bedingungen ergibt sich $\frac{OA}{OP} = \frac{OB}{OQ}$ und nach dem Kehrsatz des Lehrsatzes des Thales ist $AB \parallel PQ$. Laut dem Hauptsatz der Ähnlichkeit erhalten wir $\triangle OAB \sim \triangle OPQ$, also:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{OA}{OP} \Rightarrow \frac{c}{PQ} = \frac{a}{u} \Rightarrow PQ = \frac{c \cdot u}{a}.$$

Nehmen wir zum Beispiel an, dass die Messungen $OP = u = 320$ m und $OQ = 200$ m ergeben.

Wir wählen $a = 8$ und finden $b = 5$. Wir stellen die Punkte A und B auf OP und OQ fest, sodass $OA = 8$ m und $OB = 5$ m ist, und dann, indem wir den Abstand zwischen A und B messen, erhalten wir $AB = c = 2,5$ m.

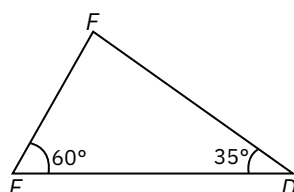
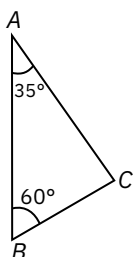
Dann beträgt die Entfernung PQ zwischen dem Haus und dem Baum 100 m.

Vorgeschlagene Aufgaben

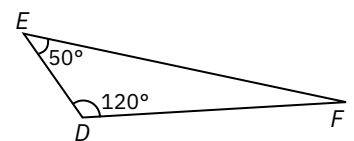
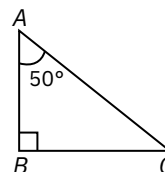


1. Betrachtet die Dreiecke ABC und DEF in den Situationen a–d. Bestimmt, in welchen der gegebenen Fälle die beiden Dreiecke ähnlich sind.

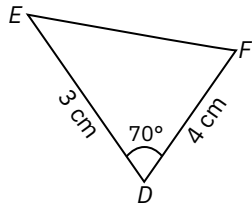
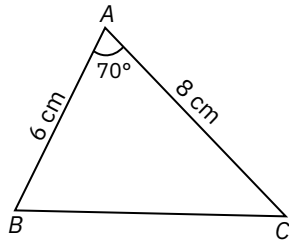
a.



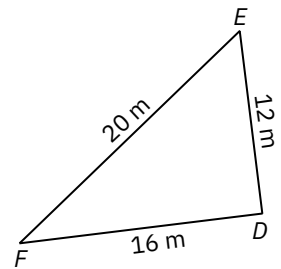
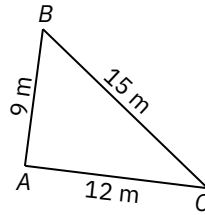
b.



c.



d.



2. Bestimmt, ob die Dreiecke ABC und MNP in jeder der folgenden Situationen ähnlich sind:

a. $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 62^\circ$, $\sphericalangle M = 40^\circ$, $\sphericalangle P = 78^\circ$;

b. $\sphericalangle B = 75^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$, $\sphericalangle M = 50^\circ$, $\sphericalangle P = 30^\circ$;

c. $\sphericalangle A = 80^\circ$, $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP}$, $\sphericalangle M = 80^\circ$;

d. $AB = 10$ cm, $AC = 14$ cm, $BC = 12$ cm, $MN = 15$ cm, $MP = 21$ cm, $NP = 18$ cm.

3. Betrachte man die ähnlichen Dreiecke ABC und MNP . Bekannt ist, dass $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 9$ cm und $MP = 16$ cm.

a. Berechne MN und NP .

b. Bestimme den Wert des Ähnlichkeitsverhältnisses k der beiden Dreiecke.

c. Zeige, dass $\frac{U_{ABC}}{U_{MNP}} = k$.

4. Im gleichschenkligen Dreieck ABC , $AB = AC$, ist bekannt, dass $\sphericalangle B = 72^\circ$. BD sei die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ABC$, $D \in AC$. Zeige, dass $\triangle ABC \sim \triangle BDC$.

5. Seien die gleichschenkligen Dreiecke ABC ($AB = AC$) und DEF ($DE = DF$). Wenn $\sphericalangle A = 64^\circ$ und $\sphericalangle F = 58^\circ$, beweise, dass $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

6. Seien die gleichseitigen Dreiecke ABC und DEF . Beweise, dass $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

7. Angenommen werden die rechtwinkligen Dreiecke ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$) und DEF ($\sphericalangle D = 90^\circ$). $AB = 6$ dm, $AC = 8$ dm, $DE = 1,8$ m und $DF = 2,4$ m.

a. Zeige, dass $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

b. Berechne die Flächeninhalte der beiden Dreiecke.

c. Überprüfe durch Berechnen, dass das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Dreiecke gleich dem Quadrat des Ähnlichkeitsverhältnisses ist.

8. Im Quadrat $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, sind die Punkte M und N auf den Strecken AO bzw. BO so anzunehmen, dass $AM = 2MO$ und $BO = 3NO$. Beweise, dass $\triangle OMN \sim \triangle OCD$.

9. Es sei das Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $AD \perp BC$. Beweise, dass:

a. $\triangle ABD \sim \triangle CAD$;

b. $\triangle ABD \sim \triangle CBA$;

c. $\triangle ADC \sim \triangle BAC$.

10. Im Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $AB > CD$, bezeichnen wir $AC \cap BD = \{O\}$. Wenn $AC = 18$ cm, $AB = 24$ cm und $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{3}$, bestimme die Längen der Strecken AO , OC und CD .

11. Im Dreieck ABC sei M ein Punkt auf der Seite BC . Man konstruiert $MN \parallel AC$ und $MP \parallel AB$, wobei $N \in AB$, $P \in AC$.

a. Zeige, dass $\frac{AP}{AC} = \frac{BN}{AB}$ ist.

b. Zeige, dass $\frac{AP}{AC} + \frac{AN}{AB} = 1$ ist.

12. Seien die Punkte D und E auf den Seiten AC und AB eines Dreiecks ABC , für das gilt $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$.

a. Zeige, dass $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

b. Zeige, dass $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$.

13. P sei ein Punkt auf der Seite BC des Parallelogramms $ABCD$. Es sei $AP \cap DC = \{Q\}$ und $DP \cap AB = \{R\}$.

a. Beweise, dass $\triangle ABP \sim \triangle QCP$.

b. Beweise, dass $\triangle CDP \sim \triangle BRP$.

14. Das Rechteck in Abbildung 8 ist eine Skizze einer Terrasse. Die Abmessungen der Terrasse sind $AB = 12$ m und $BC = 18$ m. Außerdem ist $AM = MB$ und $\sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle DNC$. Zeige, dass $MN \perp ND$.

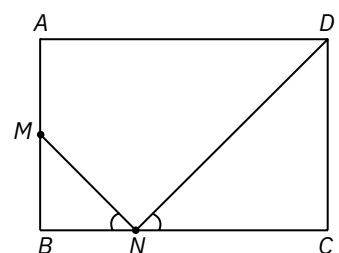


Abbildung 8



Wiederholung und Bewertung

Ähnlichkeit der Dreiecke

Proportionale Strecken; Lehrsatz der äquidistanten Parallelen • Lehrsatz des Thales; Kehrsatz des Lehrsatzes des Thales; Teilen einer Strecke in Teile, die proportional zu gegebenen Zahlen (Strecken) sind
• Ähnliche Dreiecke; Hauptsatz der Ähnlichkeit

Schreibt für die Aufgaben 1–22 den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, in eure Hefte. Für die Übungen 23–30 schreibt die vollständigen Lösungen auf.

1. Wenn $AB = 4$ cm und $CD = 8$ cm, dann ist $\frac{AB}{CD}$ gleich:
 a. 2; b. 0,5; c. 4; d. 8.
2. Wenn $AB = 4$ dm und $CD = 8$ cm, dann ist $\frac{AB}{CD}$ gleich:
 a. 5; b. 0,5; c. 2; d. 0,2.
3. Wenn M auf der Strecke AB liegt, sodass $AM = \frac{1}{3} \cdot AB$, dann ist $\frac{MB}{AB}$ gleich:
 a. $\frac{3}{2}$; b. $\frac{2}{3}$; c. $\frac{1}{3}$; d. 3.
4. Wenn M auf der Strecke AB liegt, $AB = 12$ cm und $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$, dann ist die Länge der Strecke MB gleich:
 a. $\frac{1}{12}$ cm; b. $\frac{36}{5}$ cm; c. 8 cm; d. 4 cm.
5. Die Dreiecke ABC und MPQ sind ähnlich. Wenn $\frac{AB}{MP} = \frac{2}{3}$, dann ist das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden Dreiecke gleich:
 a. $\frac{2}{3}$; b. $\frac{4}{3}$; c. $\frac{2}{9}$; d. $\frac{4}{9}$.
6. Im Dreieck ABC ist MN die Mittellinie, $MN \parallel BC$, $M \in AC$. Das Ähnlichkeitsverhältnis der Dreiecke AMN und ABC ist gleich:
 a. 2; b. 1; c. $\frac{1}{4}$; d. $\frac{1}{2}$.
7. Sei ein Dreieck ABC mit den Punkten D und E auf den Seiten AB bzw. AC , sodass $DE \parallel BC$ ist. Wenn $BD = 4$ cm, $AE = 3$ cm und $EC = 6$ cm, dann ist die Länge der Strecke AD gleich:
 a. 4 cm; b. 2 cm; c. 8 cm; d. 6 cm.
8. Sei ein Dreieck ABC mit den Punkten D und E auf den Seiten AB bzw. AC , sodass $DE \parallel BC$ ist. Wenn $BD = 8$ cm, $AD = 6$ cm und $AC = 21$ cm, dann ist die Länge der Strecke EC gleich:
 a. 9 cm; b. 10 cm; c. 12 cm; d. 8 cm.
9. Sei ein Dreieck ABC mit den Punkten D und E auf den Seiten AB bzw. AC , sodass $DE \parallel BC$. Wenn $AB = 12$ cm, $AC = 16$ cm und $BD = 3$ cm, dann ist die Länge der Strecke AE gleich:
 a. 10 cm; b. 4 cm; c. 12 cm; d. 9 cm.
10. Sei ein Dreieck ABC mit den Punkten D und E auf den Seiten AB bzw. AC , sodass DE parallel zu BC ist. Wenn $AB = 16$ cm, $EC = 9$ cm und $AD = 4$ cm, dann ist die Länge der Strecke AC gleich:
 a. 27 cm; b. 36 cm; c. 12 cm; d. 4 cm.
11. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle STN$, $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm und $ST = 4$ cm, dann ist die Länge der Strecke TN gleich:
 a. 4 cm; b. 6 cm; c. 8 cm; d. 10 cm.
12. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, $PQ = 6$ cm, $QR = 8$ cm, $PR = 10$ cm und $U_{ABC} = 48$ cm. Die Länge der Strecke AB ist gleich:
 a. 10 cm; b. 8 cm; c. 12 cm; d. 6 cm.
13. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, $AB = 6$ cm, $MN = 4$ cm, $MP = 2$ cm und $NP = 6$ cm, dann ist der Umfang des Dreiecks ABC gleich:
 a. 12 cm; b. 16 cm; c. 18 cm; d. 20 cm.
14. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle STN$, $AB = 8$ cm und das Ähnlichkeitsverhältnis der beiden Dreiecke 0,25 ist, dann ist die Länge der Strecke ST gleich:
 a. 4 cm; b. 6 cm; c. 8 cm; d. 10 cm.
15. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, $\sphericalangle A = 50^\circ$ und $\sphericalangle P = 60^\circ$, dann ist das Maß des Winkels N gleich:
 a. 50° ; b. 60° ; c. 70° ; d. 110° .
16. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, $\sphericalangle A = 60^\circ$ und $\sphericalangle B = 80^\circ$, dann ist das Maß des Winkels P gleich:
 a. 40° ; b. 60° ; c. 80° ; d. 140° .
17. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ und $\frac{AB}{BC} = 4$, dann ist der Wert des Verhältnisses $\frac{MN}{NP}$ gleich:
 a. 0,25; b. 4; c. 0,5; d. 2.



18. Wenn $\triangle ABC \sim \triangle MNP$, $U_{ABC} = 27$ cm und $U_{MNP} = 9$ cm, dann ist das Verhältnis $\frac{AB}{MN}$ gleich:

- a. 9; b. 3; c. 0,3; d. 1.

19. Im Trapez $ABCD$, AB parallel zu CD , ist, $AC \cap BD = \{O\}$ und $\frac{AO}{AC} = \frac{3}{4}$. Der Verhältniswert $\frac{DO}{BO}$ ist gleich:

- a. $\frac{1}{3}$; b. $\frac{4}{3}$; c. $\frac{1}{4}$; d. $\frac{1}{2}$.

20. Im Trapez $ABCD$, mit $AB \parallel CD$, $AC \cap BD = \{O\}$ und $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$, der Wert des Verhältnisses $\frac{AC}{OC}$ ist gleich:

- a. $\frac{2}{5}$; b. $\frac{7}{5}$; c. 0,2; d. 1,2.

21. Sei M der Mittelpunkt der Seite DC des Parallelogramms $ABCD$. Wenn $AM \cap DB = \{P\}$, dann ist das Verhältnis der Strecke DB und DP :

- a. 3; b. 2; c. 1; d. 4.

22. Sei das Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 4$ cm, $CD = 12$ cm, $AD = 6$ cm und $AD \cap BC = \{M\}$. Die Länge der Strecke MA ist gleich:

- a. 3 cm; b. 12 cm; c. 6 cm; d. 4 cm.

23. Welche der folgenden Aussagen ist wahr (W) und welche ist falsch (F)?

- Jedwelche zwei gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich.
- Das Verhältnis der Umfänge zweier ähnlicher Dreiecke ist gleich dem Quadrat des Ähnlichkeitsverhältnisses.
- Wenn $\triangle ABC \sim \triangle ACB$, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklige.
- Zwei mit einem dritten Dreieck ähnliche Dreiecke sind einander ähnlich.

24. Betrachtet die ähnlichen Dreiecke ABC und MPQ . Ordnet jeder Menge von Beziehungen den entsprechenden Namen des Ähnlichkeitsfalls zu.

A	B
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \sphericalangle C \equiv \sphericalangle Q$	SWS
$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \frac{AB}{MP} = \frac{AC}{MQ}$	SSS
$\frac{AB}{MP} = \frac{AC}{MQ} = \frac{BC}{PQ}$	WW
	WSW

25. Im Dreieck ABC ist $DE \parallel BC$, wobei D und E auf den Seiten AB bzw. AC liegen. Bestimmt die Zahlen a , b , c und d in der nachstehenden Tabelle, wobei bekannt ist, dass sich die Angaben in den Zeilen auf verschiedene Positionen des Punktes D beziehen.

$AD = 4$	$DB = 10$	$AE = 15$	$EC = a$
$AC = b$	$DE = 9$	$BC = 12$	$AE = 6$
$AB = 20$	$AE = 9$	$DB = c$	$EC = 3$
$DB = 5$	$AB = d$	$DE = 6$	$BC = 18$

26. Es seien die ähnliche Dreiecke ABC und MNP . Bestimmt die Zahlen a , b , c und d , die die Gleichheiten in der folgenden Tabelle bestätigen.

Wenn $\frac{AB}{MN} = 11$, dann $\frac{AC}{MP} = a$.

Wenn $3 \cdot AB = 7 \cdot MN$, dann $\frac{BC}{NP} = b + 1$.

Wenn $MN = 1,25 \cdot AB$, dann $\frac{MP}{AC} = c + 2$.

27. Betrachte das Dreieck ABC und die Punkte D , E und F auf den Seiten AB , BC bzw. AC , sodass $DF \parallel BC$ und $DE \parallel AC$.

- Wenn $5BE = 2BC$, berechne das Verhältnis der Strecken AF und FC .
- Wenn $AF = 7$ cm, $FC = 5$ cm, $EC = 14$ cm, dann berechne die Länge der Strecke BE .

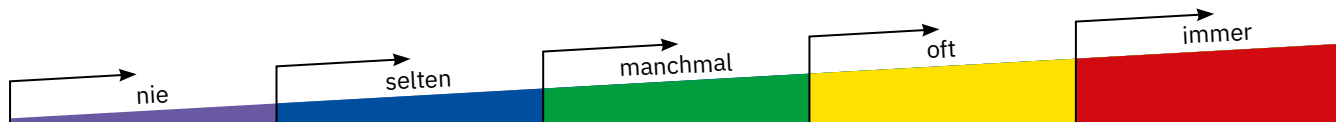
28. Im Dreieck ABC konstruiert man $AB \parallel FH \parallel DE$, wobei F , D auf der Seite AC , H , E auf der Seite BC und F auf der Strecke AD liegen. Da $AC = 30$ cm, $BH = 4$ cm, $HE = 6$ cm und $EC = 2$ cm, bestimme die Längen der Strecken AF , FD und DC .

29. Im Dreieck ABC liegen die Punkte M , N , P auf den Seiten BC , AB bzw. AC , sodass $BM = \frac{2}{5}BC$, $AN = \frac{2}{3}NB$ und $PC = \frac{3}{5}AC$. Zeigt, dass das Viereck $BMPN$ ein Parallelogramm ist.

30. Im Dreieck ABC liegt der Punkt M auf der Seite BC . Durch B und C verlaufen Parallelen zu AM , die AC und AB in den Punkten E bzw. F schneiden. Beweist, dass $\frac{AB}{BF} + \frac{AC}{CE} = 1$ ist.

Beobachtungsbogen

- Ich war sehr daran interessiert, Neues über Lösungsmethoden von Aufgaben zu lernen.
- Meine Teilnahme am Matheunterricht wurde von meinen Mitschülern und der Lehrkraft geschätzt.



E7

Metrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

1. Lektion

Orthogonale Projektionen auf einer Geraden. Der Höhensatz

2. Lektion

Der Kathetensatz

3. Lektion

Der Lehrsatz des Pythagoras

4. Lektion

Elemente der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

5. Lektion

Lösen des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung von Elementen in regelmäßigen Vielecken. Schätzen der Entfernungen in praktischen Situationen mithilfe der metrischen Beziehungen

Wiederholung und Bewertung



Die Anwendung des Lehrsatzes von Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck hilft Ingenieuren und Architekten bei der Planung von Brücken und Gebäuden. Dieser Satz ist in der zweidimensionalen Navigation nützlich, um die kürzeste Entfernung zu bestimmen, aber auch bei der Vermessung von steilen Berghängen oder Hügeln.

1. Lektion: Orthogonale Projektionen auf eine Gerade. Der Höhensatz

Schlüsselwörter

Projektion

Kathete

proportionales Mittel

Höhe

Hypotenuse

geometrisches Mittel

Orthogonale Projektionen auf eine Gerade



Mathe im Alltag

Der Strahl einer Taschenlampe fällt senkrecht auf eine Wand. Ein Ball, der durch den Strahl der Taschenlampe fällt, erzeugt einen Schatten an der Wand.

Was stellen wir fest?

Die imaginäre Linie zwischen dem Ball und seinem Schatten verläuft senkrecht zur Wand. Wenn wir den Ball schematisch durch den Punkt A und die Wand durch die Gerade d darstellen (Abbildung 1), ist der Schatten der Punkt A' , der auf der Geraden d liegt, wobei $AA' \perp d$. Wir erinnern uns, dass A' der Fußpunkt der Senkrechten aus dem Punkt A auf die Gerade d ist.

Wir sagen, dass A' die orthogonale Projektion des Punktes A auf die Gerade d ist.

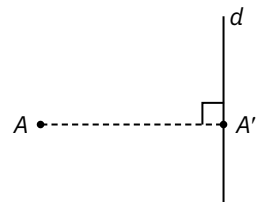


Abbildung 1



Merke dir!

Definition. Die Orthogonalprojektion eines Punktes auf eine Gerade ist der Fußpunkt der Senkrechten aus diesem Punkt auf die Gerade.

Vereinbarungsgemäß ist ein Punkt auf einer Geraden seine eigene Projektion auf diese Gerade.

In Abbildung 2 ist der Punkt M' die Projektion von Punkt M auf die Gerade d , und die Projektion von Punkt N auf die Gerade d fällt mit N zusammen. Wir schreiben: $M' = \text{Pr}_d M$ bzw. $N = \text{Pr}_d N$.

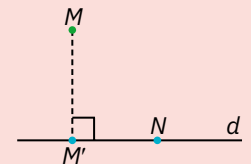
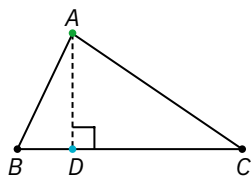


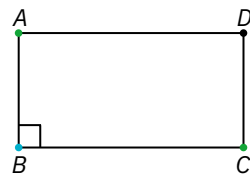
Abbildung 2



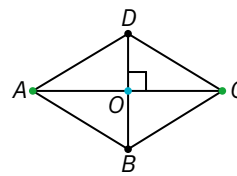
Beispiele



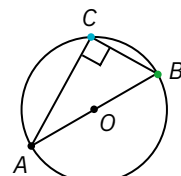
AD – Höhe in $\triangle ABC \Rightarrow$
 $\Rightarrow D = \text{Pr}_{BC} A$



$ABCD$ – Rechteck $\Rightarrow$
 $\Rightarrow B = \text{Pr}_{BC} A = \text{Pr}_{AB} C$



$ABCD$ – Rhombus
mit Mittelpunkt $O \Rightarrow$
 $\Rightarrow O = \text{Pr}_{AC} B = \text{Pr}_{BD} A$



$A, B, C \in \mathcal{C}(O, r)$, AB
Durchmesser $\Rightarrow C = \text{Pr}_{AC} B$

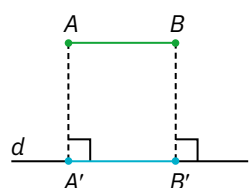
Projektion einer Strecke auf eine Gerade

Die (orthogonale) Projektion einer Strecke auf eine Gerade ist eine Strecke oder ein Punkt.

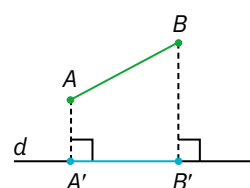
Die Länge der Projektion einer Strecke auf eine Gerade ist höchstens so lang wie die Länge der projizierten Strecke.



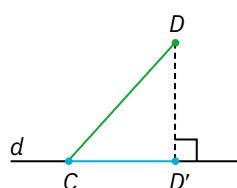
Beispiele



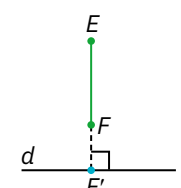
$A'B' = \text{Pr}_d AB$
 $AB \parallel d \Rightarrow A'B' = AB$



$A'B' = \text{Pr}_d AB$
 $AB \nparallel d \Rightarrow A'B' < AB$



$CD' = \text{Pr}_d CD$
 $C \in d \Rightarrow CD' < CD$



$EF \perp d \Rightarrow \text{Pr}_d EF = \{E'\}$

Projektion der Mitte einer Strecke

Wenn die Projektion der Strecke AB auf die Gerade d die Strecke $A'B'$ ist, dann ist die Projektion der Mitte der Strecke AB die Mitte der Strecke $A'B'$ (Abbildungen 3–4).

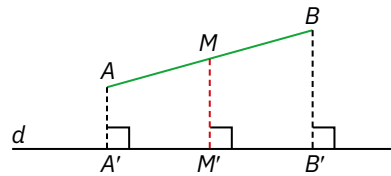


Abbildung 3

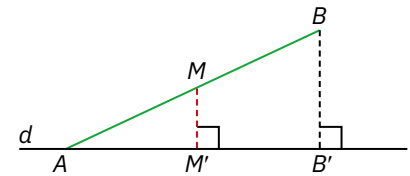


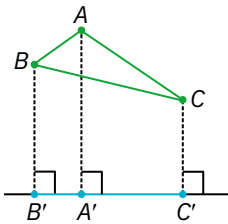
Abbildung 4

Merke dir!

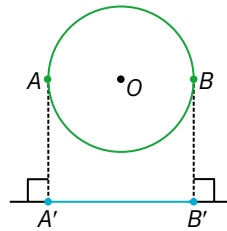
Die Orthogonalprojektion einer geometrischen Figur oder einer Menge von Punkten auf eine Gerade wird bestimmt, indem alle Punkte der gegebenen Figur oder Punktmenge auf diese Gerade projiziert werden.

Beispiele

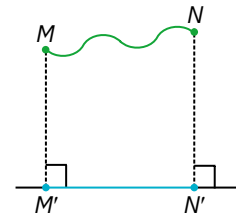
- Projektion eines Dreiecks auf eine Gerade



- Projektion eines Kreises auf eine Gerade



- Projektion einer unregelmäßigen Figur auf eine Gerade



Höhensatz

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck in A und seine Höhe AD , $D \in BC$ (Abbildung 5).

Da D die Projektion des Punktes A auf die Gerade BC ist, sehen wir, dass:

- die Projektion der Kathete AB auf die Hypotenuse BC die Strecke BD ist;
- die Projektion der Kathete AC auf die Hypotenuse BC die Strecke CD ist.

Unter diesen Bedingungen ergibt sich das unten dargestellte Ergebnis.

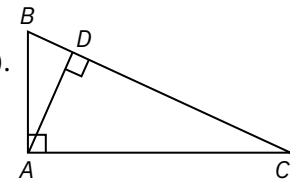
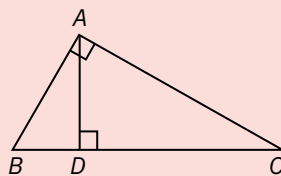


Abbildung 5

Merke dir!

Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Länge der Höhe, die der Hypotenuse entspricht, gleich dem Produkt der Längen der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.



Voraussetzung: $\triangle ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$,
 $AD \perp BC$, $D \in BC$

Schlussfolgerung: $AD^2 = BD \cdot CD$

Beweis:

Die Winkel ABD und CAD sind kongruent, da sie das gleiche Komplement (Winkel BAD) haben:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABD + \sphericalangle BAD &= 90^\circ \\ \sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD &= 90^\circ \end{aligned} \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD.$$

In den Dreiecken ABD und CAD haben wir: $\begin{cases} \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD \\ \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDA \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CAD.$

Dann ist $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$, woraus $AD^2 = BD \cdot CD$ folgt, was eigentlich hätte bewiesen werden müssen.

Die Schlussfolgerung des Höhensatzes kann in einer von zwei Formen geschrieben werden: $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ oder $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$, was zeigt, dass AD das proportionale Mittel (oder geometrische Mittel) der Längen der Strecken BD und CD ist.

So kann man sagen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Länge der der Hypotenuse entsprechenden Höhe das geometrische Mittel der Längen der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse ist.



Beispiel

In Abbildung 6 ist das Dreieck ABC rechtwinklig in A . Die Höhe AD bestimmt auf der Hypotenuse die Strecken $BD = 4$ cm und $CD = 9$ cm. Dann ist $AD^2 = BD \cdot CD = 36$ cm², woraus wir $AD = 6$ cm erhalten.

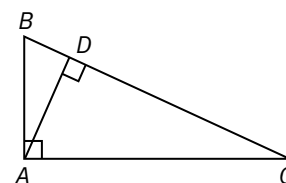


Abbildung 6



Bemerkung

In Anwendungen ist das folgende Ergebnis oft nützlich:

- In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Höhe, die der Hypotenuse entspricht, das Verhältnis des Produkts aus den Längen der Katheten und der Länge der Hypotenuse.

Wenn man den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ABC auf zwei Arten berechnet, ergibt sich mit den Bezeichnungen in Abbildung 6 Folgendes:

$$Fl_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \text{ bzw. } Fl_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC, \text{ also } AB \cdot AC = AD \cdot BC, \text{ also } AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}.$$



Merke dir!

Kehrsatz des Höhensatzes

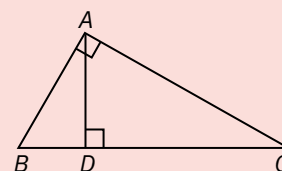
Es sei ein Dreieck ABC und ein Punkt D auf der Seite BC , sodass $AD \perp BC$ und $AD^2 = BD \cdot CD$. Dann ist das Dreieck ABC rechtwinklig in A .

Beweis:

Aus $AD^2 = BD \cdot CD$ ergibt sich $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$. Da $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDA$, folgt gemäß dem

Fall SWS die Ähnlichkeit $\triangle ADB \sim \triangle CDA$, also $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$.

Da $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABD = 90^\circ$ ist, ergibt sich $\sphericalangle ACD + \sphericalangle ABD = 90^\circ$, was bedeutet, dass $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ist, d. h., das Dreieck ABC ist rechtwinklig in A .



Übungen und gelöste Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Projektion der einen Kathete auf die Hypotenuse viermal so lang wie die Projektion der anderen Kathete auf die Hypotenuse. Wenn die Hypotenuse 30 Zentimeter lang ist, berechnet die Länge der Höhe, die der Hypotenuse entspricht.

Lösung:

Wir bezeichnen das rechtwinklige Dreieck ABC , mit $AB < AC$ und $\sphericalangle A = 90^\circ$; wir konstruieren die Höhe AD , $D \in BC$ (Abbildung 7).

Angenommen, $BC = 30$ cm und $CD = 4 \cdot BD$.

Da $BC = BD + CD = 5 \cdot BD$ ist, ergibt sich $BD = 6$ cm und $CD = 24$ cm.

Unter Anwendung des Höhensatzes ergibt sich $AD = \sqrt{BD \cdot CD} = 12$ cm.

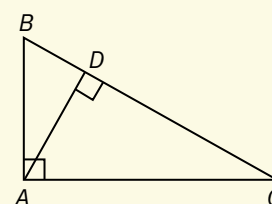


Abbildung 7

2. Im Rechteck $ABCD$ (Abbildung 8) konstruiert man die Senkrechte $CH \perp BD$, $H \in BD$. Wenn $DH = 8$ cm und $BH = 2$ cm berechnet die Länge der Strecke CH und den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

Lösung:

Wendet man den Höhensatz auf das rechtwinklige Dreieck CBD an, so ergibt sich Folgendes: $CH = \sqrt{BH \cdot DH} = 4$ cm.

Da $BD = BH + DH = 10$ cm, erhalten wir: $Fl_{ABCD} = 2 \cdot Fl_{BCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot CH \cdot BD = 40$ cm².

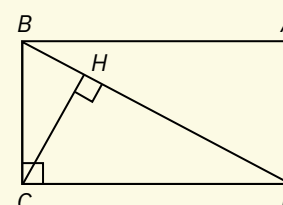


Abbildung 8

Vorgeschlagene Aufgaben



1. Übertrag die Zeichnung in Abbildung 9 ins Heft und konstruiert die orthogonalen Projektionen der Punkte A , B , C und der Strecke MN und PQ auf die Gerade d .

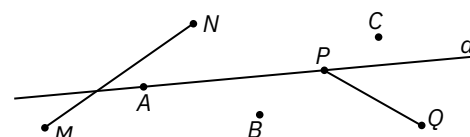


Abbildung 9

2. Gebt für jede der Abbildungen 10, 11 und 12 an, welches die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse sind:

a.

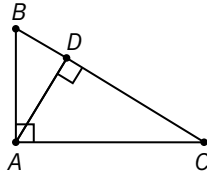


Abbildung 10

b.

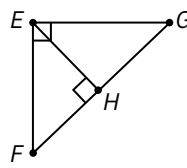


Abbildung 11

c.

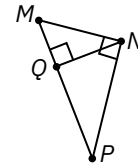


Abbildung 12

3. Es sei das Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $AD \perp BC$. Gebt den Wahrheitswert folgender Aussagen an:

- die Projektion von Punkt A auf die Gerade BC ist Punkt D ;
- die Projektion der Strecke BC auf die Gerade AB ist die Strecke AB ;
- die Projektion der Strecke AD auf die Gerade BC ist die Strecke DC ;
- die Projektion der Strecke AC auf die Gerade BC ist die Strecke DC ;
- die Projektion der Strecke AB auf die Gerade AC ist die Strecke AC ;
- die Projektion der Strecke AB auf die Gerade BC ist die Strecke BD .

4. Betrachtet das Dreieck ABC und die Punkte M, N, P auf der Seite AC , sodass $AM = MN = NP = PC$ gilt.

Wenn A', M', N', P' die Projektionen der Punkte A, M, N bzw. P auf die Gerade BC sind, bestimmt die Werte der

Verhältnisse $\frac{A'M'}{M'N'}, \frac{P'C}{P'N'}, \frac{A'N'}{CN'}, \frac{M'N'}{M'C}, \frac{A'C}{M'P'}$.

5. Betrachtet das Dreieck MNP mit $\sphericalangle M = 90^\circ$. Wenn $NP = 35$ cm ist, bestimmt die Längen der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse, wobei ihr wisst, dass sie umgekehrt proportional zu den Zahlen 0,5 und 0,3 sind.

6. Es sei das Dreieck ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $AD \perp BC$, $D \in BC$.

- Wenn $BD = 20$ cm und $DC = 5$ cm, berechnet AD .
- Wenn $BD = 8$ cm und $AD = 12$ cm, berechnet DC .
- Wenn $AD = 6$ cm und $DC = 9$ cm, berechnet BD .
- Wenn $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm, berechnet AD .
- Wenn $AD = 0,5$ m und $BC = 20$ dm, berechnet $AB \cdot AC$.
- Wenn $BC = 35$ cm und $CD = 4 \cdot BD$, berechnet BD, DC, AD .

7. Konstruiert im Dreieck ABC die Höhe AD , wobei der Punkt D innerhalb der Seite BC liegt. Wenn $AD = 2\sqrt{6}$ cm, $BD = 4$ cm und $CD = 6$ cm, zeigt, dass das Dreieck ABC in A rechtwinklig ist.

8. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Länge der Hypotenuse 34 cm, und die Längen der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse sind direkt proportional zu den Zahlen 0,6 und 0,75. Berechnet die Länge der Höhe, die der Hypotenuse entspricht.

9. Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $BC = 25$ cm bezeichnet mit D die Projektion des Punktes A auf die Gerade BC . Wenn die Flächeninhalte der Dreiecke ADB und ADC proportional zu 9 und 16 sind, ist die Länge der Strecke AD zu berechnen.

10. Konstruiert im Rechteck $ABCD$ die Senkrechte $AP \perp BD$, $P \in BD$. Wenn $BP = 20$ cm und $PD = 5$ cm, berechnet die Länge der Strecke AP .

11. Im Rhombus $ABCD$ bezeichnet man mit O den Schnittpunkt der Diagonalen und mit M die Projektion des Punktes O auf die Gerade AB . Wenn $OM = 6$ cm und $MB = 4$ cm, bestimmt die Länge der Strecke AM und den Umfang des Rhombus $ABCD$.

12. Betrachtet das gleichschenklige Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB < CD$. Es ist bekannt, dass $BD \perp BC$, $AB = 4$ cm und $DC = 8$ cm. Es sei $BM \perp DC$, $M \in DC$. Zeigt, dass $MC = 2$ cm ist. Bestimmt BM .

13. Sei das Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $AB < CD$, $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $DB \perp BC$. P sei die Projektion des Punktes B auf die Gerade CD . Wenn wir wissen, dass $AB = 16$ cm und $BP = 12$ cm sind, zeigt, dass $DC = 25$ cm.

Test

1. Projiziert die Eckpunkte des Dreiecks ABC auf die Gerade d , wobei:

- $d \parallel AB$;
- $d \perp BC$;
- $d = AC$. (3 Pkte.)

2. Die Projektionen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse haben die Längen 9 cm und 25 cm. Bestimmt die Länge der Höhe aus dem rechten Winkel. (3 Pkte.)

3. Konstruiert im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ die Höhe AD , mit $D \in BC$. Wenn die Längen der Strecken BD und DC proportional zu 2 und 8 sind, und $BC = 20$ cm, berechnet die Längen der Strecken BD, DC und AD . (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



2. Lektion: Der Kathetensatz

Schlüsselwörter

Projektion

Kathete

geometrisches Mittel

Höhe

Hypotenuse

ähnliche Dreiecke

Der Kathetensatz

Mathe im Alltag

Betrachten wir das Dreieck ABC , rechtwinklig in A , in dem wir die Höhe AD , $D \in BC$, konstruiert haben. Aus dem Dreieck ABC schneiden wir entlang der Höhe AD zwei Dreiecke aus, wie in Abbildung 1 dargestellt.

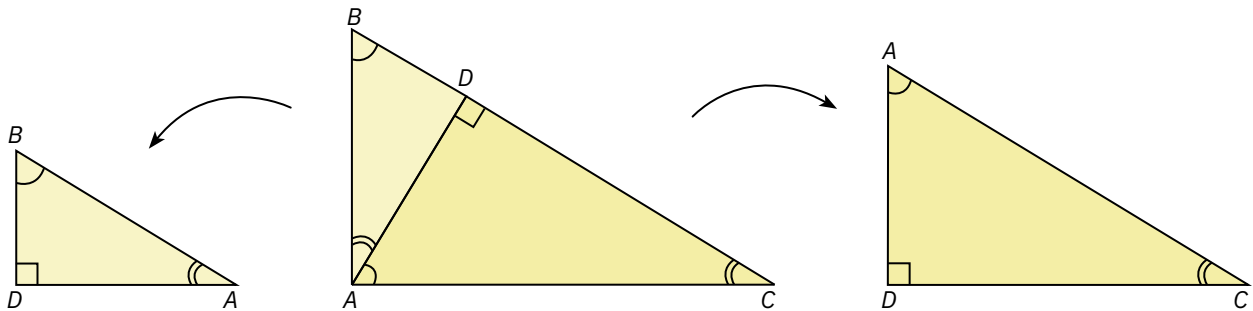


Abbildung 1

Was stellen wir fest?

Analysiert man die Dreiecke ABC , DBA und DAC , so stellt man fest, dass $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDA = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ und darüber hinaus:

- der Winkel B ist der gemeinsame Winkel der rechtwinkligen Dreiecke DBA und ABC ;
- der Winkel C ist der gemeinsame Winkel der rechtwinkligen Dreiecke DAC und ABC .

Da außerdem Winkel mit gleichem Komplement kongruent sind, folgt daraus, dass $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACB$.

Nach dem WW-Ähnlichkeitsfall erhalten wir $\triangle DBA \sim \triangle ABC$ und $\triangle DAC \sim \triangle ABC$.

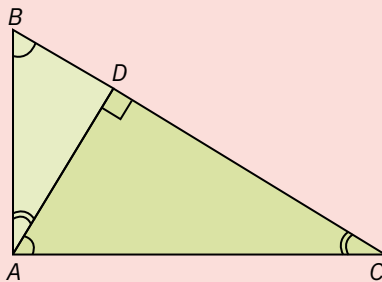
Historische Anmerkung. Das obige Ergebnis erscheint in dem berühmtesten geometrischen Buch des Altertums, Euklids Elemente, in Buch VI (Satz 8), unter der folgenden Aussage:

Lehrsatz. In einem rechtwinkligen Dreieck bestimmt die der Hypotenuse entsprechende Höhe zwei Dreiecke, die einander ähnlich sind und beide dem ursprünglichen Dreieck ähnlich sind.

Merke dir!

Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Länge jeder Kathete gleich dem Produkt der Länge der Hypotenuse und der Länge der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse.



Voraussetzung: $\triangle ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$,
 $AD \perp BC$, $D \in BC$

Schlussfolgerung: $AB^2 = BC \cdot BD$
 $AC^2 = BC \cdot CD$

Beweis:

Jedes der Dreiecke DBA und DAC ist ähnlich mit dem Dreieck ABC . Dann:

$$\triangle DBA \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BD;$$

$$\triangle DAC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CD.$$

Der erste Kehrsatz des Kathetensatzes

Wenn im Dreieck ABC D ein Punkt auf der Strecke BC ist, sodass $AD \perp BC$ und eine der Gleichungen erfüllt ist:

$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ oder } AC^2 = BC \cdot CD, \text{ dann ist } \sphericalangle BAC = 90^\circ.$$

Der zweite Kehrsatz des Kathetensatzes

Wenn D im Dreieck ABC ein Punkt auf der Strecke BC ist, sodass die Beziehungen gleichzeitig auftreten:

$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ und } AC^2 = BC \cdot CD, \text{ dann ist } \sphericalangle BAC = 90^\circ \text{ und } AD \perp BC.$$

Kritisches Denken

Anwendungen der Geometrie in der Algebra. Ungleichheit der Mittelwerte

Gegeben sind zwei positive reelle Zahlen a und b . Die Zahlen:

$$m_g(a, b) = \sqrt{ab}, \quad m_a(a, b) = \frac{a+b}{2}, \quad m_h(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$$

sind die drei von Pythagoras entdeckten klassischen Mittelwerte: das geometrische Mittel (m_g), das arithmetische Mittel (m_a) und das harmonische Mittel (m_h).

Der folgende Aufbau ermöglicht eine geometrische Interpretation der drei Durchschnittswerte sowie einen offensichtlichen Beweis für die (wahrscheinlich) weltweit am häufigsten verwendete Ungleichung:

$$m_h(a, b) \leq m_g(a, b) \leq m_a(a, b). \quad (\text{Ungleichheit der Mittelwerte})$$

Da es offensichtlich ist, dass für $a = b$, $m_h(a, b) = m_g(a, b) = m_a(a, b) = a = b$ gilt, wird angenommen, dass $a < b$ (der Fall $a > b$ wird analog behandelt).

In Abbildung 2:

- betrachtet die Strecken $BD = a$ und $CD = b$;
- konstruiert einen Kreis mit dem Durchmesser $BC = a + b$ und dem Mittelpunkt O ;
- zieht die Senkrechte $DA \perp BC$ (A liegt auf dem Kreis).

Im rechtwinkligen Dreieck ABC :

- AO ist Seitenhalbierende, also $AO = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{a+b}{2} = m_a(a, b)$;
- AD ist die Höhe und laut Höhensatz folgt:

$$AD = \sqrt{BD \cdot CD} = \sqrt{ab} = m_g(a, b).$$

Da die Länge der Höhe kleiner ist als die Länge der Seitenhalbierenden (die Senkrechte ist „kürzer“ als die Schräge (Schiefe)), folgt daraus, dass $AD < AO$, d. h., $m_g(a, b) < m_a(a, b)$.

H sei die Projektion des Punktes D auf AO . Mit dem Kathetensatz, angewendet auf das Dreieck DAO , erhalten wir

$$AD^2 = AH \cdot AO, \text{ also: } AH = \frac{AD^2}{AO} = \frac{2ab}{a+b} = m_h(a, b).$$

Dann ist $AH < AD < AO$, was zeigt, dass $m_h(a, b) < m_g(a, b) < m_a(a, b)$.

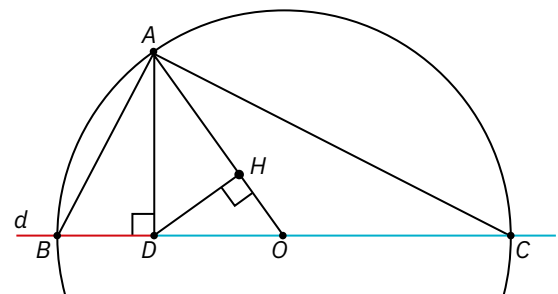


Abbildung 2

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Konstruiert im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AB = AC$ die Höhe AD , $D \in BC$ (Abbildung 3). Die Senkrechte von D auf AB schneidet die Seite AB in E . Da $AD = 8$ cm und $AE = 6,4$ cm ist, ist der Umfang des Dreiecks ABC zu bestimmen.

Lösung:

Wendet man den Kathetensatz auf das rechtwinklige Dreieck ADB an, so ergibt sich $AD^2 = AE \cdot AB$, was $AB = 10$ cm ergibt. Dann ist $BE = AB - AE = 3,6$ cm und, wenn man den Kathetensatz erneut auf das Dreieck ADB anwendet, erhält man $BD^2 = BE \cdot BA$, also $BD = 6$ cm.

Daraus ergibt sich: $BC = 2 \cdot BD = 12$ cm und der Umfang des Dreiecks ABC beträgt 32 cm.

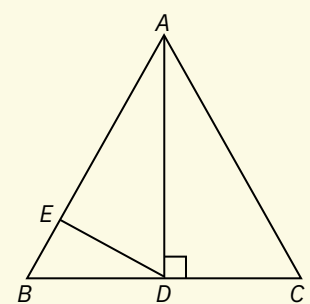


Abbildung 3

2. In dem rechtwinkligen Trapez $ABCD$ mit $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ steht die Diagonale BD senkrecht auf die Seite BC (Abbildung 4). Wenn $AB = 15$ cm und $CD = 20$ cm ist, bestimmt:
 - a. die Seitenlänge BC ;
 - b. den Umfang des Dreiecks ABD .



Lösung:

Wir konstruieren die Senkrechte $BE \perp CD$, $E \in CD$.

Das Viereck $ABED$ ist ein Rechteck, also ist $DE = AB = 15$ cm und $CE = 5$ cm.

a. Da BE die Höhe im rechtwinkligen Dreieck BDC ist, ergibt der Kathetensatz $BC^2 = CD \cdot CE$, also $BC = 10$ cm.

b. Um die Länge der Strecke BD zu bestimmen, wenden wir erneut den Kathetensatz im Dreieck BDC an. Dann ist $DB^2 = DE \cdot DC$, also $DB = 10\sqrt{3}$ cm.

Die Strecke AD ist kongruent zur Strecke BE , und unter Anwendung des Höhensatzes ist

$$BE = \sqrt{ED \cdot EC} = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Der Umfang des Dreiecks ABD ist also $U_{ABD} = AD + AB + DB = 15\sqrt{3} + 15$ cm.

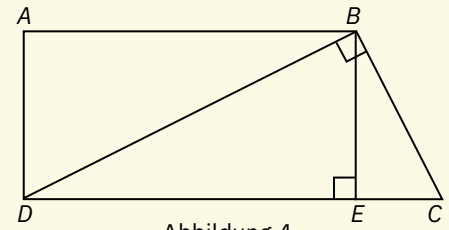


Abbildung 4

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Bestimmt für jede der Abbildungen 5–8 die Länge der unbekannten Kathete (die Maße sind in cm angegeben):

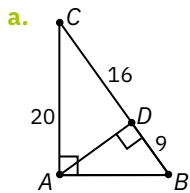


Abbildung 5

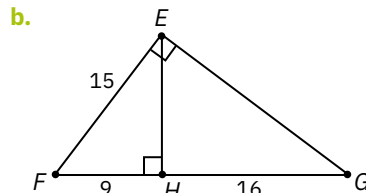


Abbildung 6

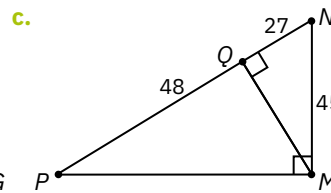


Abbildung 7

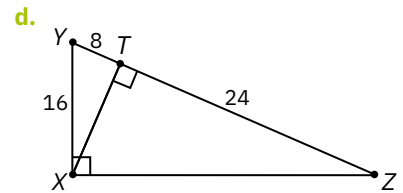


Abbildung 8

2. Im Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $\sphericalangle B = 60^\circ$ beträgt die Länge der Kathete AB 4 cm. Bestimmt:

- die Länge der Strecke BC ;
- die Längen der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse;
- die Länge der Höhe, die der Hypotenuse entspricht;
- die Länge der Strecke AC .

3. Es sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $AD \perp BC$, $D \in BC$.

- Wenn $AB = 18$ cm und $BD = 12$ cm ist, berechne BC .
- Wenn $AC = 4$ cm und $BC = 8$ cm ist, berechne CD .
- Wenn $BD = 15$ cm und $BC = 60$ cm ist, berechne AB und AC .
- Wenn $CD = \frac{3}{4} \cdot BC$ und $AB = 12$ cm ist, berechne BC und AC .
- Wenn $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{7}$ und $BC = 36$ cm ist, berechne BD , DC , AB , AC .

4. In einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse von 36 cm beträgt die Projektion einer Kathete auf die Hypotenuse 16 cm. Bestimmt die Länge der anderen Kathete.

5. Die Projektionen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse haben die Längen 2,4 cm und 9,6 cm. Berechne den Umfang des Dreiecks.

6. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Seitenhalbierende in Bezug auf die Hypotenuse $AM = 10$ cm und $\sphericalangle MAB = 60^\circ$. Berechne $\frac{DB}{DC}$, wobei D die Projektion des Punktes A auf BC ist.

7. Im rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ ist die Hypotenuse BC 16 cm lang. Berechne den Umfang des Dreiecks ABC .

Test

1. Es sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $AD \perp BC$, $D \in BC$.

Wissend, dass $\frac{DC}{BC} = \frac{1}{4}$ und $AC = 12$ cm, berechne die Längen von BC und AB .

(3 Pkte.)

2. In dem in A rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Seitenhalbierende AM 6 cm lang und der Winkel B beträgt 60° . Berechne:

- die Längen der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse;
- die Längen der Katheten AB und AC .

(3 Pkte.)

3. In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der Längen der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse gleich $\frac{4}{9}$, und der Flächeninhalt des Dreiecks ist gleich 624 cm^2 . Berechne den Umfang des Dreiecks. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.

3. Lektion: Der Lehrsatz des Pythagoras

Schlüsselwörter

Kathete

Hypotenuse

pythagoreisches Tripel

Lehrsatz des Pythagoras

Mathe im Alltag

Ein Roboter, der darauf programmiert ist, rote, gelbe und blaue LEGO-Steine zu sortieren, platzierte die Steine, wie in Abbildung 1 dargestellt.

Die roten Steine bilden ein 5×5 -Quadrat, die blauen Steine ein 4×4 -Quadrat, die gelben Steine ein 3×3 -Quadrat und die drei Quadrate ein rechtwinkliges Dreieck.

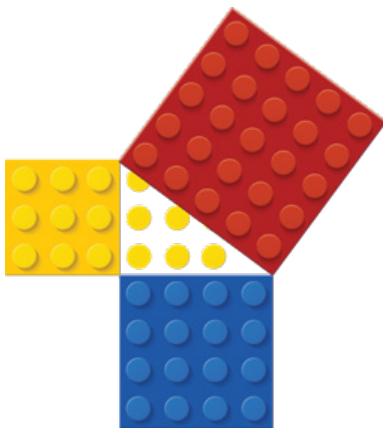


Abbildung 1

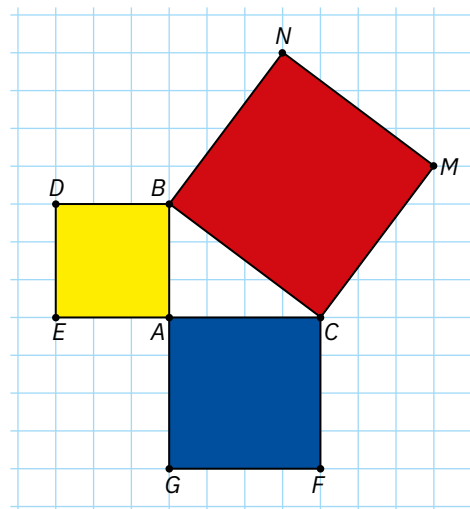


Abbildung 2

Was stellen wir fest?

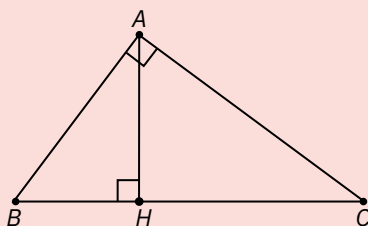
Der Flächeninhalt der roten Teile ist gleich der Summe der Flächeninhalte der anderen Teile. Analysiert man das in Abbildung 2 dargestellte mathematische Modell, so stellt man fest, dass in einem in A rechtwinkligen Dreieck ABC , auf dessen Außenseite man die Quadrate $ABDE$, $ACFG$ und $BCMN$ konstruiert, die Summe der Flächeninhalte der auf den Katheten konstruierten Quadrate gleich dem Flächeninhalt des auf der Hypotenuse konstruierten Quadrats ist:

$$Fl_{BCMN} = Fl_{ABDE} + Fl_{ACFG} \text{ oder, äquivalent, } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Merke dir!

Der Lehrsatz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Längen der Katheten gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse.



Voraussetzung: $\triangle ABC$, $\sphericalangle A = 90^\circ$

Schlussfolgerung: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Beweis:

Wir konstruieren die Höhe, die der Hypotenuse entspricht: $AH \perp BC$, $H \in BC$.

Durch Anwendung des Kathetensatzes erhalten wir $AB^2 = BH \cdot BC$ bzw. $AC^2 = CH \cdot BC$.

Setzt man die beiden Beziehungen zusammen, ergibt sich:

$$AB^2 + AC^2 = BH \cdot BC + CH \cdot BC = BC \cdot (BH + CH) = BC \cdot BC = BC^2.$$



Der Lehrsatz des Pythagoras gilt für die Bestimmung der Länge einer Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn die Längen der anderen beiden Seiten bekannt sind.

Für das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$ gilt also:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}; \quad AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}; \quad AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}.$$

Beispiele

Bei den rechtwinkligen Dreiecken ABC , DEF und MNP in den Abbildungen 3–5 sind die Längen zweier Seiten angegeben. Mithilfe des Lehrsatzes von Pythagoras bestimmen wir die Länge der dritten Seite.



Abbildung 3

$AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13 \text{ cm}$$

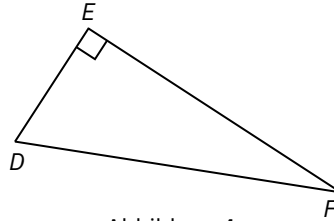


Abbildung 4

$DE = 8 \text{ cm}$, $EF = 17 \text{ cm}$

$$DF = \sqrt{EF^2 - DE^2} = 15 \text{ cm}$$

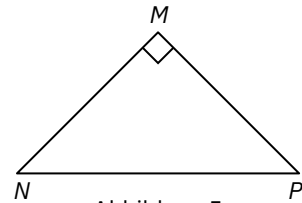


Abbildung 5

$MN = MP = a \text{ cm}$

$$NP = \sqrt{MN^2 + MP^2} = a\sqrt{2} \text{ cm}$$

Merke dir!

Kehrsatz des Lehrsatzes von Pythagoras

Wenn in einem Dreieck die Summe der Quadrate der Längen von zwei Seiten gleich dem Quadrat der Länge der dritten Seite ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Beweis: Es sei ein Dreieck ABC mit $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Wir zeigen, dass $\sphericalangle A = 90^\circ$ ist.

Da $BC^2 > AB^2 + AC^2 > AB^2$ ist, folgt daraus, dass $BC > AB$ ist, also ist der Winkel C spitz und kleiner als der Winkel A . Nehmen wir absurderweise an, dass $\sphericalangle A \neq 90^\circ$ ist. Dann ist die Projektion des Punktes B auf die Gerade AC ein Punkt E , $E \neq A$.

Durch Anwendung des Lehrsatzes von Pythagoras auf die rechtwinkligen Dreiecke EBC und EAB folgt $BC^2 = EB^2 + EC^2$ bzw. $AB^2 = EB^2 + EA^2$. Wir erhalten $EC^2 - EA^2 = BC^2 - AB^2$, und aus der Voraussetzung folgt, dass $EC^2 - EA^2 = AC^2$ (1).

Je nach dem Maß des Winkels A ergeben sich zwei Fälle (Abbildung 6a bzw. Abbildung 6b):

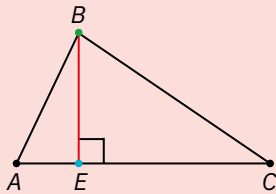


Abbildung 6a $\sphericalangle A < 90^\circ$: E liegt zwischen A und C

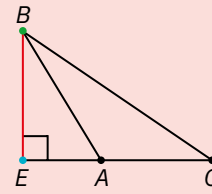


Abbildung 6b $\sphericalangle A > 90^\circ$: A liegt zwischen E und C

Fall I

Wenn $\sphericalangle A < 90^\circ$, dann ist $EC = AC - AE$ (Abbildung 6a), also $EC^2 = (AC - AE)(AC - AE) = AC^2 - 2AC \cdot AE + AE^2$. Aus (1) ergibt sich $AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AE + AE^2 - AE^2 = AC^2$, woraus folgt, dass $2 \cdot AC \cdot AE = 0$, d. h., $AE = 0$, ein Widerspruch zu $A \neq E$.

Fall II

Wenn A zwischen E und C liegt, dann ist $EC = AC + AE$ (Abbildung 6b). Wir erhalten $EC^2 = AC^2 + 2 \cdot AC \cdot AE + AE^2$ und setzen in (1) ein, dass $2 \cdot AC \cdot AE = 0$, d. h., $AE = 0$, was ein Widerspruch zu $A \neq E$ ist.

Die Vermutung ist also falsch, daher $\sphericalangle A = 90^\circ$.

Kritisches Denken

Analysieren wir sorgfältig Abbildung 7, in der ein in A rechtwinkliges Dreieck ABC gegeben ist, in dessen Außenbereich wir die Quadrate $ABDE$, $ACFG$ und BCM konstruiert haben. Wir bezeichnen mit H die Projektion von A auf BC und mit P den Schnittpunkt der Geraden AH und MN .

Gleichfarbige Flächeninhalte sind gleich, weil:

$$Fl_{ABDE} = AB^2 = BH \cdot BC = BH \cdot BN = Fl_{BHPN};$$

$$Fl_{ACFG} = AC^2 = CH \cdot CB = CH \cdot CM = Fl_{CHPM};$$

Ergebnis: $Fl_{ABDE} + Fl_{ACFG} = Fl_{BHPN} + Fl_{CHPM} = Fl_{BCM}$

d. h., die Summe der Flächeninhalte der Quadrate, die außerhalb des Quadrats liegen, ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrats, das außerhalb der Hypotenuse liegt.

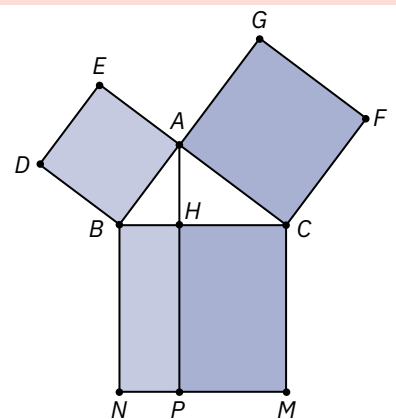


Abbildung 7

Gruppenarbeit

Pythagoreische Tripel

Ein Tripel von natürlichen Zahlen (a, b, c) , die nicht null sind und die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, wird als *pythagoreisches Tripel* bezeichnet.

Der Kehrsatz des Lehrsatzes von Pythagoras zeigt, dass ein Dreieck rechtwinklig ist, wenn seine Seitenlängen ein pythagoreisches Tripel bilden.

Gruppenaufgaben

1. Überprüft in Gruppen von 3–4 Schülern, ob die folgenden Tripel pythagoreisch sind:

a.	(3, 4, 5)	e.	(5, 12, 13)	i.	(8, 15, 17)	m.	(7, 24, 25)
b.	(20, 21, 29)	f.	(12, 35, 37)	j.	(9, 40, 41)	n.	(28, 45, 53)
c.	(11, 60, 61)	g.	(16, 63, 65)	k.	(33, 56, 65)	o.	(48, 55, 73)
d.	(13, 84, 85)	h.	(36, 77, 85)	l.	(39, 80, 89)	p.	(65, 72, 97)

2. Beweist, dass, wenn m, n und k natürliche Zahlen ungleich null sind, wobei $m > n$, dann bilden die Zahlen

$$a = 2kmn, \quad b = k(m^2 - n^2), \quad c = k(m^2 + n^2)$$

ein pythagoreisches Tripel.

Außerdem kann gezeigt werden, dass jedes pythagoreische Tripel die oben genannte Form hat.

3. Informiert euch im Internet über die pythagoreischen und die heronschen Tripel und organisiert eine Diskussion über deren praktische Anwendung.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. Ein gleichschenkliges Dreieck hat die Schenkel von 10 cm und die Basis von 12 cm. Berechnet die Länge der Höhe, die der Basis entspricht.

Lösung:

Unter Verwendung der Bezeichnungen in Abbildung 8 ergibt sich $BC = 12$ cm und $AB = AC = 10$ cm.

Die Höhe AD ist auch Seitenhalbierende, also $BD = \frac{1}{2} \cdot BC = 6$ cm.

Unter Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck DAB , mit $\sphericalangle D = 90^\circ$, erhalten wir $AB^2 = AD^2 + DB^2$, also $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \sqrt{100 - 36}$ cm = 8 cm.

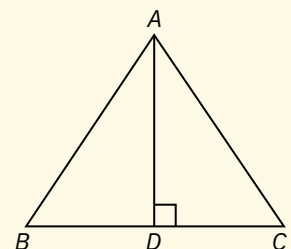


Abbildung 8

2. Die Diagonalen eines Rhombus sind 3 dm bzw. 16 cm. Bestimmt den Umfang des Rhombus.

Lösung:

Wir bezeichnen den Rhombus mit $ABCD$, wobei O der Schnittpunkt der Diagonalen ist (Abbildung 9).

Dann ist $AC = 3$ dm = 30 cm und $BD = 16$ cm.

Daraus ergibt sich $AO = 15$ cm, $OB = 8$ cm, und unter Anwendung des Lehrsatzes von Pythagoras im Dreieck OAB ergibt sich $AB^2 = AO^2 + OB^2$, wobei $AB = 17$ cm ist. Der Umfang des Rhombus ist $4 \cdot 17 = 68$ cm.

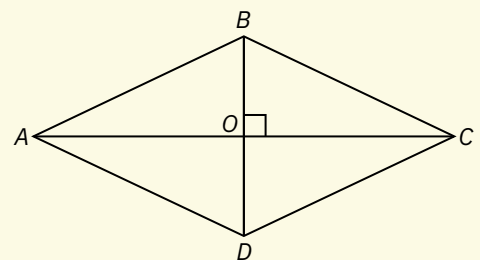


Abbildung 9

3. Im rechtwinkligen Trapez $ABCD$ mit $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ sind

$BC = 10$ cm, $BD = 10\sqrt{3}$ cm und $CD = 20$ cm (Abbildung 10).

- a. Zeigt, dass die Geraden BC und BD senkrecht aufeinander stehen.
b. Berechnet den Flächeninhalt des Trapezes.

Lösung:

- a. Beachtet, dass $BD^2 + BC^2 = 400 = CD^2$ ist.

Aus dem Kehrsatz des Lehrsatzes von Pythagoras ergibt sich, dass das Dreieck BCD rechtwinklig in B ist. Folglich ist $BC \perp BD$.

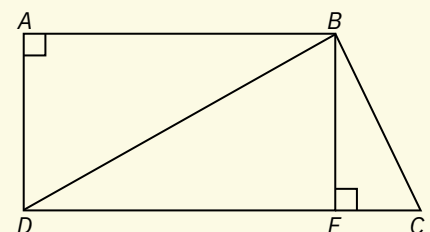


Abbildung 10



- b. Wir konstruieren die Senkrechte $BE \perp CD$, $E \in CD$. Da BE die Höhe im rechtwinkligen Dreieck BDC ist, ergibt sich $BE = \frac{BD \cdot BC}{CD} = 5\sqrt{3}$ cm.

Das Viereck $ABED$ ist ein Rechteck, also $AD = BE = 5\sqrt{3}$ cm.

Wendet man den Satz des Pythagoras auf das Dreieck ABD an, so erhält man $AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 15$ cm.

Der Flächeninhalt des Trapezes ist $Fl_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB + CD) = \frac{175\sqrt{3}}{2}$ cm².

4. Betrachtet das Dreieck ABC . Zeigt, dass:

a. wenn $\sphericalangle A < 90^\circ$ ist, dann ist $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot Pr_{AB} AC$;

b. wenn $\sphericalangle A > 90^\circ$, dann ist $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot Pr_{AB} AC$.

Lösung:

Einer der Winkel B oder C des Dreiecks ist spitz. Wir nehmen weiter an, dass $\sphericalangle B < 90^\circ$ ist. Wir bezeichnen mit D die Projektion von C auf AB ; dann ist $Pr_{AB} AC = AD$.

Je nach dem Maß des Winkels A (spitz oder stumpf) sind zwei Konfigurationen möglich:

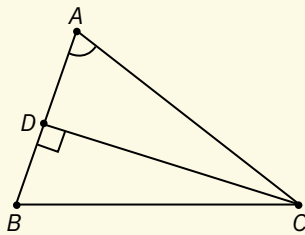


Abbildung 11: $\sphericalangle A < 90^\circ$

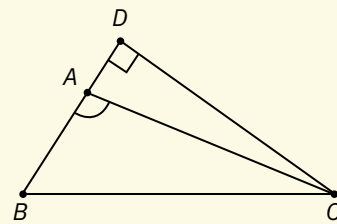


Abbildung 12: $\sphericalangle A > 90^\circ$

- a. Wenn der Winkel A spitz ist, dann liegt der Punkt D innerhalb der Seite AB (Abbildung 11).

Mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck BCD erhalten wir:

$$\begin{aligned} BC^2 &= CD^2 + DB^2 = AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2 = \\ &= AC^2 - AD^2 + (AB - AD)(AB - AD) = \\ &= AC^2 - AD^2 + AB^2 - AB \cdot AD - AD \cdot AB + AD^2 = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AD. \end{aligned}$$

- b. Wenn der Winkel A stumpf ist, dann liegt der Punkt D auf der Verlängerung der Seite AB (Abbildung 12).

Wendet man den Satz des Pythagoras noch einmal auf das Dreieck BCD an, erhält man:

$$\begin{aligned} BC^2 &= CD^2 + DB^2 = AC^2 - AD^2 + (AB + AD)^2 = \\ &= AC^2 - AD^2 + (AB + AD)(AB + AD) = \\ &= AC^2 - AD^2 + AB^2 + AB \cdot AD + AD \cdot AB + AD^2 = \\ &= AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AD. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die obige Aufgabe ist in der Literatur als der *verallgemeinerte Satz des Pythagoras* bekannt. Er gibt auch ein Kriterium für die Bestimmung der Art eines Winkels (oder Dreiecks). Gegeben sei also ein Dreieck ABC :

- wenn $AB^2 + AC^2 > BC^2$, dann $\sphericalangle A < 90^\circ$;
- wenn $AB^2 + AC^2 < BC^2$, dann $\sphericalangle A > 90^\circ$.

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Bestimmt für jede der Abbildungen 13–15 die Länge der Hypotenuse (alle Strecken werden in cm gemessen):

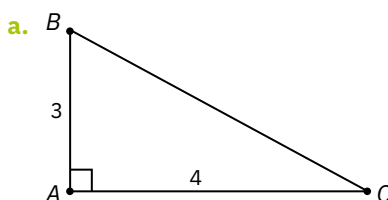


Abbildung 13

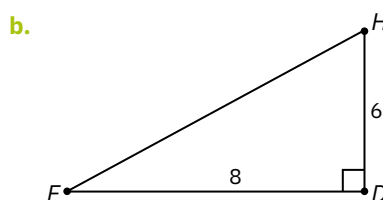


Abbildung 14

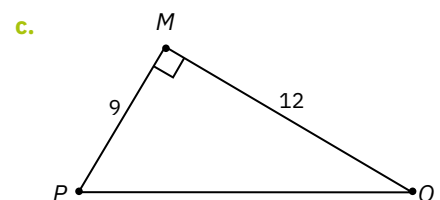


Abbildung 15

2. Bestimmt für jede der Abbildungen 16–18 die Länge der unbekannten Kathetenlänge (die Strecken werden in cm gemessen):

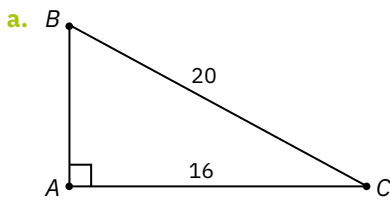


Abbildung 16

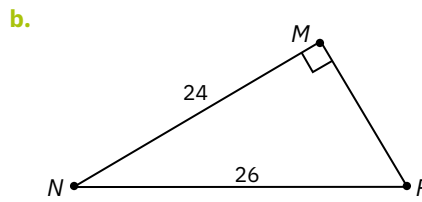


Abbildung 17

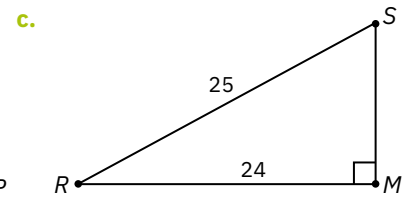


Abbildung 18

3. Es sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle B = 90^\circ$.
- Wenn $AB = 4$ cm und $BC = 12$ cm ist, berechne AC .
 - Wenn $AC = 20$ cm und $BC = 16$ cm ist, berechne AB .
 - Wenn $AB = 15$ cm und $AC = 25$ cm ist, berechne BC .
4. Bestimme die Länge der Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten von:
- 6 cm;
 - 8 cm;
 - 15 cm;
 - 20 cm.
5. Bestimme die Länge der Diagonale eines Quadrats mit der Seite:
- 4 cm;
 - 9 cm;
 - 12 cm;
 - 25 cm.
6. Bestimme die Länge der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite:
- 2 cm;
 - 10 cm;
 - 18 cm;
 - 32 cm.
7. Das Rechteck $ABCD$ hat $AB = 9$ cm und $AC = 15$ cm. Berechne den Umfang des Rechtecks $ABCD$.
8. Im Rhombus $ABCD$ ist $AB = 25$ cm und $AC = 30$ cm. Berechne BD und den Flächeninhalt des Rhombus.
9. a. Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AB = AC$ und $AB = 25$ cm und $BC = 48$ cm. Wenn $AD \perp BC$, $D \in BC$, berechne die Länge der Strecke AD .
- b. Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AB = AC$ ist $BC = 24$ cm. Sei D die Projektion des Punktes A auf die Gerade BC . Wenn $AD = 9$ cm, bestimme die Länge der Seite AB .
10. Im Rechteck $MNPQ$ ist $MN = 8$ cm und $NP = 4$ cm. Berechne die Längen der Diagonalen des Rechtecks $MNPQ$.
11. Das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck ABC hat $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $AB = 5\sqrt{2}$ cm.
- Berechne BC .
 - Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
12. Im Dreieck ABC , das in A rechtwinklig ist, ist $AB = 8$ cm und $BC = 10$ cm. Man bezeichne den Mittelpunkt der Seite AB mit E .
- Berechne AC .
 - Berechne CE .
13. Im Rechteck $ABCD$ ist $AB > BC$, $AC = 12$ cm und der spitze Winkel, den die Diagonalen bilden, beträgt 60° .
- Zeige, dass das Dreieck BOC gleichseitig ist, wobei O der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks ist.
 - Berechne die Längen von BC und AB .
14. Das Quadrat $ABCD$ hat einen Umfang von 20 cm.
- Berechne die Länge der Seite AB und den Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$.
 - Berechne den Umfang des Dreiecks ABC .
15. Das Rechteck $ABCD$ hat einen Umfang von 48 cm. Wenn die Länge des Rechtecks das Doppelte der Breite ist, berechne die Längen der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$.
16. Das gleichseitige Dreieck ABC hat $AB = 6\sqrt{3}$ cm. Berechne die Länge der Höhe des Dreiecks ABC und seinen Flächeninhalt.
17. Berechne die Länge der Höhe des Dreiecks ABC und seinen Flächeninhalt.
- $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 4$ cm;
 - $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm, $BC = 8$ cm;
 - $AB = 15$ cm, $AC = 17$ cm, $BC = 8$ cm;
 - $AB = 4$ cm, $AC = 2$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm;
 - $AB = 3$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm, $BC = \sqrt{5}$ cm.

18. $ABCD$ ist ein rechtwinkliges Trapez mit $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$, $BE \perp DC$, und $AB = 6$ cm, $CD = 9$ cm, $AD = 4$ cm. Berechne den Umfang des Trapezes $ABCD$.
19. In einem rechtwinkligen Trapez $ABCD$ mit $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ und $AB < CD$ sind $AB = 10$ cm, $CD = 18$ cm und $AD = 6$ cm. Berechne den Umfang des Trapezes $ABCD$.
20. In einem rechtwinkligen Trapez $ABCD$ mit $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ und $AB > CD$ sind $CD = 5$ cm, $BC = 6$ cm und $AD = 2\sqrt{5}$ cm. Berechne die Länge der großen Grundlinie AB .
21. In Abbildung 19 ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez, $BE \perp DC$, $AF \perp DC$, $AB = 6$ cm, $CD = 12$ cm und $BC = 5$ cm. Berechne die Höhe des Trapezes $ABCD$.
22. In einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ist $AB = 7$ cm, $CD = 17$ cm und $BD = 15$ cm.
- Berechne die Höhe des Trapezes $ABCD$.
 - Berechne den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

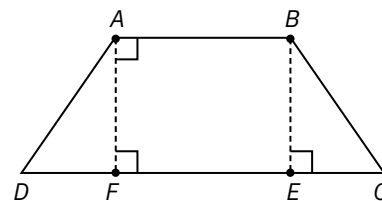


Abbildung 19

Test

1. Der Rhombus $ABCD$ hat die Diagonalen $AC = 16$ cm und $BD = 12$ cm. Berechne die Länge der Seite AB . (3 Pkte.)
2. Betrachte das Dreieck ABC mit $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 2\sqrt{6}$ cm und $BC = 6$ cm. (3 Pkte.)
- Bestimme die Art des Dreiecks ABC .
 - Berechne die Länge der Höhe aus A auf BC .
3. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 12$ cm und $\frac{BC}{AC} = \frac{5}{3}$. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC . (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

Die Geschichte der Mathematik

Großer Fermatscher Satz

Ausgehend von der Tatsache, dass die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ ganzzahlige Lösungen hat (jedes pythagoreische Tripel ist eine Lösung), haben sich die Mathematiker der Welt gefragt, ob es ganzzahlige Tripel gibt, die von null verschieden sind und die Beziehung bestätigen:

$$x^n + y^n = z^n, \text{ wobei } n \geq 3 \text{ eine natürliche Zahl ist.}$$

Um 1637 schrieb der französische Mathematiker Pierre de Fermat den folgenden Satz über den Rand einer Seite aus Diophantus' berühmtes Buch *Arithmetica*:

Es ist unmöglich, einen Würfel in zwei Würfel, eine vierte Potenz in zwei andere vierte Potenzen oder allgemein jede Potenz größer als zwei einer natürlichen Zahl in zwei solche Potenzen zu zerlegen. Ich habe einen ganz bemerkenswerten Beweis dafür entdeckt, aber dieser Rand ist zu schmal, um ihn aufzunehmen.

Der von Fermat erwähnte Beweis wurde nie in den überlieferten Schriften gefunden, aber die von ihm genannte Eigenschaft wurde berühmt, umso mehr, als niemand in der Lage war, sie zu beweisen.

Im Laufe der Jahre wurden Beweise für bestimmte Werte gefunden: Der Fall $n = 3$ wurde 1770 von Euler gelöst, der Fall $n = 5$ von Dirichlet und Legendre im Jahr 1825. Mithilfe von Rechenmaschinen wurde der Satz von Fermat für alle Werte von n zwischen 3 und 4 000 000 bewiesen.

Der vollständige Beweis des Großen Satzes von Fermat wurde 1993, mehr als 350 Jahre nach seiner Aufstellung, von dem britischen Mathematiker Andrew Wiles erbracht. Obwohl nach der ersten Präsentation einige Fehler in dem Beweis gefunden wurden, die wieder einmal unüberwindbar schienen, wurden diese bis Ende 1994 korrigiert.

Weitere Informationen und Referenzen findet ihr in der freien Enzyklopädie:

https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat's_Last_Theorem



Pierre de Fermat



Andrew Wiles

4. Lektion: Elemente der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Schlüsselwörter

Sinus

Tangens

Trigonometrie

Kosinus

Kotangens

Kathete, Hypotenuse

Konstante Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

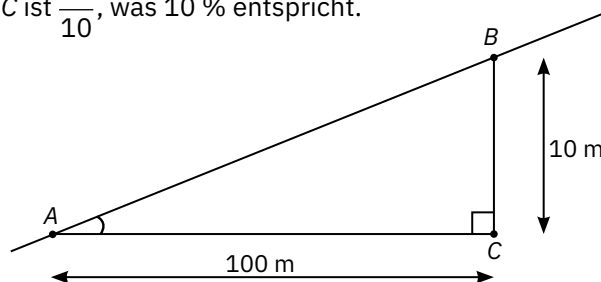
Mathe im Alltag

Am Rand einer Bergstraße steht das Straßenschild auf dem nebenstehenden Bild. Dina bemerkt es und fragt den Busfahrer, was es bedeutet. Er erklärt den Wanderern, dass es sich um ein Schild mit der Aufschrift „Steiler Anstieg“ handelt.

Dina: „Ich habe dieses Zeichen schon einmal gesehen, aber ich habe nicht genau verstanden, was es bedeutet. Was bedeutet 10 %?“

Vlad: „Mein Vater hat mir gesagt, dass die 10 Prozent, auch Steigung der Straße genannt, das Verhältnis zwischen dem Höhenunterschied zwischen zwei Punkten auf der Straße und dem horizontalen Abstand zwischen ihren Projektionen ist. Unser Zeichen mit einer Neigung von 10 % zeigt an, dass du pro 100 Meter horizontalem Weg einen Höhengewinn von 10 Metern hast.“

In der nachstehenden Zeichnung stellt die Strecke AB die zurückgelegte Strecke dar, und das Verhältnis der Längen der Strecken BC und AC ist $\frac{1}{10}$, was 10 % entspricht.



Was stellen wir fest?

Die Neigung der Straße, die durch das Maß des Winkels BAC bestimmt wird, kann auch durch das Verhältnis der Längen der Strecken BC und AC charakterisiert werden, d. h. durch das Verhältnis zwischen der gegenüberliegenden Kathete und der an den Winkel A anliegende Kathete.

Analysiert man die Abbildungen 1 und 2 und betrachtet das Verhältnis zwischen der gegenüberliegenden und der anliegenden Kathete eines Winkels mit dem Maß x in einem rechtwinkligen Dreieck.

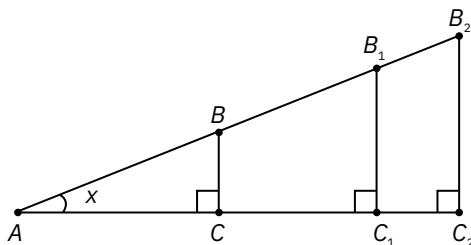


Abbildung 1

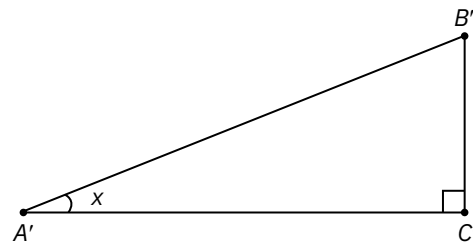


Abbildung 2

Die Dreiecke AB_1C_1 , AB_2C_2 bzw. $A'B'C'$ sind ähnlich mit dem Dreieck ABC , also: $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B'C'}{A'C'}$.

Das Verhältnis zwischen der Länge der Kathete, die dem Winkel mit dem Maß x gegenüberliegt, und der Länge der anderen Kathete hängt also nicht von dem Dreieck ab, in dem der Winkel angenommen wird (wohl aber von dem Wert von x).

Merke dir!

Eigenschaft. Bei jedem rechtwinkligen Dreieck mit einem Winkel der gegebenen Größe x ist das Verhältnis der Länge der diesem Winkel gegenüberliegenden Kathete zur Länge der dem Winkel anliegenden Kathete konstant.





Gruppenarbeit

Übertrag die Abbildungen 1 und 2 in eure Hefte.

Gruppenaufgaben

- Analysiert und vergleicht in Gruppen von 3–4 Schülern die Dreiecke ABC , AB_1C_1 , AB_2C_2 und $A'B'C'$.
 - die Verhältnisse zwischen der Länge der Kathete gegenüber dem Winkel mit dem Maß x und der Länge der Hypotenuse in jedem Dreieck;
 - die Verhältnisse der Länge der Kathete, die dem Winkel x anliegend ist, zur Länge der Hypotenuse in jedem Dreieck.
- Formuliert ähnliche Aussagen wie die obige Eigenschaft über die Verhältnisse der Länge einer Kathete und der Länge der Hypotenuse.

Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens eines spitzen Winkels

Die bisher in dieser Lektion beobachteten Eigenschaften führen uns zu der Feststellung, dass: in jedem rechtwinkligen Dreieck, das einen spitzen Winkel der Größe x hat, die Werte der folgenden Verhältnisse konstant sind:

$$\frac{\text{gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}, \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}, \frac{\text{gegenüberliegende Kathete}}{\text{anliegende Kathete}}, \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{gegenüberliegende Kathete}}.$$

Außerdem ist es vorzuziehen, die Größe eines spitzen Winkels nicht unbedingt durch seine Gradzahl zu charakterisieren, sondern durch den Wert eines dieser Verhältnisse.

Da es eine direkte Entsprechung zwischen dem Maß eines Winkels und dem Wert jedes dieser Verhältnisse gibt, werden wir, um genauere Bezüge herzustellen, die unten aufgeführten Definitionen angeben.

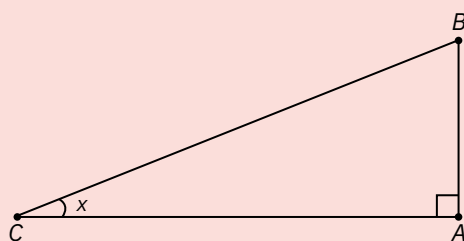


Merke dir!

Es sei ein rechtwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel der Größe x , $0^\circ < x < 90^\circ$.

- Das Verhältnis zwischen der Länge der gegenüberliegenden Kathete des Winkels x und der Länge der Hypotenuse wird als *Sinus* des Winkels x bezeichnet und wird $\sin x$ notiert.
- Das Verhältnis zwischen der Länge der anliegenden Kathete des Winkels x und der Länge der Hypotenuse wird als *Kosinus* des Winkels x bezeichnet und mit $\cos x$ notiert.
- Das Verhältnis zwischen der Länge der gegenüberliegenden Kathete des Winkels x und der Länge der anliegenden Kathete wird als *Tangens* des Winkels x bezeichnet und mit $\tan x$ notiert.
- Das Verhältnis zwischen der Länge der an den Winkel x anliegenden Kathete und der Länge der gegenüberliegenden Kathete wird als *Kotangens* des Winkels x bezeichnet und als $\cot x$ notiert.

Die vier Werte: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ sind die trigonometrischen Funktionen des spitzen Winkels x .



$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{AB}{BC} & \cos x &= \frac{AC}{BC} \\ \tan x &= \frac{AB}{AC} & \cot x &= \frac{AC}{AB} \end{aligned}$$

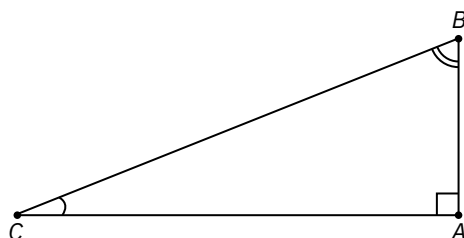


Bemerkungen

- Wenn der Winkel C des Dreiecks ABC , der in A rechtwinklig ist, das Maß x hat, können die vorherigen Beziehungen auch wie folgt umgeschrieben werden:

$$\sin C = \frac{AB}{BC}; \quad \cos C = \frac{AC}{BC}; \quad \tan C = \frac{AB}{AC}; \quad \cot C = \frac{AC}{AB}.$$

- Der Sinus jedes spitzen Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Kosinus des anderen spitzen Winkels (und umgekehrt).



$$\begin{aligned} \sin C &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{AB}{BC} \\ \cos B &= \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{AB}{BC} \end{aligned} \quad \Rightarrow \sin C = \cos B.$$

Anders gesagt: Der Sinus eines spitzen Winkels ist gleich dem Kosinus seines Komplements, und der Kosinus eines spitzen Winkels ist gleich dem Sinus seines Komplements:

a. $\sin x = \cos(90^\circ - x)$; b. $\cos x = \sin(90^\circ - x)$.

3. Der Tangens eines spitzen Winkels ist gleich dem Kotangens seines Komplements und umgekehrt:

a. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(90^\circ - x)$; b. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90^\circ - x)$.

4. Der Tangens eines spitzen Winkels ist gleich dem Verhältnis von Sinus und Kosinus des Winkels, und der Kotangens ist gleich dem Verhältnis von Kosinus und Sinus des Winkels (er ist der Kehrwert des Tangens):

a. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; b. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; c. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Beispiele

1. Werte der trigonometrischen Funktionen des Winkels von 45°

Es sei ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$, mit den Katheten $AB = AC = a$, wobei a eine positive reelle Zahl ist (Abbildung 3). Unter Anwendung des Satzes des Pythagoras erhalten wir:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Wir erhalten:

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

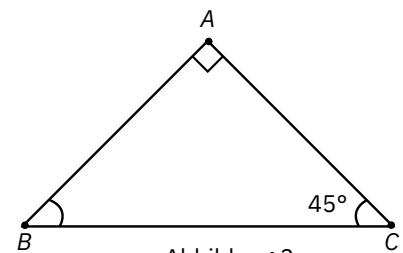


Abbildung 3

2. Werte der trigonometrischen Funktionen der Winkel von 30° und 60°

Es sei ein Dreieck ABC , rechtwinklig in A , mit $\sphericalangle B = 60^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$ und der Kathete $AB = a$, wobei a eine positive reelle Zahl ist (Abbildung 4). Da die Länge der Kathete gegenüber dem Winkel von 30° die Hälfte der Länge der Hypotenuse ist, ist $BC = 2a$. Man wendet den Satz des Pythagoras an und erhält:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Dann:

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

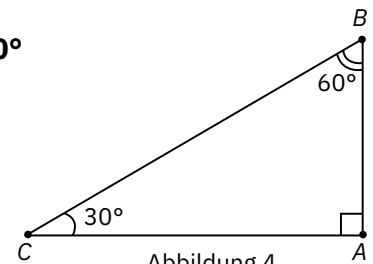


Abbildung 4

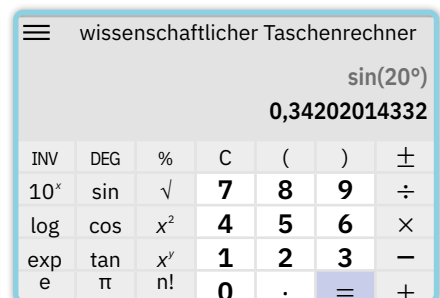
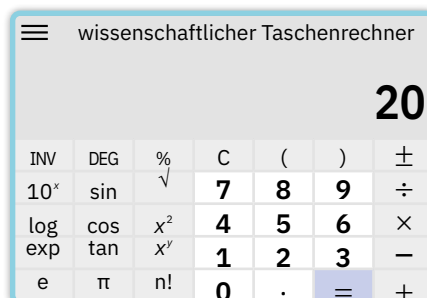
Werte der trigonometrischen Funktionen eines beliebigen spitzen Winkels

Um die Werte $\sin x$, $\cos x$ oder $\operatorname{tg} x$ (auf manchen Rechnern auch $\tan x$ geschrieben) zu bestimmen, die einem bestimmten Winkel x entsprechen, wobei $0^\circ < x < 90^\circ$ gilt, können wir den wissenschaftlichen Rechner verwenden. Der Wert $\operatorname{ctg} x$ ergibt sich aus der Tatsache, dass der Kehrwert des Tangens der Kotangens ist.

Um zum Beispiel $\sin 20^\circ$ mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner zu berechnen, müsstet ihr Folgendes tun:

- Wählt die Option **DEG** (Hexadezimalgrad) (Beschriftung) und gebt dann 20 ein.
- Sobald 20 auf dem Bildschirm steht, drückt die Taste **sin**. Ihr erhaltet den Wert von $\sin 20^\circ$:

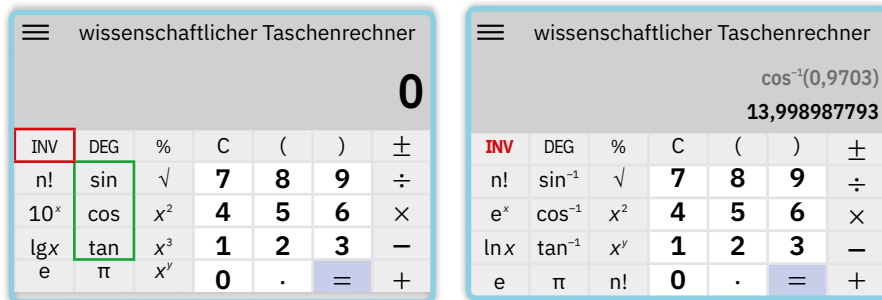
$$\sin 20^\circ = 0,34202\dots$$



7.4

Mithilfe des wissenschaftlichen Rechners können wir auch die umgekehrte Aufgabe lösen: Wie groß ist der Wert einer trigonometrischen Funktion eines Winkels, wenn man den Wert des Winkels angibt?

Bei einem Winkel x , für den $\cos x = 0,9703$ ist, drücken wir also zunächst die Taste INV, wodurch der Taschenrechner $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$ anstelle von $\sin$, $\cos$ und $\tan$ anzeigt. Wir geben 0,9703 ein, drücken dann $\cos^{-1}$ und erhalten den Wert 13,99898... .



Daraus folgt, dass der Winkel x , für den $\cos x = 0,9703$ ist, ein Maß hat, das ungefähr gleich 14° ist (mit Additionsannäherung).

Tabelle der Werte der Sinusfunktion

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°		0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,139	0,156
10°	0,174	0,191	0,208	0,225	0,242	0,259	0,276	0,292	0,309	0,326
20°	0,342	0,358	0,375	0,391	0,407	0,423	0,438	0,454	0,469	0,485
30°	0,500	0,515	0,530	0,545	0,559	0,574	0,588	0,602	0,616	0,629
40°	0,643	0,656	0,669	0,682	0,695	0,707	0,719	0,731	0,743	0,755
50°	0,766	0,777	0,788	0,799	0,809	0,819	0,829	0,839	0,848	0,857
60°	0,866	0,875	0,883	0,891	0,899	0,906	0,914	0,921	0,927	0,934
70°	0,940	0,946	0,951	0,956	0,961	0,966	0,970	0,974	0,978	0,982
80°	0,985	0,988	0,990	0,993	0,995	0,996	0,997	0,998	0,9993	0,9998

Tabelle der Werte der Tangensfunktion

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0°		0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,123	0,141	0,158
10°	0,176	0,194	0,213	0,231	0,249	0,268	0,287	0,306	0,325	0,344
20°	0,364	0,384	0,404	0,424	0,445	0,466	0,488	0,510	0,532	0,554
30°	0,577	0,601	0,625	0,649	0,675	0,700	0,727	0,754	0,781	0,810
40°	0,839	0,869	0,900	0,933	0,966	1,000	1,036	1,072	1,111	1,150
50°	1,192	1,235	1,280	1,327	1,376	1,428	1,483	1,540	1,600	1,664
60°	1,732	1,804	1,881	1,963	2,050	2,145	2,246	2,356	2,475	2,605
70°	2,747	2,904	3,078	3,271	3,487	3,732	4,011	4,331	4,705	5,145
80°	5,671	6,314	7,115	8,144	9,514	11,430	14,301	19,081	28,636	57,290

- Die Werte der Kosinusfunktion werden mithilfe der Formel $\cos n^\circ = \sin(90 - n)^\circ$ und der Tabelle mit den Werten der Sinusfunktion ermittelt. **Beispiel:** $\cos 72^\circ = \sin 18^\circ \approx 0,309$.
- In ähnlicher Weise kann man mit der Formel $\operatorname{ctg} n^\circ = \operatorname{tg}(90 - n)^\circ$ auch den Kotangens eines Winkels bestimmen. **Beispiel:** $\operatorname{ctg} 43^\circ = \operatorname{tg} 47^\circ \approx 1,072$.

3. Wenn man den Wert einer der trigonometrischen Funktionen eines Winkels kennt, kann man den ungefähren Wert seines Maßes bestimmen. Werte, die nicht in der Tabelle enthalten sind, werden auf den nächstgelegenen Wert in der Tabelle angenähert.

Beispiel: Da wir wissen, dass $\sin x = 0,734$ ist, ist der nächstgelegene Wert in der Tabelle der Sinusfunktion 0,731. Wir leiten daraus ab, dass der Winkel x ungefähr 47° beträgt.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken

1. In dem in A rechtwinkligen Dreieck ABC mit $BC = 10$ cm und $AC = 6$ cm (Abbildung 5) berechnet: $\sin B$, $\sin C$, $\cos B$, $\cos C$, $\operatorname{tg} B$, $\operatorname{tg} C$, $\operatorname{ctg} B$, $\operatorname{ctg} C$.

Lösung:

Man wendet den Satz des Pythagoras im Dreieck ABC an und erhält:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 8 \text{ cm.}$$

Mithilfe der Definitionen der trigonometrischen Funktionen erhalten wir:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}; \quad \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}; \quad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}; \quad \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{tg} C = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg} C = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}.$$

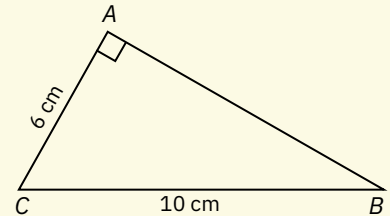


Abbildung 5

2. Seien das Dreieck ABC , rechtwinklig in A , $\sphericalangle B = 60^\circ$ und $AC = 6$ cm (Abbildung 6). Berechne die Längen der Seiten BC , AB und den Sinus des Winkels C .

Lösung:

$$\sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ und } \sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\cos B = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ und } \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{4\sqrt{3}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

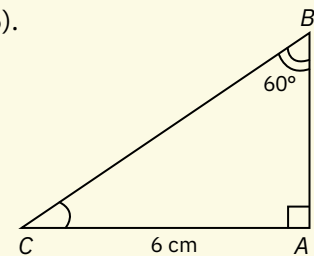


Abbildung 6

3. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC hat $AB = AC = 10$ cm und $BC = 12$ cm (Abbildung 7). Berechne den Sinus des Winkels BAC .

Lösung:

Es geht darum, den Winkel BAC in ein rechtwinkliges Dreieck einzuschließen. Zu diesem Zweck konstruiert man die Höhe BP des Dreiecks ABC , $P \in BC$. Es folgt, dass: $\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{BP}{AB}$.

Man konstruiert die Höhe AM , $M \in BC$. Man berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks auf zwei Arten und erhält $Fl_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot AC$,

woraus folgt, dass die Länge der Höhe $BP = \frac{AM \cdot BC}{AC}$ ist.

Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig mit der Grundlinie BC , also ist AM auch Seitenhalbierende, also $BM = MC = 6$ cm.

Wendet man den Satz des Pythagoras auf das Dreieck AMB an, erhält man: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 8$ cm.

Daraus folgt, dass, $BP = \frac{AM \cdot BC}{AC} = \frac{48}{5}$ cm, also $\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{BP}{AB} = \frac{24}{25}$.

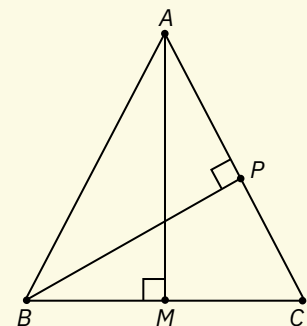


Abbildung 7

Untersuchung

- Berechnet mit einem wissenschaftlichen Taschenrechner die Werte der Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktionen für die Winkel 0° , 5° , 15° , 30° , 36° , 45° , 52° , 60° , 75° und 84° auf drei Dezimalstellen genau. Tragt alle diese Werte in eine Tabelle ein.
- Vergleiche die Werte der Sinusfunktionen, die ihr für die Winkel mit den obigen Maßen erhalten habt. Entscheidet, ob der Sinus der Winkelmaße zunimmt oder abnimmt, wenn die Winkel zunehmend größer werden.
- Geht wie bei *b* vor und vergleicht die Veränderung der Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktionen, die für die Winkel berechnet wurden, deren Maße oben angegeben sind, wenn sie größer werden.



- d. Leitet allgemeine Regeln für die Veränderung der Werte der Sinus-, Kosinus-, Tangens- und Kotangensfunktionen von spitzen Winkeln ab, wenn die Maße dieser Winkel größer oder kleiner werden.
- e. Überprüft eure Schlussfolgerungen, indem ihr sie mit denen eurer Mitschülerinnen und Mitschüler vergleicht und mit eurer Lehrerin oder eurem Lehrer in der Mathematikstunde bespricht, und schreibt eure gemeinsamen Schlussfolgerungen in euer persönliches Portfolio.

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Sei das rechtwinklige Dreieck ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$ (Abbildung 8), mit $AB = 4$ cm und $AC = 3$ cm. Füllt die Lücken aus, sodass die Aussagen wahr sind.

- a. Die Länge der Seite BC ist gleich
- b. $\sin B = \dots$, $\cos B = \dots$, $\tan B = \dots$ und $\cot B = \dots$.
- c. $\sin C = \dots$, $\cos C = \dots$, $\tan C = \dots$ und $\cot C = \dots$.

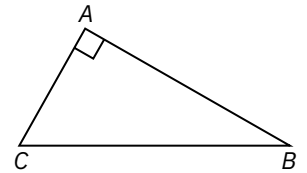


Abbildung 8

2. Sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$. Ordnet die Daten in den beiden Zeilen zu, indem ihr die Abmessungen der Seiten des Dreiecks ABC in jedem Unterpunkt angebt:

$\sin B$	$\cos B$	$\sin C$	$\cos C$	$\operatorname{tg} B$	$\operatorname{ctg} B$	$\operatorname{tg} C$	$\operatorname{ctg} C$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

- a. $AB = 9$ cm und $BC = 15$ cm; b. $AC = 12$ cm und $BC = 20$ cm; c. $AB = 15$ cm und $AC = 20$ cm.

3. Sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 30^\circ$ und $AB = 4\sqrt{3}$ cm.

- a. Berechnet AC und BC . b. Berechnet die Länge der Höhe, die der Hypotenuse entspricht.

4. Sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$, $BC = 12$ cm und $\sin C = \frac{3}{4}$.

- a. Berechnet AB und AC . b. Berechnet $\cos C$, $\tan C$ und $\cot C$.

5. Sei ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 12$ cm und $\cos B = \frac{12}{13}$.

- a. Berechnet AC und BC . b. Berechnet $\sin B$, $\tan B$ und $\cot B$.

6. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\tan B = \frac{3}{4}$ und $AC = 9$ cm.

- a. Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC . b. Berechnet $\sin C$, $\cos C$, $\tan C$ und $\cot C$.

7. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\tan C = \frac{1}{2}$ und $BC = 4$ cm.

- a. Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks ABC . b. Berechnet die Länge der Höhe aus B auf AC .

8. Sei das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$ und $AD = 12$ cm, wobei $AD \perp BC$, $D \in BC$. Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC .

9. Im gleichschenkligen Dreieck ABC ($AB = AC$) sei D der Mittelpunkt der Seite BC . $BD = 3$ cm und $\tan B = 2$.

- a. Berechnet AD und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
- b. Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC .
- c. Bestimmt den Wahrheitswert der Aussage: $\cos B < \frac{1}{2}$. Begründet eure Antwort.

10. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig in A . Berechnet den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC , wenn bekannt ist, dass $\tan B = 0,75$ und $BC = 10$ cm.

11. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $AD \perp BC$, $D \in BC$. Bekannt ist, dass $DC = 12$ cm und $\tan C = \frac{3}{4}$.

- a. Bestimmt die Längen der Seiten des Dreiecks ABC .
- b. Berechnet $\sin B + \cos B$.

12. Im Rechteck $ABCD$ ist die Diagonale $AC = 16$ cm und $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

- Berechnet die Längen der Seiten des Rechtecks.
- Berechnet den Umfang und den Flächeninhalt des Rechtecks.
- Berechnet $\sin(\sphericalangle CBM)$, wobei M der Mittelpunkt der Seite CD ist.

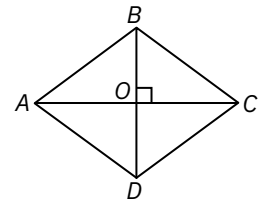


Abbildung 9

13. Der Rhombus $ABCD$ hat die Diagonale $BD = 24$ cm und $\tan(\sphericalangle ABD) = \frac{4}{3}$ (Abbildung 9).

- Zeigt, dass $AC = 32$ cm ist.
- Berechnet den Flächeninhalt und den Umfang von $ABCD$.
- Berechnet die Länge der Senkrechten aus B auf die Seite AD .

14. Im Trapez $ABCD$ sind $AB \parallel CD$, $AB = 16$ cm, $CD = 8$ cm, und $AD = BC = 4\sqrt{2}$ cm.

- Zeigt, dass $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.
- Berechnet den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.
- Berechnet $(\sphericalangle CAB)$.

15. Im rechtwinkligen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ und $\sphericalangle B = 60^\circ$, ist $CD = 4\sqrt{3}$ cm und $AD = 6$ cm.

- Bestimmt den Umfang des Trapezes.
- Bestimmt die Längen der Diagonalen AC und BD .

16. Ein Raum hat die Form eines rechtwinkligen Trapezes $ABCD$ (Abbildung 10). In der schraffierten Fläche befindet sich ein Umkleideraum. Es ist bekannt, dass $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$, $BE \parallel AD$, $EC = 4$ m und $AB = AD = x$ m, wobei x eine natürliche Zahl kleiner als 5 ist.

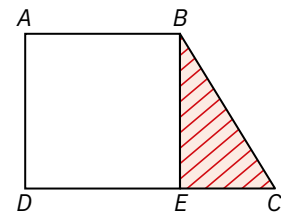


Abbildung 10

- Berechnet den Flächeninhalt des Raumes $ABCD$ in Abhängigkeit von x .
- Berechnet x , wenn $ABCD$ einen Flächeninhalt von 24 m² hat.
- Es sei $x = 4$. Ein Rohr von minimaler Länge wird vom Punkt D zur Seite BC durch den Boden verlegt. Zeigt,

dass der Winkel, den dieses Rohr mit der Seite DC bildet, den Kosinus $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hat. (Es wird angenommen, dass das Rohr eine vernachlässigbare Dicke hat.)

17. Der Innenhof eines Hauses hat die Form des Dreiecks ABC in Abbildung 11. Die schraffierte Fläche ist mit Fliesen gepflastert, der Rest ist mit Gras bedeckt. Es ist bekannt, dass $AC = 15\sqrt{3}$ m, $AB = AD = DC$, und $\sphericalangle ACD = 30^\circ$.

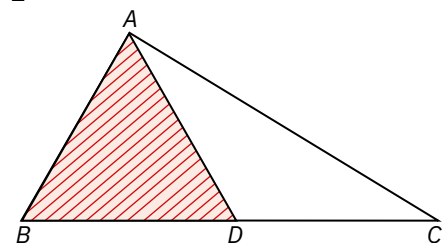


Abbildung 11

- Zeigt, dass der Winkel BAC ein rechter Winkel ist.
- Berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
- Berechnet den Flächeninhalt der gepflasterten Fläche.

Test

1. Es sei das rechtwinklige Dreieck ABC , $\sphericalangle A = 90^\circ$. Wenn $AB = 15$ cm und $BC = 25$ cm ist, berechne AC , $\sin B$, $\cos C$, $\tan B$, $\cot B$. (3 Pkte.)

2. Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm und $\cos B = \frac{3}{5}$.

- Berechnet den Umfang des Dreiecks ABC .
- Berechnet die Länge der Höhe, die der Hypotenuse entspricht.

(3 Pkte.)

3. Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ sind $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60^\circ$ und $AC \perp BC$ bekannt. Wenn $BC = 24$ cm ist, bestimme:

- den Umfang des Trapezes;
- die Längen der Diagonalen.

(3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



5. Lektion: Lösen des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung von Elementen in regelmäßigen Vielecken. Schätzen der Entfernungen in praktischen Situationen mithilfe der metrischen Beziehungen

Schlüsselwörter

rechtwinkliges Dreieck	gleichseitiges Dreieck	Seite	Kathete, Hypotenuse	Quadrat
Bestimmungshöhe	trigonometrische Funktionen	regelmäßiges Sechseck	Flächeninhalt	

Lösen des rechtwinkligen Dreiecks

Mathe im Alltag

Die Windenergie oder Windkraft wird durch Windturbinen genutzt, die die kinetische Energie des Windes in Elektrizität umwandeln. Als unerschöpfliche Ressource ist die Windenergie eine echte Alternative zu fossilen Brennstoffen (Gas, Kohle). Windenergie ist sauber, erneuerbar und hat niedrige Nutzungs- und Produktionskosten, insbesondere wenn es darum geht, eine Energiequelle an einem abgelegenen Ort bereitzustellen, der nur schwer oder gar nicht an herkömmliche Verteilungsnetze angeschlossen werden kann.

Da die Windenergie mit der Windgeschwindigkeit zunimmt, muss die Windgeschwindigkeit in großer Höhe über dem Boden gemessen werden, um einen optimalen Standort für eine Windkraftanlage zu finden. Hierfür verwenden wir ein Instrument, das Anemometer genannt wird.

In Abbildung 1 befindet sich das Anemometer am Ende C eines 7,7 m langen Stabes, der mit einem 8,5 m langen Kabel verankert ist.

In welchem Abstand vom Punkt A, an dem diese Stange befestigt ist, soll das Tragseil verankert werden? Wie groß ist der Winkel, den das Tragseil mit dem Boden bildet?

Was stellen wir fest?

Bei der Analyse von Abbildung 2 geht es darum, die Länge der Kathete AB und das Maß des Winkels B im rechtwinkligen Dreieck ABC zu bestimmen, wobei $AC = 7,7$ m und $BC = 8,5$ m.

Die Anwendung des Satzes von Pythagoras führt zu diesem Ergebnis: $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{12,96}$ m = 3,6 m.

Da $\sin B = \frac{AC}{BC} \approx 0,905$, lässt sich aus der Wertetabelle der trigonometrischen Sinusfunktion aus der vorangegangenen Lektion ableiten, dass der Winkel B ungefähr 65° beträgt.

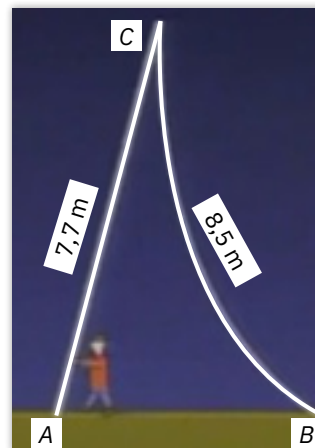


Abbildung 1

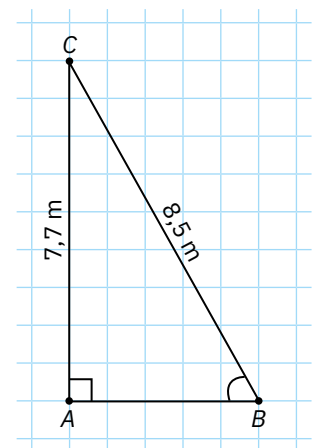


Abbildung 2

Merke dir!

Um ein Dreieck zu lösen, müssen die Längen der drei Seiten und die Maße der drei Winkel des Dreiecks bestimmt werden.

Im Falle eines rechtwinkligen Dreiecks genügt es zur Lösung des Dreiecks, die Längen zweier Seiten des Dreiecks oder die Länge einer Seite und das Maß eines der spitzen Winkel (oder den Wert einer trigonometrischen Funktion dieses Winkels) zu kennen.

Um ein rechtwinkliges Dreieck zu lösen, kann man wie folgt vorgehen:

a. Wenn die Längen von zwei Seiten bekannt sind:

- bestimmen wir die Länge der dritten Seite mit dem Satz des Pythagoras;
- finden wir die beiden spitzen Winkel, indem wir eine trigonometrische Funktion eines Winkels berechnen.

b. Wenn die Länge einer Seite und das Maß eines spitzen Winkels bekannt sind:

- finden wir den anderen spitzen Winkel, da wir wissen, dass er das Komplement des bekannten Winkels ist;
- bestimmen wir die Seitenlängen mithilfe derjenigen trigonometrischen Funktionen des bekannten Winkels, an denen die Länge der bekannten Seite beteiligt ist.

Beispiel

In Abbildung 3 sei das in A rechtwinklige Dreieck ABC , in dem bekannt sind $AC = 5\sqrt{3}$ cm und $\sphericalangle B = 60^\circ$.

Offensichtlich ist $\sphericalangle C = 90^\circ - \sphericalangle B = 30^\circ$.

Um die Längen der Seiten AB und BC zu bestimmen, verwenden wir die trigonometrischen Funktionen des Winkels B , wobei die bekannte Seite AC betroffen ist:

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{AB}, \text{ d. h., } AB = 5 \text{ cm;}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{BC}, \text{ also } BC = 10 \text{ cm.}$$

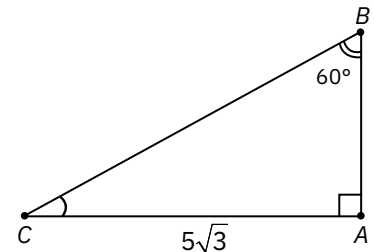


Abbildung 3

Bemerkung

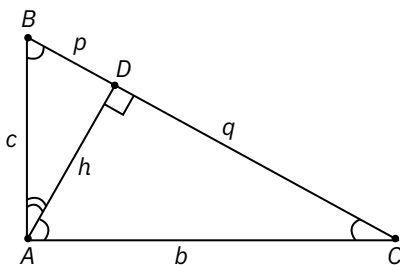


Abbildung 4

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit $\sphericalangle A = 90^\circ$, in dem wir die Höhe AD , $D \in BC$, konstruiert haben (Abbildung 4).

Wir stellen fest: $BC = a$ $AD = h$

$AC = b$ $BD = p$

$AB = c$ $CD = q$

Im Allgemeinen kann das Dreieck ABC gelöst werden, wenn bekannt sind:

- zwei beliebige der Werte von a, b, c, h, p, q ;
- einer der Werte a, b, c, h, p, q und das Maß eines der Winkel B oder C (oder eine trigonometrische Funktion dieses Winkels).

Berechnung der Elemente (Seite, Umfang, Bestimmungshöhe, Flächeninhalt) in gleichseitigen Dreiecken, Quadraten und regelmäßigen Sechsecken

Ein regelmäßiges Vieleck ist ein konvexes Vieleck, bei dem alle Seiten kongruent und alle Winkel kongruent sind. Ein gleichseitiges Dreieck ist zum Beispiel ein regelmäßiges Vieleck mit drei Seiten, ein Quadrat ein regelmäßiges Vieleck mit vier Seiten.

Jedes regelmäßige Vieleck kann einem Kreis einbeschrieben werden. Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist auch der Mittelpunkt des regelmäßigen Vielecks.

Die Strecke, die den Mittelpunkt des Vielecks mit der Mitte einer Seite verbindet, wird als *Bestimmungshöhe* des Vielecks bezeichnet. Im Zusammenhang mit metrischen Beziehungen (Entfernungsberechnungen) ist die Bestimmungshöhe auch der Abstand zwischen dem Mittelpunkt des Vielecks und seinen Seiten.

Gegeben sei ein regelmäßiges Vieleck mit n Seiten. Wir stellen fest:

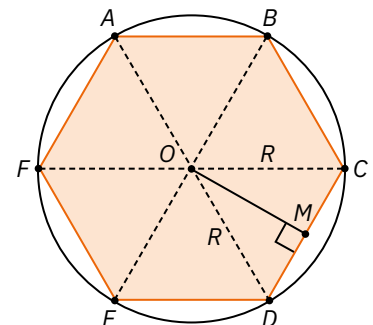
- l_n = die Seitenlänge des Vielecks;
- u_n = das Maß eines Winkels des Vielecks;
- a_n = Länge der Bestimmungshöhe;
- U_n = Umfang des Vielecks;
- Fl_n = Flächeninhalt des Vielecks.

Die folgenden Beziehungen sind offensichtlich:

$$u_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ; \quad U_n = n \cdot l_n; \quad Fl_n = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot l_n.$$

Seite, Umfang, Flächeninhalt und Bestimmungshöhe eines gleichseitigen Dreiecks

Es sei das gleichseitige Dreieck ABC , das einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R einbeschrieben ist, mit der Bestimmungshöhe OM , $M \in AB$ (Abbildung 5). Der Mittelpunktswinkel AOB hat das Maß 120° , und da das Dreieck OAB gleichschenkelig ist mit $OA = OB = R$, folgt, dass $\sphericalangle OAM = 30^\circ$.



Die Bestimmungshöhe des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ ist OM .

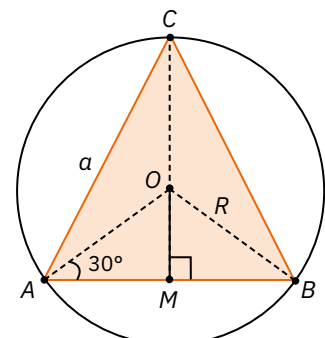


Abbildung 5



Durch Verwendung der trigonometrischen Funktionen im Dreieck OAM erhalten wir:

$$\sin 30^\circ = \frac{OM}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OM}{R} \Rightarrow OM = \frac{R}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AM}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{R} \Rightarrow AM = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \text{ also } AB = R\sqrt{3}.$$



Merke dir!

Elemente des gleichseitigen Dreiecks (entsprechend dem Radius des Umkreises)

Seite (l_3)	Umfang (U_3)	Bestimmungshöhe (a_3)	Höhe	Flächeninhalt (Fl_3)
$R\sqrt{3}$	$3R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Seite, Umfang, Flächeninhalt und Bestimmungshöhe eines Quadrats

Es sei das Quadrat $ABCD$ mit der Seite a , das einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R einbeschrieben ist, in dem wir die Bestimmungshöhe OM mit $M \in BC$ konstruiert haben (Abbildung 6).

Das Dreieck OBC ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $OB = OC = R$.

Nach dem Satz des Pythagoras ist $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = R\sqrt{2}$, also ist der Flächeninhalt des Quadrats: $Fl_{ABCD} = BC^2 = 2R^2$.

OM ist Seitenhalbierende im Dreieck OBC , also $OM = \frac{BC}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

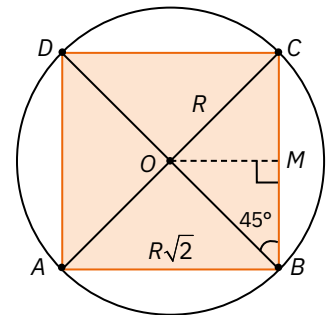


Abbildung 6



Merke dir!

Elemente des Quadrats (entsprechend dem Radius des Umkreises)

Seite (l_4)	Umfang (U_4)	Bestimmungshöhe (a_4)	Flächeninhalt (Fl_4)
$R\sqrt{2}$	$4R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$

Seite, Umfang, Flächeninhalt und Bestimmungshöhe eines regelmäßigen Sechsecks

Das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ mit der Seite a liegt in einem Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R (Abbildung 7). Jeder Mittelpunktswinkel gegenüber einer Seite beträgt 60° , sodass die langen Diagonalen AD , BE und CF das Sechseck in sechs gleichseitige Dreiecke unterteilen.

Dann ist $BC = OB = R$ und die Bestimmungshöhe OM mit OM , mit $M \in BC$, in Betracht ziehend, folgt, dass:

$$OM = R \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Der Flächeninhalt des Sechsecks ist:

$$Fl_{ABCDEF} = 6 \cdot Fl_{OBC} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot BC = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

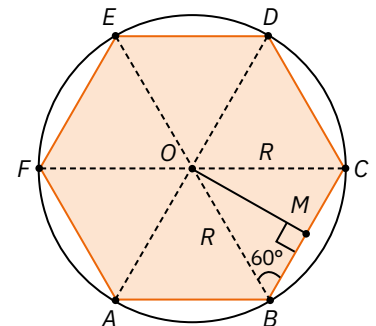


Abbildung 7



Merke dir!

Elemente des regelmäßigen Sechsecks (entsprechend dem Radius des Umkreises)

Seite (l_6)	Umfang (U_6)	Bestimmungshöhe (a_6)	Flächeninhalt (Fl_6)
R	$6R$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Annäherung von Entfernungen in der Praxis durch metrische Beziehungen

In alltäglichen Situationen müssen wir oft Entfernungen und Flächen schätzen, wenn eine oder mehrere Variablen beteiligt sind.

Wenn wir einen Garten gestalten oder die Leitungen in einem Raum verlegen müssen, müssen wir Werte wie Umfang, Fläche usw. bereits in der Entwurfsphase kennen. So können wir die Menge an Materialien, die für die Umsetzung unserer Ideen benötigt wird, von Anfang an bestimmen und so Zeit und Kosten sparen.

Beispiele

1. Feuertreppe

Eine 100 dm lange Feuerwehrlleiter wird an eine Wand gelehnt. Die Bodenfreiheit zwischen dem Fuß der Leiter und der Wand beträgt 60 dm.

Wie hoch befindet sich die Spitze der Leiter über dem Boden?

Lösung:

Mithilfe des Satzes des Pythagoras können wir feststellen, wo sich die Spitze der Leiter befindet: $\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ Meter über dem Boden.

2. TV-Kabel

Der Boden von Vlads Zimmer hat eine rechteckige Form, deren Dimensionen direkt proportional zu 4 und 7 sind. Der Bodenflächeninhalt des Zimmers beträgt 17,92 Quadratmeter.

Ein Fernseekabel sollte durch den Boden diagonal durch den Raum verlegt werden. Bestimmt, ob 6 Meter Kabel ausreichen. Aber 6,5 Meter?

Lösung:

Die Dimensionen des Raums sind $l = 4x$ und $L = 7x$, wobei $x > 0$ eine reelle Zahl ist.

Aus $L \cdot l = 17,92$ folgt, dass $28x^2 = 17,92$, wobei $x^2 = 0,64$, d. h., $x = 0,8$. Dies ergibt $l = 3,2$ m und $L = 5,6$ m.

Aus dem Satz des Pythagoras folgt, dass die Diagonale des Raumes die Länge $d = \sqrt{l^2 + L^2} = \sqrt{41,6}$ m hat.

Da $6^2 = 36 < 41,6 < 42,25 = 6,5^2$ ist, sind 6 Meter Kabel nicht ausreichend, aber 6,5 Meter sind ausreichend.

3. Schätzung der Länge eines Gartenzauns

Der in Abbildung 8 dargestellte Garten hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$, wobei $CD = 12$ m und $\sphericalangle B = 60^\circ$. Der Garten wird durch zwei Alleen halbiert, die die Diagonalen des Trapezes darstellen, wobei die Allee AC den Winkel A in zwei gleich große Winkel teilt.

Im oberen Bereich wird der Garten durch einen Teich in Form einer Halbscheibe mit dem Durchmesser AB erweitert.

Prüft, ob 74 Meter Zaun ausreichen, um den Garten und den Teich zu umschließen. Es ist bekannt, dass $3,14 < \pi < 3,15$.

Lösung:

Die Winkel, die an jeder Grundfläche des Trapezes anliegend sind, sind kongruent, also $\sphericalangle DAB = 60^\circ$, also $\sphericalangle DAC = \sphericalangle CAB = 30^\circ$. Da $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 120^\circ$, folgt daraus, dass $\sphericalangle ACD = 30^\circ = \sphericalangle DAC$, was bedeutet, dass das Dreieck DAC gleichschenkelig ist. Wir leiten daraus ab, dass $AD = DC = 12$ m, also $BC = 12$ m.

Im Dreieck ABC ist $\sphericalangle CAB = 30^\circ$ und $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, also $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Folglich ist das Dreieck ABC rechtwinklig. Aus

$$\cos B = \frac{BC}{AB} \text{ erhält man } AB = \frac{BC}{\cos 60^\circ} = 24 \text{ m.}$$

Die Länge des Halbkreises mit dem Durchmesser AB ist $L = \frac{1}{2} \pi \cdot AB = 12\pi$ m. Folglich ist der Umfang des Gartens $U = L + AD + DC + CB = 12(\pi + 3)$ Meter.

Da $12(\pi + 3) < 12 \cdot (3,15 + 3) = 12 \cdot 6,15 = 73,8$, ist ein Zaun von 74 m Länge ausreichend für die Umzäunung des Gartens.

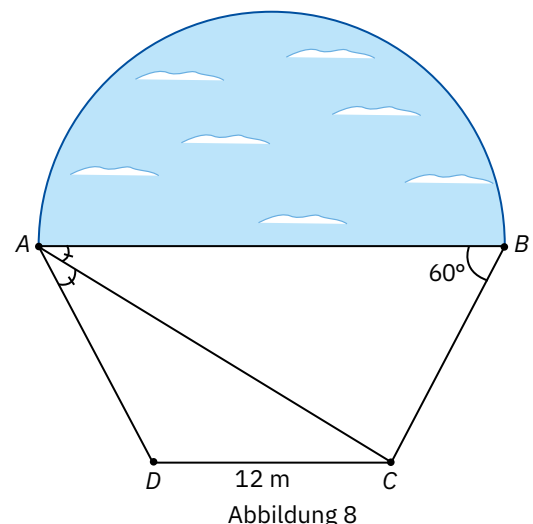


Abbildung 8





Projektarbeit

Bestimmung der Höhe eines unzugänglichen Gebäudes und der Entfernung zu einem unzugänglichen Punkt

In Abbildung 9 stellt die Strecke AB' ein hohes Gebäude dar, das unzugänglich ist, die Strecken CC' und DD' stellen die Positionen dar, in denen sich eine Person zu verschiedenen Zeitpunkten befindet, wobei sich der Boden auf der rechten Seite $B'C'$ und die horizontale Blicklinie des Beobachters auf der rechten Seite CD befinden. An der Position CC' sieht der Beobachter die Spitze des Gebäudes in einem Winkel von x° , und an der Position DD' sieht der Beobachter die Spitze des Gebäudes in einem Winkel von y° . Man kennt die Länge der Strecke CD , $\sphericalangle ACB = x^\circ$ und $\sphericalangle ADB = y^\circ$.

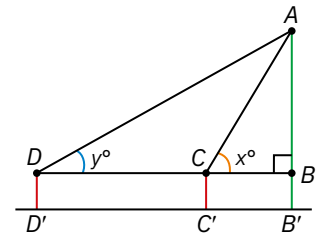


Abbildung 9

Für die Berechnungen kann man das folgende Muster verwenden:

Wir bestimmen die Höhe des Gebäudes AB' , wenn $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, $\sphericalangle ADB = 30^\circ$ und $CD = 112$ m, und der Beobachter die Höhe $CC' = DD' = 1,65$ m hat. Wir nutzen die Tatsache, dass $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.

- Aus dem rechtwinkligen Dreieck ($\sphericalangle B = 90^\circ$) ergibt sich $\sqrt{3} = \text{tg}(\sphericalangle ACB) = \frac{AB}{BC}$, also $AB = \sqrt{3} \cdot BC$.
- Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD ($\sphericalangle B = 90^\circ$) ergibt sich $\frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}(\sphericalangle ADB) = \frac{AB}{BD}$, also $AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BD$.
- $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BD = \sqrt{3} \cdot BC$, also $CD + BC = BD = 3 \cdot BC$. $BC = CD : 2 = 56$ m und $AB = \sqrt{3} \cdot 56$ m, $AB \approx 1,73 \cdot 56$ m = 96,88 m, sodass das Gebäude ungefähr 96,88 m + 1,65 m = 98,53 m misst, und da wir wissen, dass $BC = 56$ m, können wir die Entfernung von jedem Punkt, an dem sich der Beobachter befindet, zum Gebäude bestimmen.

Was ihr im Rahmen des Projekts verfolgen werdet:

- Identifizieren der unzugänglichen Gebäude oder Gegenstände im Alltag, deren Höhe ihr entweder schätzen oder deren Entfernung ihr am besten abschätzen könnt;
- Wahl der günstigsten Winkel unter Verwendung des Algorithmus des vorhergehenden Musters, damit die erforderlichen Näherungsberechnungen so einfach wie möglich sind;
- sorgfältiges Einhalten der Schritte, die notwendig sind, um die Höhen und Entfernungen der ausgewählten Gebäude oder Objekte zu bestimmen.

Präsentation: Erstellt eine PowerPoint-Präsentation mit Bildern und Text.

Bewertung: Die Genauigkeit der Präsentation und die Übereinstimmung der Ergebnisse mit den tatsächlichen Ergebnissen sowie die Qualität der Antworten auf die von den Personen im Anschluss an die Projektpräsentation gestellten Fragen werden berücksichtigt.

Vorgeschlagene Aufgaben



1. Im Dreieck ABC in Abbildung 10 ist: $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AC = 6$ cm und $\sphericalangle B = 60^\circ$. Löse das Dreieck ABC .
2. Löst das Dreieck ABC , wobei ihr wisst, dass $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 30^\circ$ und $BC = 8$ cm.
3. Löst das Dreieck ABC , wobei bekannt ist, dass $\sphericalangle A = 90^\circ$ und $AB = AC = 12$ cm.
4. Löst das rechtwinklige Dreieck ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$), wobei ihr wisst, dass:
 - a. $AB = 12$ cm und $BC = 20$ cm;
 - b. $AC = 12$ cm und $AB = 16$ cm;
 - c. $AC = 2\sqrt{3}$ cm und $BC = 4\sqrt{3}$ cm;
 - d. $BC = 8$ cm und $\sphericalangle B = 45^\circ$.
5. Im Dreieck ABC in Abbildung 11 ist $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AC = 15$ cm und $AD = 12$ cm. Löst das Dreieck ABC .
6. Löst das rechtwinklige Dreieck ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$), wobei bekannt ist, dass: $AD \perp BC$, $D \in BC$, $BD = 4$ cm und $CD = 9$ cm.
7. Löst das rechtwinklige Dreieck ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$), $AD \perp BC$, $D \in BC$, wenn ihr wisst, dass:
 - a. $AD = 4\sqrt{3}$ cm und $\sphericalangle B = 30^\circ$;
 - b. $CD = 6\sqrt{3}$ cm und $\sphericalangle C = 30^\circ$.
8. Zeichnet ein 2 cm großes Quadrat und dann den Umkreis des Quadrats.
 - a. Berechnet die Diagonale des Quadrats.
 - b. Berechnet die Bestimmungshöhe und den Radius des Umkreises des Quadrats.

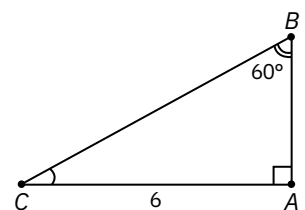


Abbildung 10

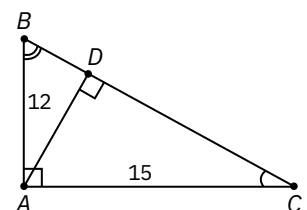


Abbildung 11

9. Zeichnet ein gleichseitiges Dreieck ABC mit einer Seitenlänge von 4 cm, dann zeichnet den Umkreis des Dreiecks.
- Berechnet die Höhe des Dreiecks.
 - Berechnet den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.
 - Berechnet die Bestimmungshöhe und den Radius des Umkreises des Dreiecks.
10. Es sei ein gleichseitiges Dreieck XYZ mit einer Bestimmungshöhe von 12 cm.
- Berechnet die Seite des Dreiecks.
 - Berechnet den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.
 - Berechnet die Höhe und den Radius des Umkreises des Dreiecks.
11. Das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$ ist dem Kreis $\mathcal{C}(O, R)$ einbeschrieben. Wenn $AB = 6$ cm, bestimme R und die Bestimmungshöhe des Sechsecks.
12. Füllt folgende Tabellen aus:

a.

R		$2\sqrt{3}$			
l_3	4				
a_3				$\sqrt{3}$	
U_3			36		
Fl_3					$9\sqrt{3}$

b.

R		$6\sqrt{2}$			
l_4	4				
a_4				$2\sqrt{3}$	
U_4			24		
Fl_4					100

c.

R			$4\sqrt{3}$		
l_6	6				
a_6				$5\sqrt{3}$	
U_6		18			
Fl_6					$96\sqrt{3}$

13. Ein gleichseitiges Dreieck und ein Quadrat haben den gleichen Umfang. Das Dreieck hat eine Seite, die 6 cm beträgt.
- Bestimmt die Bestimmungshöhe, den Radius des Umkreises des Dreiecks und seinen Flächeninhalt.
 - Bestimmt die Seite, die Bestimmungshöhe und den Radius des Umkreises des Quadrats.
14. Berechnet den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks, dessen Seitenlänge gleich der Seite des Quadrats mit dem Umfang 32 cm ist.
15. Abbildung 12 stellt eine Figur aus einem Kinderspiel dar. $ABCDEF$ ist ein regelmäßiges Sechseck in einem Kreis mit dem Mittelpunkt O . Die Hälfte der Dreiecke ist blau gefärbt. Die Seitenlänge des Sechsecks beträgt 2 cm.
- Berechnet den Flächeninhalt der lila gefärbten Fläche.
 - Berechnet die Länge der Strecke AE .
 - Zeigt, dass der Flächeninhalt der Scheibe um mehr als 2 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des Sechsecks. Es ist bekannt, dass $3,14 < \pi < 3,15$ und $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.
16. Der Garten von Tudors Haus ist in Abbildung 13 skizziert. Der Punkt A gehört zum Halbkreis BC . Auf der grünen Fläche sind Obstbäume gepflanzt, und die schraffierte Fläche ist mit Blumen bedeckt. $AB = 48$ m und $AC = 36$ m sind bekannt.
- Berechnet den Radius des Halbkreises $\widehat{BC}$.
 - Berechnet den Flächeninhalt der mit Blumen bedeckten Fläche.
 - Im Punkt M wird eine Glühbirne installiert, der Mittelpunkt der Seite AC . Die Glühbirne wird über einen gut gespannten Draht von Punkt B aus zugeführt. Berechnet den Sinus des Winkels $\sphericalangle MBC$.

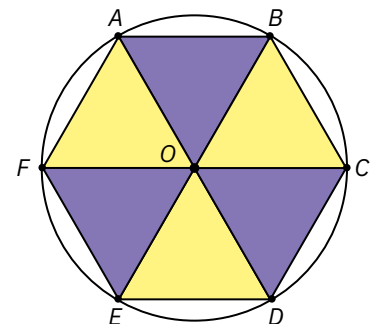


Abbildung 12

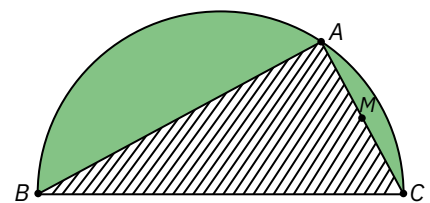


Abbildung 13

Selbstbewertung

- Löst das Dreieck ABC , wobei ihr wisst, dass $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 30^\circ$ und $BC = 12$ cm. (3 Pkte.)
- Löst das rechtwinklige Dreieck ABC ($\sphericalangle A = 90^\circ$), wobei bekannt ist, dass: $AD \perp BC$, $D \in BC$, $BD = 8$ cm und $CD = 18$ cm. (3 Pkte.)
- Ein Quadrat ist einem Kreis mit dem Radius 12 cm einbeschrieben.
 - Bestimmt den Umfang und den Flächeninhalt des Quadrats.
 - Bestimmt den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks, das demselben Kreis wie das Quadrat einbeschrieben ist. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.





Wiederholung und Bewertung

Orthogonale Projektionen auf einer Geraden. Höhensatz. Kathetensatz • Satz des Pythagoras; Kehrsatz des Pythagoras • Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck • Lösen des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung von Elementen in regelmäßigen Vielecken. Annäherung von Entfernungen in praktischen Situationen mithilfe metrischer Beziehungen

Für die Aufgaben 1–22 schreibt den Buchstaben, der der richtigen Antwort entspricht, in eure Hefte. Für die Übungen 23–30 schreibt die vollständigen Antworten auf.

- In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse 4 cm und 6 cm lang. Die Länge der entsprechenden Höhe der Hypotenuse ist gleich:
a. 10 cm; b. $2\sqrt{6}$ cm.
- In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge einer Kathete gleich 8 cm und die Länge der Projektion der Kathete auf die Hypotenuse ist gleich 2 cm. Die Länge der Hypotenuse ist gleich:
a. 32 cm; b. 16 cm.
- In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Länge der Hypotenuse 20 cm und die Länge einer Kathete 16 cm. Die Länge der anderen Kathete ist:
a. 4 cm; b. 12 cm; c. 18 cm; d. 36 cm.
- Das Ergebnis der Berechnung von $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ ist gleich:
a. 0; b. $\sqrt{3}$; c. $\frac{1}{2}$; d. 1.
- Dreieck MNP ist rechtwinklig, mit $\sphericalangle N = 90^\circ$, $MN = 9$ cm, $MP = 15$ cm. Der Tangens des Winkels P ist gleich:
a. $\frac{3}{5}$; b. $\frac{3}{4}$; c. $\frac{4}{3}$; d. $\frac{4}{5}$.
- In einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck beträgt die Länge einer Kathete 4 cm. Die Länge der Hypotenuse ist gleich:
a. 8 cm; b. $4\sqrt{3}$ cm;
c. $4\sqrt{2}$ cm; d. 16 cm.
- In einem Quadrat ist die Diagonale 16 cm lang. Der Umfang des Quadrats ist gleich:
a. $32\sqrt{2}$ cm; b. 64 cm.
- Die Länge der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge von 12 cm ist gleich:
a. $4\sqrt{3}$ cm; b. $6\sqrt{3}$ cm;
c. $4\sqrt{5}$ cm; d. $4\sqrt{2}$ cm.
- Im gleichschenkligen Dreieck DEF mit der Grundlinie $EF = 8$ cm beträgt die Länge der entsprechenden Höhe 3 cm. Die Länge der Höhe, die der Seite DF entspricht, ist gleich:
a. 15 cm; b. $\frac{20}{3}$ cm; c. $\frac{24}{5}$ cm; d. 20 cm.
- Die Dimensionen eines Rechtecks sind 4 cm und 8 cm. Die Länge der Diagonale des Rechtecks ist gleich:
a. 32 cm; b. $4\sqrt{5}$ cm;
c. $2\sqrt{5}$ cm; d. $4\sqrt{3}$ cm.
- In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Grundlinie BC ist das Maß des Winkels BAC gleich 120° . Der Tangens des Winkels ABC ist gleich:
a. $\sqrt{3}$; b. $\frac{1}{2}$; c. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Ein Rhombus hat Diagonalen mit den Längen 24 cm und 10 cm. Der Umfang des Rhombus ist gleich:
a. 52 cm; b. 34 cm; c. 68 cm; d. 72 cm.
- Im Parallelogramm $ABCD$, $\sphericalangle DAB = 60^\circ$, $BD \perp AD$ und $AB = 20$ cm. Die Länge der Diagonale BD ist gleich:
a. $10\sqrt{5}$ cm; b. $10\sqrt{3}$ cm;
c. 10 cm; d. 20 cm.
- Im Dreieck MNP , rechtwinklig in N , ist NQ die Höhe, $MN = 15$ cm, $MQ = 9$ cm. Der Umfang des Dreiecks MNP ist gleich:
a. 45 cm; b. 30 cm; c. 60 cm; d. 90 cm.
- Im Dreieck ABC , das in A rechtwinklig ist, ist $AB = 5$ cm, $\operatorname{tg} C = 0,2$. Die Länge der Hypotenuse ist gleich:
a. $10\sqrt{6}$ cm; b. $5\sqrt{26}$ cm;
c. $\sqrt{26}$ cm; d. 20 cm.
- Im Dreieck ABC , rechtwinklig in A , ist $AB = 3$ cm, $\sin C = 0,6$. Die Länge der Hypotenuse ist gleich:
a. $\sqrt{34}$ cm; b. $\sqrt{5}$ cm; c. 5 cm; d. 1,8 cm.
- Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit einer Hypotenuse von 15 cm und einer Kathete von 9 cm ist gleich:
a. 54 cm²; b. 108 cm²;
c. 72 cm²; d. 64 cm².
- Im Dreieck ABC ist $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $AB = 4$ cm und $BC = 8$ cm. Das Maß des Winkels ACB ist gleich:
a. 30° ; b. 60° ; c. 20° ; d. 90° .



19. Bei einem rechtwinkligen Trapez sind die Grundlinien 4 cm und 10 cm lang und die Höhe beträgt 8 cm. Der Umfang des Trapezes ist gleich:

- a. 32 cm; b. 56 cm; c. 2 cm; d. 90 cm.

20. Sei das rechtwinklige Dreieck ABC in A und $AD \perp BC$, $D \in BC$, $BD = 4$ cm und $DC = 12$ cm. Die Länge der Kathete AC ist gleich:

- a. $8\sqrt{3}$ cm; b. 8 cm; c. 6 cm; d. 16 cm.

21. Sei das in A rechtwinklige Dreieck ABC und $AD \perp BC$, $D \in BC$. Wenn $\angle ACB = 30^\circ$, dann ist $\sin BAD$ gleich:

- a. 0,5; b. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d. 1.

22. Sei das Dreieck ABC rechtwinklig in A und $AD \perp BC$, $D \in BC$. Wenn $\sin ABC = \frac{3}{5}$, dann ist $\cos BAD$ gleich:

- a. $\frac{5}{3}$; b. $\frac{3}{5}$; c. $\frac{4}{5}$; d. $\frac{5}{4}$.

23. Welche der folgenden Aussagen ist richtig und welche ist falsch?

- a. „Die Zahlen 12, 15 und 9 sind pythagoreische Zahlen.“
b. „Die Projektion einer Strecke auf eine Gerade ist eine Strecke oder ein Punkt.“
c. „Die Länge einer Strecke ist immer größer als die Länge ihrer Projektion auf eine Gerade.“
d. „Die Summe der Quadrate der Längen der Diagonalen eines Rhombus ist viermal so groß wie das Quadrat der Länge einer Seite.“

24. Sei das Dreieck MPQ , rechtwinklig in P , und $PD \perp MQ$, $D \in MQ$. Ordnet jedem in Spalte **A** genannten Satz die entsprechende Beziehung in Spalte **B** zu.

A	B
1. Höhensatz	a. $PM^2 + PQ^2 = MQ^2$
2. Kathetensatz	b. $PD^2 = DM \cdot DQ$
3. Satz des Pythagoras	c. $PQ^2 = QD \cdot QM$
	d. $PM^2 = PD \cdot DM$

25. Sei ein Dreieck ABC , das in A rechtwinklig ist. Bestimmt die Zahlen a , b , c und d in der folgenden Tabelle:

AB	AC	BC
a cm	16 cm	20 cm
15 cm	b cm	25 cm
6 cm	8 cm	c cm
d cm	d cm	10 cm

26. Bestimmt die Zahlen a , b , c , d , die die Gleichheiten in der nachstehenden Tabelle überprüfen.

$\sin 30^\circ = \frac{2}{a}$	$\cos b^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\tan 30^\circ = \frac{4}{c}$
-------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------

27. Im Dreieck ABC , das rechtwinklig in A ist, ist bekannt, dass $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ und $BC = 6$ cm.

- a. Berechnet die Länge der Seiten AB und AC .
b. Berechnet die Längen der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.
c. Bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks ABC , gerundet auf die nächste ganze Zahl.

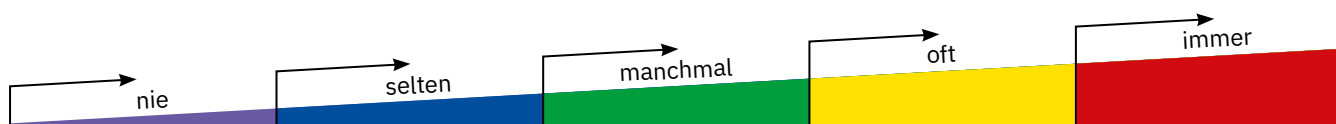
28. In dem gleichschenkligen Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 5\sqrt{3}$ cm, $DC = 15\sqrt{3}$ cm und $\angle C = 30^\circ$. Berechnet den Flächeninhalt und den Umfang des Trapezes $ABCD$.

29. Sei der Rhombus $ABCD$ mit $AC = 10\sqrt{3}$ cm und $BD = 10$ cm. Bestimmt den Umfang von $ABCD$ und das Maß des Winkels BAD .

30. In dem gleichschenkligen Trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 4$ cm, $DC = 12$ cm und $BD = 10$ cm. Berechnet den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ und den Abstand zwischen dem Punkt D und der Geraden BC .

Systematischer Beobachtungsbogen

- Ich war sehr daran interessiert, Neues über Lösungsmethoden von Aufgaben zu lernen.
► Meine Teilnahme am Matheunterricht wurde von meinen Mitschülern und meinem Lehrer geschätzt.



Lösungen

Einheit 1: Die Menge der reellen Zahlen

1. Lektion. Die Quadratwurzel einer Quadratzahl. Schätzen der Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl

1. a, d, e, f, h, i. 2. 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144. 4.a. W; b. F; c. W; d. F; e. F; f. W. 5.a. 5; b. 9; c. 1; d. 20; e. 24; f. 30. 6.a. 8; b. 4; c. 5; d. 29. 7.a. 52; b. 29; c. 121; d. 50. 8.a. 3; b. 14; c. 45; d. 25; e. 512; f. 16; g. 243. 9.a. 9; b. 9; c. 27. 10.a. 25; b. 4; c. 6; d. 5. 11.a. $a = 36$, $\sqrt{a} = 6$; b. $a = 9$, $\sqrt{a} = 3$; c. $a = 369^2$, $\sqrt{a} = 369$. 12.a. 6; b. 15; c. 100; d. 20; e. 75; f. 216. 13.a. 3; b. 6; c. 44; d. 2. 14.a. 18; b. 80; c. 225; d. 30^{10} ; e. $2^4 \cdot 3^5$; f. $7^8 \cdot 10^{14}$. 15.a. 1; b. 1. 16.a. B; b. H; c. C; d. A; e. D; f. G. 17.a. 0,2; b. 0,6; c. 0,01; d. 1,6; e. 1,2; f. 3,2. 18.a. 72; b. 0,24; c. 1,2; d. 0,14; e. 0,65; f. 0,625.

Test: 1.a. 4; b. 1,8; c. 6; d. 1. 2.a. 0. 3.a. $\sqrt{a} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$; b. $\sqrt{a} = 17 \cdot 3 = 51$; c. $\sqrt{a} = 6^2 \cdot 8 = 288$.

2. Lektion. Die Menge der reellen Zahlen

1.a. 0; 7; b. -6; 0; 7; -10; c. -6; 0; -2,8; $\frac{4}{3}$; 7; -10; 5,4(12); d. $\sqrt{5}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{15}$; e. alle. 2.a. W; b. F; c. F; d. W; e. W; f. W. 3.a. W; b. W; c. F; d. W; e. W; f. W; g. W; h. W. 4.a. 2,2 und 8,6; b. 2,65 und 8,25; c. 4,123 und 14,799. 7.a. W; b. W; c. F; d. W; e. F; f. F; g. W; h. W. 8.a. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$;

b. $\sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{5}{9} \in \mathbb{Q}$; c. $\sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{11}{4} \in \mathbb{Q}$; d. $\sqrt{0,81} = 0,9 \in \mathbb{Q}$. 9.a. rational; b, c, d. irrational. 10. $A \cap \mathbb{N} = \{0\}$, $A \cap \mathbb{Z} = \{-6; 0\}$, $A \cap \mathbb{Q} = \{-6; \frac{3}{4}; 3; (4); 0; 1,8\}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{\sqrt{7}; -\sqrt{12}; \sqrt{24}\}$, $A \cap \mathbb{R} = A$, $A \setminus \mathbb{Q} = \{\sqrt{7}; -\sqrt{12}; \sqrt{24}\}$, $A \setminus \mathbb{R} = \emptyset$. 11.a. 2 und 3; b. 2 und 3; c. -5 und -4;

d. 9 und 10; e. 6 und 7; f. 16 und 17; g. 27 und 28; h. -3 und -2. 12.a. 3,1 und 3,24; b. $\sqrt{10}$ und $\sqrt{11}$. 13.a. $A = \{3\}$; b. $B = \{5, 6, 7, \dots, 15\}$; c. $C = \{1, 2, \dots, 8\}$. 14.a. $\sqrt{2} < 1,5$; b. $-\sqrt{3} > -2$; c. $\frac{2}{3} > \sqrt{0,36}$; d. $-\sqrt{34} > -\sqrt{35}$. 15.a. $-4 < -3,89 < -3 < -2, (64) < -2,6 < 9$;

b. $-\sqrt{11} < -\sqrt{10} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{10}$; c. $1 < \sqrt{2} < 1,5 < \sqrt{3} < 2$. 16.a. 0,5; b. $\frac{3}{2}$; c. $\sqrt{2} - 1$; d. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; e. $-4 + \sqrt{17}$; f. $\sqrt{8} + 3$; g. $\sqrt{5} + \sqrt{6}$; h. $\sqrt{7} - 2$.

17.a. 5 rationale Zahlen, 25 irrationale Zahlen. b. 450. 18.a. $\sqrt{x} = 5$; b. $\sqrt{x} = 15$; c. $\sqrt{x} = 25$; d. $\sqrt{x} = 7^{50}$. 19.a. $\sqrt{55} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; b. $u(5^{10} + 6^{10} + 1) = 2 \Rightarrow 5^{10} + 6^{10} + 1$ ist keine Quadratzahl; c. $u(10^{10} + 11^{10} + 12^{10}) = 7 \Rightarrow 10^{10} + 11^{10} + 12^{10}$ ist keine Quadratzahl. 20.a. $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$; b. $x \in \emptyset$; c. $x = 0$; d. $x \in \mathbb{R}^*$. 21. Wir nehmen an laut der Methode der Zurückführung auf einen Widerspruch, dass $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$. Daraus folgt, dass $x = (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ (Produkt rationaler Zahlen), falsch. Folglich ist $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 22. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-4, 4\}$ und $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \{-4, 4\}$, $A \cap C = A$. 23.a. $x \in \{5, 6\}$; b. $x \in \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$; c. $x = 5$; d. $x \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$.

Test: 1. $-\sqrt{3} < -1,5 < 0,5 < \frac{3}{2} < \sqrt{5}$. 2.b. 3. $A \cap \mathbb{N} = \{0\}$, $A \cap \mathbb{Z} = \{-4; 0\}$, $A \cap \mathbb{Q} = \{-4; -1, (25); \frac{1}{4}; 0; -11,6\}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{\sqrt{2}; -\sqrt{7}; \sqrt{10}\}$, $A \cap \mathbb{R} = A$, $A \setminus \mathbb{Q} = \{\sqrt{2}; -\sqrt{7}; \sqrt{10}\}$, $A \setminus \mathbb{R} = \emptyset$.

3. Lektion. Rechenregeln für Quadratwurzeln

1.a. $\sqrt{27}$; b. $\sqrt{30}$; c. $\sqrt{14}$; d. $\sqrt{165}$; e. $\sqrt{130}$; f. $\sqrt{105}$; g. $\sqrt{114}$; h. $\sqrt{66}$. 2.a. $\sqrt{6}$; b. $\sqrt{11}$; c. $\sqrt{31}$; d. $\sqrt{56}$; e. $-\sqrt{70}$; f. $\sqrt{6}$; g. $-\sqrt{108}$; h. $\sqrt{3}$. 3.a. $\sqrt{\frac{6}{5}}$; b. $\sqrt{\frac{5}{2}}$; c. $-\sqrt{\frac{3}{14}}$; d. $\sqrt{\frac{39}{10}}$; e. $\sqrt{\frac{2}{3}}$; f. $-\sqrt{\frac{11}{18}}$; g. $\sqrt{\frac{5}{3}}$; h. $\sqrt{\frac{3}{5}}$. 4.a. 4; b. 5; c. 6; d. 8; e. 10; f. 1; g. 2; h. 4.

5.a. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$; b. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$; c. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$; d. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}$; e. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{23}$; f. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{22}$; g. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{82}$; h. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{50}$. 6.a. $\sqrt{\frac{5}{3}}$; b. $\sqrt{\frac{13}{2}}$; c. $\sqrt{\frac{7}{15}}$; d. $\sqrt{11}$; e. $\sqrt{5}$; f. $\sqrt{5}$; g. $\sqrt{\frac{1}{3}}$; h. $\sqrt{\frac{3}{14}}$. 7.a. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; b. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$; c. $\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{5}}$; d. $\frac{\sqrt{57}}{\sqrt{10}}$; e. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$; f. $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{40}}$; g. $\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{9}}$; h. $\frac{\sqrt{217}}{\sqrt{90}}$. 8.a. $2\sqrt{3}$; b. $2\sqrt{5}$;

c. $2\sqrt{17}$; d. $2\sqrt{15}$; e. $2\sqrt{23}$; f. $2\sqrt{30}$; g. $10\sqrt{2}$; h. $6\sqrt{7}$. 9.a. $3\sqrt{2}$; b. $5\sqrt{2}$; c. $2\sqrt{14}$; d. $3\sqrt{10}$; e. $2\sqrt{29}$; f. $3\sqrt{22}$; g. $6\sqrt{10}$; h. $11\sqrt{3}$. 10.a. $\frac{4\sqrt{3}}{5}$; b. $\frac{\sqrt{17}}{6}$; c. $\frac{8\sqrt{3}}{13}$; d. $\frac{7\sqrt{5}}{16}$; e. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$; f. $\frac{12\sqrt{6}}{11}$; g. $\frac{2\sqrt{187}}{17} = \frac{2\sqrt{11}}{17}$; h. $\frac{5\sqrt{35}}{21}$. 11.a. $2\sqrt{5}|x|$; b. $3|x|\sqrt{5y}$, $y \geq 0$; c. $4|xy|\sqrt{2x}$,

$x \geq 0$; d. $2x^2|y^3|\sqrt{17}$. 12. a H; b I; c B; d A; e C; f F; g E; h G. 13.a. $\sqrt{\frac{7}{9}}$; b. $\sqrt{\frac{16}{5}}$; c. $-\sqrt{\frac{18}{7}}$; d. $-\sqrt{80}$; e. $\sqrt{\frac{3}{20}}$; f. $-\sqrt{\frac{11}{27}}$; g. $\sqrt{\frac{361}{100}}$; h. $\sqrt{\frac{31}{100}}$.

14.a. $\sqrt{2x^2}$; b. $\sqrt{5x^2}$; c. $\sqrt{10x^6}$; d. $\sqrt{6x^4}$; e. $\sqrt{7x^2y^2}$; f. $-\sqrt{7x^6y^4}$. 15.a. $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$; b. $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$; c. $4\sqrt{2} < 2\sqrt{10}$; d. $-3\sqrt{6} > -2\sqrt{14}$; e. $-2\sqrt{23} > -4\sqrt{6}$; f. $3\sqrt{7} < 8$; g. $-4\sqrt{5} > -9$; h. $5\sqrt{5} - 11 > 0$. 16.a. $2\sqrt{2} < 3\sqrt{2} < \sqrt{19} < 2\sqrt{5} < \sqrt{21} < 2\sqrt{6}$; b. $5 < 3\sqrt{3} < 2\sqrt{7} < 2\sqrt{10} < 4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$. 17.b. $A(0,5)$, $B(-0,8)$, $C(\sqrt{5})$, $D(-\sqrt{2})$, $E(-\sqrt{3})$, $F(2\sqrt{3})$, $G(2\sqrt{2})$; c. (D, G) , (D, J) , (E, F) , (G, J) , (I, H) .

Test: 1.a. $5\sqrt{2}$; b. 5; c. $\sqrt{6}$; d. 7. 2.a. 2. 3.a. $3\sqrt{2} < 2\sqrt{6}$; b. $-2\sqrt{7} < -3\sqrt{3}$; c. $3\sqrt{11} < 10$; d. $4\sqrt{5} - 9 < 0$.

4. Lektion. Addition und Subtraktion der reellen Zahlen

1.a. $13\sqrt{2}$; b. $10\sqrt{7}$; c. $2\sqrt{5}$; d. $8\sqrt{6}$; e. $29\sqrt{3}$; f. $17\sqrt{7}$; g. $11\sqrt{6}$; h. $-6\sqrt{3}$. 2.a. $8\sqrt{3} + 9\sqrt{2}$; b. $7\sqrt{6} + 16\sqrt{7}$; c. $5\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$; d. $12\sqrt{7} - 8\sqrt{10}$; e. $-15\sqrt{2}$; f. $7\sqrt{6} - 7\sqrt{3}$. 3.a. $3\sqrt{5}$; b. $32\sqrt{6}$; c. $-2\sqrt{3} - \sqrt{2}$; d. $8\sqrt{3} - 9\sqrt{6}$; e. $12\sqrt{5} + \sqrt{7}$; f. $9\sqrt{13}$. 4.a. $a + b = 8\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$, $a - b = \sqrt{5}$;

b. $a + b = 14\sqrt{2} - 5\sqrt{10}$, $a - b = -2\sqrt{2} + 13\sqrt{10}$; c. $a + b = \sqrt{7} + 15\sqrt{6}$, $a - b = 19\sqrt{7} - 21\sqrt{6}$; d. $a + b = 6\sqrt{3} + 14\sqrt{5}$, $a - b = 10\sqrt{3} - 6\sqrt{11}$.

5.a. $a + b + c = 0$; b. $a + b + c = 7$; c. $a + b + c = 10$. 6. $12\sqrt{6}$ cm. 7. $12\sqrt{5}$ dm. 8.a. $7\sqrt{3}$; b. $2\sqrt{5}$; c. $6\sqrt{3}$; d. $15\sqrt{2}$; e. $-3\sqrt{2}$; f. $6\sqrt{6}$.

9.a. $10\sqrt{3} + 9\sqrt{10}$; b. $11\sqrt{2} - 5\sqrt{11}$; c. $5\sqrt{13} - \sqrt{15}$; d. $3\sqrt{3} - 23\sqrt{5}$; e. $16\sqrt{5} - 8\sqrt{2}$; f. $22\sqrt{7} - 31\sqrt{6}$. 10.a. $34\sqrt{2}$; b. $43\sqrt{3}$; c. $46\sqrt{5}$;

d. $7\sqrt{6}$; e. $50\sqrt{7}$; f. $3\sqrt{10}$. 11.a. 0; b. 0; c. $43\sqrt{5}$; d. $4\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$; e. $26\sqrt{2}$; f. $-20\sqrt{7}$. 12.a. 0; b. $4\sqrt{x}$; c. $4\sqrt{x} - 5\sqrt{y}$; d. $-4\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$;

e. $2\sqrt{2a}$; f. $10\sqrt{3a}$. 13.a. $\frac{77\sqrt{2}}{45}$; b. $\frac{5\sqrt{6}}{7}$; c. $\frac{8\sqrt{5}}{9}$; d. $\frac{7\sqrt{7}}{8}$. 14.a. $a < b$; b. $a > b$; c. $a > b$; d. $a < b$; e. $a < b$. 15.a. $\sqrt{10} - \sqrt{7}$; b. $-\sqrt{14} + \sqrt{15}$;

c. $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$; d. $-4\sqrt{2} + 6$; e. $3\sqrt{3} + 5$; f. $-2\sqrt{14} + 3\sqrt{7}$; g. $2\sqrt{6} + 3\sqrt{5}$; h. $-6\sqrt{2} + 9$. 16.a. 1; b. 4; c. 1; d. 0. 17. Laut Lehrsatz des Pythagoras

ergibt sich, dass $SG + GC = \sqrt{72500} + 200 \text{ m} = 469,25 \text{ m}$ und $SL + LC = \sqrt{10^5} + 150 \text{ m} = 466,22 \text{ m}$, also ist der von Victor zurückgelegte Weg kürzer.

5. Lektion. Multiplikation und Division der reellen Zahlen

1.a. $8\sqrt{15}$; b. $45\sqrt{14}$; c. $-30\sqrt{30}$; d. $-55\sqrt{91}$; e. $60\sqrt{30}$; f. $-30\sqrt{42}$; g. $9\sqrt{105}$; h. $-80\sqrt{22}$. 2.a. $36\sqrt{2}$; b. $-50\sqrt{3}$; c. $-120\sqrt{5}$; d. $-24\sqrt{15}$; e. 360; f. $96\sqrt{3}$; g. $-80\sqrt{30}$; h. -280. 3.a. $\sqrt{6}$; b. $\sqrt{15}$; c. $-\sqrt{3}$; d. $-\sqrt{2}$; e. $-4\sqrt{3}$; f. $3\sqrt{15}$; g. $-3\sqrt{6}$; h. $6\sqrt{2}$. 4.a. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$; b. $-\frac{5\sqrt{15}}{12}$; c. $14\sqrt{5}$; d. $\frac{\sqrt{5}}{9}$; e. -25; f. $-\frac{8}{125}$; g. $-\frac{\sqrt{2}}{24}$; h. $35\sqrt{2}$. 5.a. $a \cdot b = 54$, $a : b = 2$; b. $a \cdot b = 175\sqrt{2}$, $a : b = \sqrt{2}$; c. $a \cdot b = 90\sqrt{2}$, $a : b = 2\sqrt{2}$; d. $a \cdot b = 60\sqrt{5}$, $a : b = 5\sqrt{5}$. 6. 96 cm^2 . 8.a. $3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$; b. $15\sqrt{2} + 15 - 6\sqrt{5}$; c. $48\sqrt{2} + 120\sqrt{3} - 60$; d. $5 - 2\sqrt{5} + 12\sqrt{2}$; e. $2 - 3\sqrt{5}$; f. 18. 9.a. $\frac{57}{2}$; b. $\frac{64}{3}$. 10.a. $2\sqrt{5} + 3\sqrt{30}$; b. $60\sqrt{2} + 60\sqrt{5} - 15\sqrt{30}$; c. $6\sqrt{6}$; d. $3\sqrt{2} + 4 - \sqrt{7}$. 11.a. $\frac{1}{4}$; b. $-\frac{1}{6}$; c. $\frac{5}{3}$; d. $-\frac{10}{3}$; e. $\frac{1}{\sqrt{7}}$; f. $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$; g. $-\sqrt{\frac{2}{5}}$. 12.a. $x = 2\sqrt{2}$; b. $x = 12\sqrt{2}$; c. $x = 8$; d. $x = 5\sqrt{7}$. 13.a. $x = 2$; b. $x = \sqrt{3}$; c. $x = -36$; d. $x = 3$.

Selbstbewertung: 1.a. $6\sqrt{14}$; b. $10\sqrt{15}$; c. $3\sqrt{3}$. 2.c. 90 cm^2 . 3.a. $5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$; b. $12\sqrt{3} + 12\sqrt{5} - 8\sqrt{6}$; c. $5\sqrt{10} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$.

6. Lektion. Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten. Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen

1.a. 64; b. 121; c. 0,001; d. 9; e. 28; f. $\frac{1}{4}$; g. $\frac{1}{5}$; h. $-\frac{27}{125}$. 2.a. $(1,3)^{11}$; b. $(\sqrt{7})^{15}$; c. $(-2\sqrt{3})^{11}$; d. $(-\sqrt{7})^4$; e. $(4\sqrt{5})^5$; f. $(3\sqrt{7})^6$; g. $(-0,5\sqrt{6})^{10}$; h. $(\sqrt{7})^0$. 3.a. $\frac{9}{25}$; b. $\frac{9}{64}$; c. $\frac{1}{6}$; d. $6\sqrt{2}$; e. $\frac{1}{45}$; f. $\sqrt{11}$. 4.a. 15^{10} ; b. 6^9 ; c. $(\sqrt{30})^{15}$; d. 12^{20} ; e. 3^8 ; f. 2^{72} ; g. 4^{16} ; h. $(-9)^{54}$. 5.a. $\left(\frac{2}{5}\right)^2$; b. $(5^4)^2$; c. $(0,1)^2$; d. $(6^{-1})^2$; e. $(\sqrt{5})^2$; f. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; g. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$. 6.a. 10; b. -8; c. 9; d. 4; e. -6; f. $-2\sqrt{6}$; g. 2; h. $\frac{1}{9}$. 7.a. $4\sqrt{5}$; b. $-5\sqrt{5}$; c. $-\sqrt{3}$; d. 5. 8.a. -504; b. 135; c. $120\sqrt{6}$; d. $360\sqrt{3}$. 9.a. 186; b. 158; c. $-2\sqrt{6}$; d. $-21\sqrt{3}$. 10.a. $\frac{1}{2}$; b. $\frac{9}{2}$. 11. a. -14. 12. $-29\sqrt{2}$. 14.a. $x = 11\sqrt{11} - \sqrt{1100} = 11\sqrt{11} - 10\sqrt{11} = \sqrt{11} = 3,31$; b.a. $x = 36,48 - 33,16 = 3,32$; B. $x = 3,31^3 - 4,47 \cdot 7,41 = 36,26 - 33,12 = 3,14$; C. $x = 36,48 - 4,47 \cdot 7,41 = 36,48 - 33,12 = 3,36$; D. $x = 3,31^3 - 33,16 = 36,26 - 33,16 = 3,1$. 15. a-B, b-C, c-A. 16.a. -1; b. 6; c. 0.

Test: 1.a. 3; b. 3^{35} ; c. 1. 2.c. $-5 - \sqrt{6}$. 3.a. 0; b. $112\sqrt{5}$; c. 5.

7. Lektion. Rationalisieren des Nenners eines Bruchs

1.a. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; b. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$; c. $-\frac{6\sqrt{5}}{5}$; d. $-\frac{9\sqrt{11}}{11}$; e. $\frac{6\sqrt{5}}{25}$; f. $\frac{8\sqrt{7}}{21}$; g. $\frac{15\sqrt{2}}{14}$; h. $-\frac{9\sqrt{5}}{20}$. 2.a. $\frac{7\sqrt{3}}{6}$; b. $-\frac{5\sqrt{2}}{6}$; c. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; d. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$; e. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$; f. $\frac{\sqrt{7}}{2}$; g. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$; h. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 3.a. $\frac{\sqrt{5}}{5}$; b. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c. $\frac{\sqrt{42}}{7}$; d. $\frac{\sqrt{15}}{5}$; e. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; f. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$; g. $\frac{2\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{20}$; h. $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{15}}{5}$. 4.a. 0; b. 0; c. 1; d. 0. 5.a. $4\sqrt{3}$; b. $\frac{11\sqrt{5}}{5}$; c. $4\sqrt{2}$; d. $\sqrt{6}$. 6.a. $6\sqrt{7} - 3\sqrt{5}$; b. $-\frac{41\sqrt{3}}{30}$; c. $\sqrt{5} + 1$; d. $\frac{9 + 5\sqrt{6}}{3}$. 7.a. $\frac{1}{2}$; b. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$; c. $8\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 6$; d. $\sqrt{2}$. 8.a. 5; b. $-\sqrt{6}$; c. $\frac{13\sqrt{7}}{6}$; d. $\frac{7\sqrt{2}}{60}$. 9.a. -4; b. 3; c. 0; d. 9. 10. 512. 11. $a = \frac{75}{2}$. Der Mindestwert von b ist $b = 384$.

Test: 1.a. $4\sqrt{2}$; b. $\sqrt{2}$; c. $-\frac{\sqrt{15}}{10}$; d. $\frac{\sqrt{10}}{50}$. 2.c. 1. 3.a. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$; b. 7; c. 1.

8. Lektion. Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen. Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen

1.a. $m_a = 6$, $m_g = 4\sqrt{2}$; b. $m_a = \frac{3}{2}$, $m_g = \frac{\sqrt{14}}{3}$; c. $m_a = \frac{41}{40}$, $m_g = 1$; d. $m_a = 5$, $m_g = 4,8$; e. $m_a = 2,08$, $m_g = 0,8$; f. $m_a = 2\sqrt{5}$, $m_g = \sqrt{15}$; g. $m_a = 4\sqrt{2}$, $m_g = \sqrt{30}$; h. $m_a = 2\sqrt{3}$, $m_g = 3$. 2.a. 5,6; b. 6,9; c. 0,4; d. 1,35. 3.a. $\frac{11\sqrt{3}}{3}$; b. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; c. $\frac{\sqrt{6}}{8}$; d. $\sqrt{7}$. 4. $15\sqrt{2}$. 5. $6\sqrt{3}$. 6. $5\sqrt{3}$. 8. $11\sqrt{3}$. 9. 18. 10. 4. 11. $m_p = \frac{25 \cdot 60 + 35 \cdot 56 + 40 \cdot 42 + 60 \cdot 35}{25 + 35 + 40 + 60} = \frac{7240}{160} = 45,25$ Lei. 12. 1 und 49 oder 7 und 7.

Test: 1. $m_a = 12\sqrt{2}$, $m_g = 2\sqrt{70}$. 2.a. $\frac{4}{3}$. 3. $4\sqrt{3}$.

9. Lektion. Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$

1.b, e. 2.a. $x = 6$; b. $x = 10$; c. $x \in \emptyset$; d. $x = 3$; e. $x = 5$; f. $x \in \emptyset$. 3.a. $x = -4$; b. $x = -5$; c. $x \in \emptyset$; d. $x = -7$; e. $x \in \emptyset$; f. $x \in \emptyset$. 4.a. $x \in \{-9, 9\}$; b. $x \in \{-15, 15\}$; c. $x \in \{-1, 1\}$; d. $x = 0$; e. $x \in \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$; f. $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. 5. 14 m. 6.a. $x \in \{-1,3; 1,3\}$; b. $x \in \{-0,8; 0,8\}$; c. $x \in \{-1,4; 1,4\}$; d. $x \in \emptyset$. 7.a. $x \in \left\{-\frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right\}$; b. $x \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$; c. $x \in \{-5; 5\}$; d. $x \in \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. 8.a. $x \in \{-0,6; 0,6\}$; b. $x \in \{-4; 4\}$; c. $x \in \{-1; 1\}$; d. $x \in \left\{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right\}$. 9.a. $x \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; b. $x \in \{-1; 1\}$; c. $x \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$; d. $x \in \{-1; 1\}$.

Selbstbewertung: 1.a. $x \in \{-5, 5\}$; b. $x \in \{-4, 4\}$; c. $x \in \{-5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}\}$. 2.b. 3. 15 m.

Einheit 2: Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

1. Lektion. Umformen einer Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Identitäten

1. $2a + 2b = 4$. 2.a. $2a - 4b = 10$; b. $3a - 6b = 15$; c. $4a - 8b = 20$; d. $10a - 20b = 50$; e. $-2a + 4b = -10$; f. $-5a + 10b = -25$. 3.a. 4; b. 12; c. 20; d. -4; e. -8; f. -36. 4.a. A; b. F; c. F; d. A; e. F; f. A. 5.a. A; b. F; c. F; d. A; e. F. 6.a. 8; b. 16; c. 8; d. -2; e. -5. 9. Durch Addieren der beiden Gleichungen ergibt sich $2x = 6$, also $x = 3$. 10. Man multipliziert die Gleichung mit 10. 11. Man subtrahiert die beiden Gleichungen, und die erhaltene Gleichung teilt man durch 2. 12. Wir haben $\sqrt{(2n+3)^2} = |2n+3|$. Da $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt, dass $2n+3 > 0$, also $|2n+3| = 2n+3$. Die

linke Seite wird also umgeschrieben $\sqrt{(2n+3)^2} + \sqrt{4} = |2n+3| + 2 = 2n+3+2 = 2n+5$. Auf der rechten Seite erhalten wir $2(n+3) - 1 = 2n+6-1 = 2n+5$. Aus der Transitivität folgt, dass $\sqrt{(2n+3)^2} + \sqrt{4} = 2(n+3) - 1$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Test: 1.a. F; b. W; c. F; d. W. 2. C. 14. 3.a. 21; b. -5; c. 4; d. -4.

2. Lektion. Gleichungen der Form $ax + b = 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Die Lösungsmenge einer Gleichung; äquivalente Gleichungen

1. a, e. 4.a. $2x+1=0$; $2x=-5$; b. $4x-3=0$; $\sqrt{2}x-3=0$; c. $3x-3=0$; $\sqrt{5}x-\sqrt{5}=0$. 6. a, b und d. 7.a. $S=\{3\}$; b. $S=\emptyset$; c. $S=\emptyset$; d. $S=\{0,4\}$; e. $S=\{3\}$; f. $S=\{2\sqrt{2}\}$. 8.a. $S=\{2\}$; b. $S=\{2\}$; c. $S=\{7\}$; d. $S=\{11\}$; e. $S=\{-5\}$; f. $S=\{4\}$. 9.a. Ja, beide Gleichungen haben $S=\{1\}$; b. Die erste Gleichung hat $S=\{-1\}$ und die zweite Gleichung hat $S=\{-2\}$, also sind sie nicht äquivalent. 10.a. $S=\{15\}$; b. $S=\left\{\frac{18}{5}\right\}$; c. $S=\left\{\frac{19}{2}\right\}$; d. $S=\{5\}$; e. $S=\{4\}$. 11.a. $S=\{2,8\}$; b. $S=\{0,48\}$; c. $S=\{-1\}$; d. $S=\{0,8\}$; e. $S=\{1,125\}$; f. $S=\{0\}$. 12.a. $S=\{5\}$; b. $S=\{2\}$; c. $S=\{\sqrt{7}\}$; d. $S=\{\sqrt{3}\}$; e. $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; f. $S=\{-4\sqrt{3}\}$. 13.a. $S=\left\{-\frac{11}{2}\right\}$; b. $S=\left\{\frac{13}{2}\right\}$; c. $S=\{-6\}$; d. $S=\left\{-\frac{2}{5}\right\}$; e. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; f. $S=\left\{\frac{31}{3}\right\}$. 14.a. $3x+7=-11$ oder $3x+7=11$; $S=\left\{-6; \frac{4}{3}\right\} \cap \mathbb{Z} = \{-6\}$. b. Es gelten die Bedingungen $x \neq 2$ und $x \neq 0$, also $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2\}$; $S=\{-6\}$. c. $S=\left\{-3; -\frac{5}{2}; 4\right\} \cap \mathbb{Z} = \{-3; 4\}$.

Test: 1.a. $3x+7=0$; b. $-2x-0,5=0$; c. $-7x+7=0$. 2.a. -2. 3.a. $S=\left\{-\frac{51}{7}\right\}$; c. $S=\{2\}$.

Lektion 3. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

1. a und d. 2.a. Ja; b. Nein; c. Ja; d. Nein. 4.a. $(0,4)$, $(2,3)$; b. $(0,3)$, $(2,5)$. 5.a. $b=2$; b. $a=3, b=1$. 7.a. Ja; b. Nein; c. Nein; d. Ja. 8.a. $S=\{(4,1)\}$; b. $S=\{(2,2)\}$; c. $S=\{(4,2)\}$; d. $S=\left\{6; \frac{1}{2}\right\}$. 9.a. $S=\{(4,3)\}$; b. $S=\{(-9,-5)\}$; c. $S=\{(2,-2)\}$; d. $S=\{(-1,3)\}$. 10.a. $S=\{(3,5)\}$; b. $S=\left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)\right\}$; c. $S=\{(2,-4)\}$; d. $S=\{(-2,8)\}$. 11.a. $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ -x+2y=8 \end{cases}$; b. $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=2 \\ 3x+\sqrt{3}y=0 \end{cases}$; c. $\begin{cases} \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=2 \\ x+2y=-2\sqrt{2} \end{cases}$; d. $\begin{cases} -x+3y=-1+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x-y=-3+\sqrt{3} \end{cases}$. 12.a. $S=\{(2t-3, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; b. $S=\emptyset$; c. $S=\{(\alpha, \sqrt{3}\alpha-2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; d. $S=\emptyset$. 13. Wir haben die Situationen $\begin{cases} |2k-3n|=0 \\ (-k+2n)^2=1 \end{cases}$ und $\begin{cases} |2k-3n|=1 \\ (-k+2n)^2=0 \end{cases}$. Wir erhalten die Systeme $\begin{cases} 2k-3n=0 \\ -k+2n=1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2k-3n=0 \\ -k+2n=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2k-3n=1 \\ -k+2n=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2k-3n=-1 \\ -k+2n=0 \end{cases}$ mit den Lösungen $(3, 2)$, $(-3, -2)$, $(2, 1)$, $(-2, -1)$. 14.a. $S=\{(0; 3)\}$; b. $S=\{(\sqrt{3}; \sqrt{2})\}$; c. $S=\{(2\sqrt{7}; 4\sqrt{3})\}$; d. $S=\{(\sqrt{5}; -\sqrt{3})\}$.

Test: 1.a. Nein; b. Ja. 2.C. $S=\{(2, -2)\}$. 3. $S=\{(-3, 1)\}$.

4. Lektion. Lösen von Aufgaben mithilfe von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen

1. Sei a die Anzahl der Kletterer. Die Lösung der Gleichung $a + (a + 23) = 45$ ergibt $a = 11$. 2. Wenn man u als die Anzahl der Einheiten schreibt, erhält man die Gleichung $2u + u = 12$. Die Zahl ist 84. 3. n sei die Zahl. Der Dividend ist $(n+4) \cdot 5 - 5$. Laut dem Lehrsatz der Division mit Rest ergibt sich $(n+4) \cdot 5 - 5 = 4 \cdot 2533 + 3$; $n = 2024$. 4. $Divisor \in \mathbb{N}^*$ sei die kleinere Zahl. Dann ist die größere Zahl $Divisor + 392$. Wir erhalten $Divisor + 392 = Divisor \cdot 12 + 7$, vorausgesetzt $7 < Divisor$. Die Zahlen sind 427 und 35. 5. $x \in \mathbb{N}^*$ sei Anas Alter. Wir erhalten $x + 15 = 4 \cdot (x - 6)$. Ana ist jetzt 13 Jahre alt. 6.a. Wenn es in dem Wohnblock 28 Wohnungen mit je 3 Zimmern gäbe, dann gäbe es auch 22 Wohnungen mit je 2 Zimmern. Die Gesamtzahl der Zimmer im Wohnblock würde $28 \cdot 3 + 22 \cdot 2 = 128$ betragen, was der Aussage widerspricht, dass es 118 Zimmer gibt. Es ist also nicht möglich. b. Bezeichnen wir mit $d, t \in \mathbb{N}^*$ die Anzahl der Zweizimmer- bzw. Dreizimmerwohnungen, so erhalten wir das Gleichungssystem $d + t = 50$ und $2d + 3t = 118$, mit der Lösung $d = 32$, $t = 18$. 7. 81 kg bzw. 54 kg. 8. 11 Lei. 9.a. Wenn es 25 Schüler in der Klasse gäbe und auf jeder Bank 3 Schüler säßen, wäre nur noch ein Schüler auf einer Bank, was der Aussage der Aufgabe widerspricht. b. Wir bezeichnen mit $e, b \in \mathbb{N}^*$ die Anzahl der Schüler bzw. die Anzahl der Bänke, um das System aus den Gleichungen $e = 2(b - 3) + 1$ und $e = 3(b - 7)$ zu erhalten, mit der Lösung $e = 27$, $b = 16$. 10. 8 Aufgaben. 11. 24 Aktien zu je 15 Euro bzw. 16 Aktien zu je 12 Euro. 12. 60 T-Shirts. 13.a. Wenn sie am zweiten Tag 15 km zurückgelegt hätten, dann hätten sie am dritten Tag 10 km zurücklegen müssen, was dem widerspricht, dass sie am dritten Tag 8 km zurückgelegt haben. b. 32 km. 14. Wir bezeichnen mit d die Entfernung zwischen dem Erdloch und dem Haselnussstrauch. In Sekunden ausgedrückt beträgt die Zeit, die benötigt wird, um die Strecke vom Erdloch zum Haselnussstrauch zurückzulegen $\frac{d}{6}$, und der Abstand zwischen dem Haselnussstrauch und dem Erdloch beträgt $\frac{d}{3}$. Wir erhalten $\frac{d}{6} + \frac{d}{3} = 240$ und somit $d = 480$ m. 15. Der Zug fährt mit der Lokomotive auf die Brücke und fährt mit dem letzten Wagen ab. Bezeichnet man mit x die Länge der Brücke in Metern und v die Geschwindigkeit des Zuges in Metern pro Minute, so erhält man die Gleichungen $x + 350 = v \cdot 7$ und $x + 350 = (v + 100) \cdot 6$. Die Länge der Brücke beträgt 3 850 m. 16. 200 ml mit der Konzentration 6 % und 400 ml bei 3%iger Konzentration. 17. Sei $c \in \mathbb{N}^*$ die Anzahl der Verbraucher, die an der Umfrage teilgenommen haben. Wir erhalten die Gleichung $\frac{2c}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2c}{3} = \frac{c}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2c}{3} + 60$, mit der Lösung $c = 900$ Verbraucher. 18.a. Wäre $\overline{ac} = 25$, dann hätten wir nach dem Lehrsatz der Division mit Rest $\overline{2b5} = 25 \cdot 8 + 1 = 201$, was unmöglich ist. b. Mit der Bedingung $a \neq 0$ lösen wir die Gleichung: $\overline{abc} = \overline{ac} \cdot 8 + 1 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = 80a + 8c + 1 \Leftrightarrow 20a + 10b = 7c + 1$. Da die letzte Ziffer der Zahl $20a + 10b$ null ist, folgern wir, dass die letzte Ziffer der Zahl $7c + 1$ null ist, und da c eine Ziffer ist, erhalten wir $c = 7$. Die Gleichung $20a + 10b = 7 \cdot 7 + 1 \Leftrightarrow 2a + b = 5$. Wir erhalten $\overline{abc} \in \{137; 217\}$. 19. Wir bezeichnen mit $g, x \in \mathbb{N}^*$ die Anzahl der Nelken bzw. Tulpen aus einem Strauß. Wir erhalten

ten die Gleichung $3g + 7x = 56$. Da die Zahlen $7x$ und 56 durch 7 teilbar sind, folgern wir, dass die Zahl $3g$ durch 7 teilbar ist. Da 3 und 7 Primzahlen sind, folgt daraus, dass die Zahl g durch 7 teilbar ist, und da g eine Primzahl ist, also g gleich 7 ist.

Selbstbewertung: 1. Es gibt 21 Mädchen und 7 Jungen. **2.a.** Wenn eine Rose 12 Lei kosten würde, dann würden 7 Rosen 84 Lei kosten, was 83 Lei, den Preis für 5 Tulpen und 7 Rosen, übersteigen würde. Es ist also nicht möglich. **b.** Wir bezeichnen mit $x, t \in \mathbb{Q}$, den Preis für eine Tulpe bzw. den Preis für eine Rose. Wir erhalten das System bestehend aus den Gleichungen $7x + 3t = 55$ und $5x + 7t = 83$. Eine Tulpe = 4 Lei, eine Rose = 9 Lei. **3.** Wir bezeichnen mit s den Betrag des Geldes. Am ersten Tag hat er $25\% \cdot s$ ausgegeben und hatte noch einen Rest $r = 75\% \cdot s$, den er an den folgenden drei Tagen ausgegeben hat. Wir lösen die Gleichung $r = 35\% \cdot r + (35\% \cdot r - 8 \text{ Lei}) + 62 \text{ Lei} = r$. Da $r = 180 \text{ Lei} = 75\% \cdot s$, ergibt sich $s = 240 \text{ Lei}$.

Einheit 3: Elemente der Datenverarbeitung

1. Lektion. Kartesisches Produkt zweier nicht leerer Mengen. Orthogonales Achsensystem in der Ebene.

Darstellung von Paaren reeller Zahlen in einem orthogonalen Achsensystem.

Darstellung von Punkten in einem orthogonalen Achsensystem. Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene

1. $x = 3, y = -1, z = 1$. **2.a.** $A \times B = \{(1,0), (1,1), (3,0), (3,1)\}, B \times A = \{(0,1), (0,3), (1,1), (1,3)\}, A \times A = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}, B \times B = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$; **b.** $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A) = 4, \text{card}(A \times A) = 4, \text{card}(B \times B) = 4$.
3.a. $A \times B = \{(-2,2), (-2,\sqrt{5}), (-1,2), (-1,\sqrt{5}), (1,2), (1,\sqrt{5}), (6,2), (6,\sqrt{5})\}, B \times A = \{(2,-2), (2,-1), (2,1), (2,6), (\sqrt{5},-2), (\sqrt{5},-1), (\sqrt{5},1), (\sqrt{5},6)\}, B \times B = \{(2,2), (2,\sqrt{5}), (\sqrt{5},2), (\sqrt{5},\sqrt{5})\}$; **b.** $\text{card}(A \times B) = \text{card}(B \times A) = 8, \text{card}(A \times A) = 16, \text{card}(B \times B) = 4$.
4. D. 40 Punkte. **7.** $A(2,3), B(3,-1), C(-2,0), D(-3,-5), E(0,-3), F(-4,4)$. **8.b.** $AB = 3, AC = 3\sqrt{2}, BC = 3\sqrt{5}$; **c.** Wenn M, N, P die Mittelpunkte der Strecken AB, AC, BC , dann $M\left(-\frac{1}{2}, 2\right), N\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right), P\left(1, \frac{1}{2}\right)$. **9.b.** $AB = AC = 5, BC = 6, U_{ABC} = 16$; **c.** $Fl_{ABC} = 12$; **d.** $M\left(\frac{3}{2}, 2\right), N\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.
10.b. $AB = AC = 5, BC = 8, U_{ABC} = 18$; **c.** $Fl_{ABC} = 12$; **d.** $A'(4,8), C'(1,12)$. **11.** $x \in \{-4, 4\}$. **12.a.** $M(3,1), N(-1,1), P(-2,-1)$; **b.** $A = \{-2, -1, 3\}, B = \{-1, 1\}, A \times B = \{(-2,-1), (-2,1), (-1,-1), (-1,1), (3,-1), (3,1)\}$. **13.** $A \times B = \{(1,-1), (1,3), (2,-1), (2,3)\}, A = \{1, 2\}, B = \{-1, 3\}$.
Test: 1. $A \times B = \{(0,-1), (0,0), (2,-1), (2,0), (3,-1), (3,0)\}, B \times A = \{(-1,0), (-1,2), (-1,3), (0,0), (0,2), (0,3)\}, A \times A = \{(0,0), (0,2), (0,3), (2,0), (2,2), (2,3), (3,0), (3,2), (3,3)\}, B \times B = \{(-1,-1), (-1,0), (0,-1), (0,0)\}$. **2.c.** $A'(-5,-1)$.
3.b. $AB = 10, AC = 6, BC = 8, U_{ABC} = 24$; **c.** $Fl_{ABC} = 24$.

2. Lektion. Darstellung und Interpretation von funktionalen Abhängigkeiten durch Tabellen, Diagramme und Grafiken. Häufigkeitspolygon

1.a. 5; **b.** 7; **c.** 14. **2.a.** 9; **b.** 7; **c.** 12. **3.** 120. **4.a.** 20; **b.** 100. **5.** 8, 16, 20, 36 bzw. 60. **8.a.** 40; **b.** in der ersten Jahreshälfte; **c.** Einkommen in der ersten Jahreshälfte: 170; Einkommen in der zweiten Jahreshälfte: 160; $170 - 160 = 10$. Er hat also in der zweiten Jahreshälfte 10 Millionen Lei weniger verdient als in der ersten Jahreshälfte. **9.a.** 56 000 Euro; **b.** die Monate Februar, März und Mai; **c.** im Mai (Rückgang um 3 000 Euro); **d.** die Monate Juli, August und September. **10. a.** 2 Monate; **b.** 40 Millionen Lei; **c.** 50 Millionen Lei. **12.** Wenn $x \in A$ und $y \in B$, dann ist $y = \text{Kapital von } x$. **14.** $y = 3x$ für jedes $x \in A$.

Selbstbewertung: 1.a. 4; **b.** 9; **c.** 6,48. **2.a.** 10 %; **b.** 30 %; **c.** 18. **3.** $y = x + 2$ für jedes $x \in A$.

Einheit 4: Das Viereck

1. Lektion. Konvexes Viereck. Die Winkelsumme im konvexen Viereck

1. $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 360^\circ - 190^\circ = 170^\circ$. **2.** $\sphericalangle D = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$. **3.** $\frac{\sphericalangle A}{3} = \frac{\sphericalangle B}{4} = \frac{\sphericalangle C}{5} = \frac{\sphericalangle D}{6} = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle A = 60^\circ, \sphericalangle B = 80^\circ, \sphericalangle C = 100^\circ, \sphericalangle D = 120^\circ$. **4.** $\frac{\sphericalangle A}{3} = \frac{\sphericalangle B}{4} = \frac{\sphericalangle C}{2} = \frac{\sphericalangle D}{6} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ \Rightarrow \sphericalangle A = 72^\circ, \sphericalangle B = 96^\circ, \sphericalangle C = 48^\circ, \sphericalangle D = 144^\circ$. **5.** $\sphericalangle A + \frac{\sphericalangle A}{2} + \frac{\sphericalangle A}{3} + \frac{\sphericalangle A}{4} = 360^\circ \Rightarrow \sphericalangle A = 172^\circ 48'$, $\sphericalangle B = 86^\circ 24', \sphericalangle C = 57^\circ 36', \sphericalangle D = 43^\circ 12'$. **6.** $99^\circ, 100^\circ, 101^\circ$. **7.** 42 cm. **8.** Es sei $M \in AB, B \in CN$. $\sphericalangle BMN = \sphericalangle AMD = 180^\circ - (\sphericalangle A + \sphericalangle ADM) = 180^\circ - (\sphericalangle C + \sphericalangle CDN) = \sphericalangle BNM$. **9.** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 100^\circ$ und $\sphericalangle D = 60^\circ$. **10.** $2B = A + C, 2C = B + D \Rightarrow 2B + 2C = A + B + C + D = 360^\circ \Rightarrow B + C = 180^\circ \Rightarrow A + D = 180^\circ$.
Test: 1.a. W ; **b.** F ; **c.** W ; **d.** W . **2.** $\sphericalangle A = 60^\circ, \sphericalangle B = 60^\circ, \sphericalangle C = 100^\circ, \sphericalangle D = 140^\circ$.
3. $AB + BD + DA = 25, BC + BD + CD = 27 \Rightarrow 32 + 2BD = 52 \Rightarrow BD = 10 \text{ cm}$.

2. Lektion. Das Parallelogramm. Eigenschaften

2.a. $ABCD$ Parallelogramm $\Rightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle D = 50^\circ, \sphericalangle A = \sphericalangle C = 130^\circ$. **c.** $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCA = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle C = 70^\circ, \sphericalangle D = \sphericalangle B = 110^\circ$.
3. $U_{DOC} = \frac{DB}{2} + \frac{AC}{2} + CD = 24 \text{ cm}$. **4.** $MNPQ$ Parallelogramm $\Rightarrow MN = PQ \Rightarrow 3x + 2 = 5x - 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow MN = 8 \text{ cm}, PN = 9 \text{ cm} \Rightarrow U_{MNPQ} = 34 \text{ cm}$.
5. $MNPQ$ Parallelogramm $\Rightarrow \sphericalangle M = \sphericalangle P \Rightarrow 2x + 3 = 3x - 27 \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle M = \sphericalangle P = 63^\circ; \sphericalangle Q = \sphericalangle N = 117^\circ$. **6.** $x + 16 + 2x + 2 + \frac{3x}{2} - 11 + \frac{7x}{3} - 16 = 360 \Rightarrow x = 54^\circ, \sphericalangle A = \sphericalangle C = 70^\circ, \sphericalangle B = \sphericalangle D = 110^\circ \Rightarrow ABCD$ Parallelogramm. **7.** $ASCB$ Parallelogramm $\Rightarrow AS \parallel BC; ACBT$ Parallelogramm $\Rightarrow AT \parallel BC$. Die Geraden AS und AT fallen laut dem Axiom von Euklid zusammen, d. h., die Punkte T, A, S sind kollinear. **8.** $\sphericalangle DAP = \sphericalangle PAQ = \frac{\sphericalangle A}{2}$. Aber $\sphericalangle PCQ = \frac{\sphericalangle C}{2} = \frac{\sphericalangle A}{2}$, also $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle DPA$ (Stufenwinkel in Bezug auf die Sekante CD), also $AP \parallel CQ$. Da $AQ \parallel PC \Rightarrow APCQ$ Parallelogramm.
9. Wir stellen fest: $\sphericalangle DAP = \sphericalangle PAB = x, \sphericalangle ABP = \sphericalangle PBC = y, ABCD$ Parallelogramm $\Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle APB = 180^\circ - (x + y) = 90^\circ$.
10. $AP = QC, AP \parallel QC \Rightarrow APCQ$ Parallelogramm. **11.** $ABCD$ Parallelogramm $\Rightarrow AD = BC = BD \Rightarrow \triangle DBC$ gleichschenkelig mit BM Seitenhalbierende $\Rightarrow BM$ ist Höhe. Da BM und CP Höhen sind, $BM \cap CP = \{P\} \Rightarrow$ Punkt P ist das Orthozentrum des Dreiecks $BCP \Rightarrow DP$ Höhe $\Rightarrow DP \perp BC, BC \parallel AD \Rightarrow DP \perp AD$.
Test: 1. $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 40^\circ, \sphericalangle D = \sphericalangle B = 140^\circ$. **2.a.** F ; **b.** W ; **c.** W ; **d.** F ; **e.** F ; **f.** W . **3.** $BE \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle CBE, DC = DB, \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BDE \Rightarrow \triangle ADC \equiv \triangle EDB \Rightarrow AD = DE$. Weil $BD = DC$ und $AD = DE \Rightarrow ABEC$ Parallelogramm.

3. Lektion. Anwendungen des Parallelogramms in der Dreiecksgeometrie.

Mittellinie in einem Dreieck, Schwerpunkt eines Dreiecks

1. a. $BC = 18$ cm; b. $MP = 8$ cm; c. $AC = 14$ cm. 2. a. $U_{MPQ} = 14$ cm; b. $U_{ABC} = 34$ cm. 3. a. $MG = 8$ cm, $GA = 4$ cm; b. $GB = 5$ cm, $PB = 15$ cm; c. $GQ = 6$ cm, $CQ = 9$ cm. 4. a. Aus dem Fall WSW folgt, dass die Dreiecke BEC und AEF kongruent sind, also $CE = EF$ und da $CO = OA$ ist, ist OE die Mittellinie im Dreieck CAF . b. Aus der Kongruenz in a. ergibt sich auch $AF = BC$, und $BC = DA$. Wir haben $DO = OB$ und $DA = AF$, also ist AO eine Mittellinie im Dreieck BDF . c. CE und BO sind Seitenhalbierenden im Dreieck ABC , also ist T der Schwerpunkt des Dreiecks ABC . 5. MP – Mittellinie im Dreieck $ABC \Rightarrow MP \parallel BC \Rightarrow MT \parallel BD$, $AM = MB \Rightarrow T$ Mittelpunkt der Strecke $AD \Rightarrow AT = TD$. 6. ST Mittellinie im Dreieck $AMP \Rightarrow MP = 12$ cm; MP – Mittellinie im Dreieck $ABC \Rightarrow BC = 24$ cm. 7. $BC = 23$ cm – 14 cm = 9 cm, $MB = \frac{AB}{2} = 3$ cm, $PC = \frac{AC}{2} = 4$ cm, MP Mittellinie im Dreieck $ABC \Rightarrow MP = \frac{BC}{2} = 4,5$ cm; $U_{MPBC} = 20,5$ cm. 8. a. $OS = SP$, $OT = TQ \Rightarrow ST$ Mittellinie im Dreieck OPQ . b. $OS = SP$, $AS = SC \Rightarrow AOC$ Parallelogramm $\Rightarrow AP \parallel OC$, $AP = OC$ (1), $OT = TQ$, $BT = TC \Rightarrow OBQC$ Parallelogramm $\Rightarrow QB \parallel OC$, $QB = OC$ (2). Aus (1) und (2) $\Rightarrow QB \parallel AP$, $QB = AP \Rightarrow ABQP$ Parallelogramm. 9. a. G_1, O, G_3 kollinear, $G_1O = \frac{2}{3} \cdot OM = 6$ cm, $OG_3 = \frac{2}{3} \cdot OP = 6$ cm, $G_1G_3 = 12$ cm. b. Von a $G_1O = G_3O$, $G_2O = G_4O \Rightarrow G_1G_2G_3G_4$ Parallelogramm. 10. Im Dreieck ADC sind AM , DO Seitenhalbierenden und $AM \cap DO = \{T\} \Rightarrow T$ Schwerpunkt $\Rightarrow TO = \frac{1}{3} \cdot DO = \frac{1}{6} \cdot DB = 3$ cm, $OS = 3$ cm $\Rightarrow TS = 6$ cm. 11. Q Mitte AS , C Mitte $AE \Rightarrow QC$ Mittellinie im Dreieck $ASE \Rightarrow QC \parallel SE \Rightarrow QC \parallel ST$, T Mitte $BC \Rightarrow S$ Mittelpunkt von $QB \Rightarrow AQ = QS = SB \Rightarrow SB = \frac{1}{3} \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot CD$.
Test: 1. $TQ = \frac{AB}{2} = 5$ cm, $AC = 2ST = 14$ cm, $SQ = \frac{BC}{2} = 8$ cm. 2. MP Mittellinie im Dreieck $ABD \Rightarrow MP \parallel BD \Rightarrow MP \parallel BC$ (1), PQ Mittellinie im Dreieck $ADC \Rightarrow PQ \parallel DC \Rightarrow PQ \parallel BC$ (2). Aus (1) und (2) folgt, dass M, P, Q kollinear sind. 3. $C'B'$ Mittellinie im Dreieck $ABC \Rightarrow C'B' \parallel BC \Rightarrow C'B' \parallel BA'$, $C'B' = BA' \Rightarrow C'B'A'B$ Parallelogramm.

4. Lektion. Das Rechteck. Eigenschaften

1. a. W ; b. W ; c. F ; d. W ; e. W ; f. W . 2. $2 \cdot AC + 3 \cdot BD = 5 \cdot AC = 25$ cm. 3. $OD = \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{7}{2}$ cm. 4. $\triangle MCB$ ist gleichschenkelig $\Rightarrow MC = BC = 6$ cm. $DM = DC - MC = 4$ cm. 5. $\sphericalangle BOC = 60^\circ$ und $BO = OC = 4$ cm $\Rightarrow \triangle BOC$ gleichseitig $\Rightarrow U_{BOC} = 3 \cdot BO = 12$ cm. 6. $AM \parallel NC$ und $AM \equiv NC \Rightarrow AMCN$ ist Parallelogramm. 7. B Mitte von $CE \Rightarrow AB$ – Seitenhalbierende in $\triangle ACE$ und $AB \perp CE \Rightarrow AB$ – Höhe in $\triangle ACE \Rightarrow \triangle ACE$ gleichschenkelig mit $\sphericalangle ACE = 60^\circ$. 8. QP – und MN – Mittellinien in $\triangle ADC$ bzw. $\triangle ABC \Rightarrow QP \parallel AC \parallel MN$ und $QP = MN = \frac{AC}{2} \Rightarrow MNPQ$ Parallelogramm. In $\triangle ABC$ ist MN die Mittellinie, also $MN \parallel AC$ und da $MQ \parallel BD$, $AC \perp BD \Rightarrow MN \perp MQ \Rightarrow \sphericalangle NMQ = 90^\circ \Rightarrow MNPQ$ Rechteck. 9. Sei das Rechteck $ABCD$ und E, F die Fußpunkte der Senkrechten, die von den Eckpunkten A bzw. C auf die Diagonale BD gezogen werden. Dann ist $AE \perp BD$, $CF \perp BD \Rightarrow AE \parallel CF$ (1). $\triangle AED \equiv \triangle CFB$ (HW) $\Rightarrow AE = CF$ und $DE = BF$ (2). Aus (1) und (2) $\Rightarrow AECF$ ein Parallelogramm ist, mit $OE = OF = OD - DE$ (3). Analog wird gezeigt, dass $BGDH$ ein Parallelogramm ist, wobei G und H die Fußpunkte der Senkrechten sind, die von den Eckpunkten B bzw. D auf die Diagonale AC gezogen werden. Da $OG = OH$ und $OE = OF$ (aus (3) ist, folgt, dass $GFHE$ ein Parallelogramm ist. Die Dreiecke ADE und DAH sind kongruent (HW), also ist $DE = AH$. Aus (3) ergibt sich: $GH = 2 \cdot OH = 2 \cdot (OA - AH) = 2 \cdot (OD - DE) = 2 \cdot OE = EF$, also ist $GFHE$ ein Rechteck. 10. Es sei das Rechteck $ABCD$. Wir bezeichnen mit M und P die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Winkel A und C mit der Diagonalen BD und mit N und Q die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der Winkel B und D mit der Diagonalen AC . Wie in Aufgabe 9 lässt sich leicht zeigen, dass $AMCP$ und $BNDQ$ Parallelogramme sind und dass die Strecken MP und NQ sich halbieren und kongruent sind, also ist $MNPQ$ ein Rechteck. 11. Sei $DE \cap AC = \{P\}$; $BF \cap AC = \{T\}$. $E = \text{Sym}_{AC} D \Rightarrow DP = PE$ und $F = \text{Sym}_{AC} B \Rightarrow BT = TF$. $\triangle ADP \equiv \triangle CBT$ (HW) $\Rightarrow DP = TB$ (1). $DE \perp AC$ und $BF \perp AC \Rightarrow DE \parallel BF$ (2). Aus (1) und (2) ergibt sich, dass $\Rightarrow DEBF$ ein Parallelogramm ist. Da $DE \perp AC$; $BF \perp AC$ und $DEBF$ ist Parallelogramm $\Rightarrow DEBF$ Rechteck. 12. $\triangle MAD \equiv \triangle ABP$ (SWS) $\Rightarrow MD \equiv AP$.
Test: 1. $\sphericalangle ADB = 50^\circ$; $\sphericalangle DOC = 100^\circ$; $\sphericalangle BAC = 40^\circ$. 2. a. $\sphericalangle MBT = 180^\circ \Rightarrow M, B, T$ kollinear. b. $\triangle MAD \equiv \triangle MBC$ (SWS) $\Rightarrow MD = MC \Rightarrow \triangle MDC$ gleichschenkelig. c. $d(M, DC) = d(M, BA) + BC = 11$ cm und $d(T, AD) = 13$ cm. 3. $\triangle ADH$ ist rechtwinklig mit $\sphericalangle AHD = 90^\circ$; $\sphericalangle HAD = 30^\circ \Rightarrow AD = 16$ cm = BC . $\triangle BDC$ rechtwinklig mit $\sphericalangle BCD = 90^\circ$; $\sphericalangle BDC = 30^\circ \Rightarrow BD = 2 \cdot BC = 32$ cm.

5. Lektion. Der Rhombus. Eigenschaften

2. a. W ; b. W ; c. F ; d. F ; e. W ; f. F . 3. $\sphericalangle BAD = 80^\circ$; $\sphericalangle ADC = 100^\circ$; $\sphericalangle DBC = 50^\circ$; $\sphericalangle DOC = 90^\circ$; $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. 4. $\sphericalangle ABD = \frac{\sphericalangle ABC}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ gleichseitig $\Rightarrow BD = 9$ cm. 5. Es seien $OP \perp AB$; $P \in AB$; $DR \perp AB$; $R \in AB$. OP Mittellinie in $\triangle BDR \Rightarrow DR = 2 \cdot PO = 14$ cm. 6. a. Wir haben $EF \parallel AD$, $DE \parallel AF$ und $AD = AF$, also ist $ADEF$ Rhombus. b. Analog sind $DBEF$ und $DECF$ Rhomben. 7. a. 64 cm; b. $d(D, AB) = 8\sqrt{3}$ cm. 8. a. $OM \cap AD = \{P\}$; P liegt in der Mitte von AD und $OP = PM$; $OM \perp AD \Rightarrow AODM$ Rhombus. b. OP ist die Mittellinie in $\triangle ABD$. Wir erhalten $AB \parallel OM$ und $AB = OM$, also ist $ABOM$ ein Parallelogramm. 9. a. $U_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot 4 \cdot 6,25$ cm = 50 cm. b. $L + l = 25$ cm und $L = 4l \Rightarrow L = 20$ cm; $l = 5$ cm. 10. $AN \parallel BM$; $NB \parallel AM \Rightarrow AMBN$ Parallelogramm und $AM = BM \Rightarrow AMBN$ Rhombus. 11. a. $\triangle BDF \equiv \triangle BDE$ (SWS) b. $BF = BE \Rightarrow \triangle BFE$ gleichschenkelig. Da $\sphericalangle BCE = \sphericalangle FDE = 60^\circ + \sphericalangle BCD$, $\triangle BCE \equiv \triangle FDE$ (SWS), also $\sphericalangle BFE = \sphericalangle BED + \sphericalangle FED = \sphericalangle CEB + \sphericalangle CED = 60^\circ$, also ist $\triangle BFE$ gleichseitig. 12. Seien a und b die Längen von zwei aufeinanderfolgenden Seiten des Parallelogramms. $\frac{a+b+a}{3} = b \Rightarrow a = b$ und ein Parallelogramm mit zwei gleichen aufeinanderfolgenden Seiten ist ein Rhombus. 13. EH – Mittellinie in $\triangle ADB$ und FG – Mittellinie in $\triangle BCD \Rightarrow EH \parallel BD \parallel FG$ und $EH = FG = \frac{BD}{2} \Rightarrow EFGH$ Parallelogramm. In $\triangle ABD$ ist EH die Mittellinie, also $EH \parallel BD$ und da $EF \parallel AC \parallel HG$, $AC \perp BD \Rightarrow \sphericalangle FEH = 90^\circ \Rightarrow EFGH$ Rechteck. 14. a. Sei $CT \perp AB$, $T \in AB$. Im rechtwinkligen Dreieck TAC ist $\sphericalangle TAC = 30^\circ$, also $CT = \frac{AC}{2} = 6$ cm. b. O sei der Mittelpunkt des Rhombus, $AP \perp BC$; $P \in BC$; $\triangle APB \equiv \triangle AOB$ (HW) $\Rightarrow AP = AO = 6$ cm. 15. $BF \cap AE = \{O_1\}$ und $DB \cap AC = \{O_2\}$; BO_1 ist die Mittelsenkrechte von AE und BO ist die Mittelsenkrechte von $AC \Rightarrow B$ ist der Mittelpunkt des Umkreises des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ACE$ gleichschenkelig $\Rightarrow AB \perp CE$. 16. Der Punkt S sei so, dass der Punkt A auf der Strecke SC liegt. Mithilfe des Satzes von den äußeren Winkeln erhält man $\sphericalangle MSA = \frac{\sphericalangle MAC}{2} = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle QSA = \frac{\sphericalangle QAC}{2} = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$. Das Viereck $SQCM$ ist

also Parallelogramm, und wenn $MQ \cap SC = \{T\}$, haben wir im gleichschenkligen Dreieck AMQ die Seitenhalbierende AT , also ist AT Mittelsenkrechte, d. h., dass $SQCM$ ein Rhombus ist. Wir erhalten $MC = CQ$.

Test: 1. $\angle ADB = 50^\circ$; $\angle DOC = 90^\circ$; $\angle BAC = 40^\circ$. 2. $ED \parallel AF$; $DF \parallel AE \Rightarrow AEDF$ Parallelogramm und AD Winkelhalbierende des Winkels $\angle EAF \Rightarrow AEDF$ Rhombus. 3. Es sei $AP \perp BC$; $P \in BC$; $\triangle APB$ rechtwinklig mit $\angle APB = 90^\circ$; $\angle ABP = 30^\circ \Rightarrow AP = \frac{AB}{2} = 9 \text{ cm}$.

6. Lektion. Das Quadrat. Eigenschaften

1. a. W ; b. W ; c. W ; d. F ; e. W ; f. W ; g. W . 2. a. $AB = 2 \cdot BC$, $AB = 2 \cdot AM = 2 \cdot MB \Rightarrow BC = AM = MB = AD$, $AMPD$ – Rechteck mit $DA = AM \Rightarrow AMPD$ – Quadrat, $MBCP$ – Rechteck mit $MB = BC \Rightarrow MBCP$ – Quadrat. b. gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck $\Rightarrow \angle CBP = 45^\circ \Rightarrow \angle PBA = 45^\circ$. c. O_1O_2 Mittellinie im Dreieck $APB \Rightarrow AB = 2 \cdot O_1O_2 = 18 \text{ cm}$, $DA = 9 \text{ cm} \Rightarrow U_{ABCD} = 54 \text{ cm}$. 3. OP Mittellinie im Dreieck $DAB \Rightarrow OP \parallel AM$ und $OP \equiv AM$, $\angle PAM = 90^\circ \Rightarrow AMOP$ Rechteck, $PA = AM = \frac{AB}{2} \Rightarrow AMOP$ Quadrat. 4. $OM = 4 \text{ cm}$. 5. a. $\triangle AO_2O_3 \equiv \triangle BO_1O_3 \equiv \triangle CO_2O_1$ (SWS) $\Rightarrow O_1O_2 \equiv O_2O_3 \equiv O_3O_1 \Rightarrow \triangle O_1O_2O_3$ gleichseitig; $\angle AO_3O_2 = \frac{(180^\circ - 150^\circ)}{2} = 15^\circ$, also $\angle O_2O_3B = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. Wir $\angle O_2O_3B + \angle O_3BC = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$, also $O_2O_3 \parallel BC$. Analog $O_1O_3 \parallel AC$ und $O_1O_2 \parallel AB$. b. 30° . 6. a. $\angle DAB = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \Rightarrow \angle PAD = 45^\circ \Rightarrow AD$ ist die Winkelhalbierende von $\angle PAB$ und AM die Winkelhalbierende des Winkels $\angle PAD \Rightarrow A, D, M$ kollinear. b. Das Dreieck PAD ist kongruent mit dem Dreieck MBC , also $DP = CM$. c. $\frac{1}{2}$. 7. $\angle PCQ = \angle PCB + \angle BCD + \angle DCQ = 180^\circ \Rightarrow P, C, Q$ kollinear. $SC = CB$, $DC = CM \Rightarrow$ Parallelogramm $DBMS$ mit $SB = DM \Rightarrow$ Rechteck $DBMS$ mit $DS = DB \Rightarrow$ Quadrat $DBMS$. 8. $MBPD$ – Parallelogramm $\Rightarrow DB \cap MP = \{O\}$, O Mitte von DB (1); $QDNB$ Parallelogramm $\Rightarrow DB \cap QN = \{O\}$ (2). Aus (1) und (2) $\Rightarrow DB, QN, PM$ konkurrent. 9. $PR \perp DB$, $DC \perp RB$, $DC \cap PR = \{P\} \Rightarrow P$ Orthozentrum des Dreiecks $DBR \Rightarrow BQ \perp DR$. 10. $\triangle TAC \equiv \triangle BAP$ (SWS) $\Rightarrow TC \equiv BP$.

Test: 1. 44 cm. 2. Da $\angle ABC + \angle CBQ = 180^\circ$, sind die Punkte A, B, Q kollinear. Aus $BM = AP$, $AP = CS$ und $CS = BQ$ folgt, dass $BM = BQ$, also $\triangle MBQ$ ist gleichschenklig und rechtwinklig. Wir erhalten $\angle MQB = 45^\circ = \angle BAC$, also $\angle CAQ = \angle AQM$, also $MQ \parallel AC$. 3. $L = 20 \text{ cm}$, $l = 4 \text{ cm} \Rightarrow U_{ABCD} = 48 \text{ cm}$.

7. Lektion. Das Trapez: Einteilung, Eigenschaften. Die Mittellinie im Trapez

1. $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle BCD = 140^\circ$. 2. $\angle A = \angle B = 30^\circ$, $\angle D = \angle C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. 3. a. 15 cm; b. 3 cm. 4. Wir konstruieren $CE \perp AD$, $CE = 8 \text{ cm} \Rightarrow CD = 16 \text{ cm}$. 5. $ABCD$ sei ein Trapez mit $AB \parallel CD$, $\{O\} = AC \cap BD$, $AB = 15 \text{ cm}$, $CD = 13 \text{ cm}$. Wir konstruieren $EF \perp AB$ so, dass $E \in DC$, $F \in AB$ und $O \in EF$. Im rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck DOC ist OE Höhe $\Rightarrow OE$ ist Seitenhalbierende $\Rightarrow OE = \frac{DC}{2} = \frac{13}{2} \text{ cm}$. Im rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck AOB ist OF Höhe $\Rightarrow OF$ Seitenhalbierende $\Rightarrow OF = \frac{AB}{2} = \frac{15}{2} \text{ cm}$, $EF = \frac{13}{2} + \frac{15}{2} = 14 \text{ cm}$. 6. 16 cm. 7. $\angle D = x \Rightarrow \angle A = 4x \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ = \angle D = \angle C$, $\angle A = \angle B = 144^\circ$. 8. $AS = ST = TB = 6 \text{ cm}$, $AD = BC$, $AS = TB \Rightarrow \triangle DAS \equiv \triangle CBT \Rightarrow DS = CT$. Da $SD \parallel CT$ ist, folgt daraus, dass $DCST$ ein gleichschenkliges Trapez mit einer Mittellinie von 12 cm ist. 9. Wir konstruieren $BE \perp DC$ und $AF \perp DC$, $DF = EC = 2 \text{ cm}$, im rechtwinkligen Dreieck $\angle EBC = 30^\circ \Rightarrow BC = 2 \cdot EC = 4 \text{ cm}$, $U_{ABCD} = 24 \text{ cm}$. 10. a. $\angle C = \angle D = 45^\circ$, $\angle A = \angle B = 135^\circ$. b. Das Dreieck BEC ist rechtwinklig und gleichschenklig $\Rightarrow BE = EC = 2 \text{ cm} \Rightarrow DE = 8 \text{ cm}$, $DC = 10 \text{ cm}$. 11. $B + b = 20 \text{ cm}$. Wir konstruieren $CE, DF \perp AB$, $\triangle CEB$ ist rechtwinklig, $\angle ECB = 30^\circ \Rightarrow EB = AF = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow 2b + b = 20 \Rightarrow b = \frac{20}{3} \text{ cm}$, $B = \frac{40}{3} \text{ cm}$, $U_{ABCD} = \frac{100}{3} \text{ cm}$.

Test: 1. $AD \cap BC = \{E\}$, $\angle A = \angle B = 45^\circ \Rightarrow \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow AD \perp BC$. 2. 12 cm. 3. $\angle MBC \equiv \angle MCB \Rightarrow \triangle MCB$ gleichschenklig $\Rightarrow CM = MB$ (1). $ABMD$ – Parallelogramm $\Rightarrow AD = MB = CB$ (2). Aus (1) und (2) folgt, dass $\triangle BMC$ gleichseitig ist $\Rightarrow \angle BCM = 60^\circ \Rightarrow \angle ADC = 60^\circ$, also $\angle BAD = 120^\circ$.

8. Lektion. Umfänge und Flächeninhalte

1. a. 56 cm²; b. 18 cm²; c. 36 cm²; d. 16 cm²; e. 32 cm²; f. 36 cm²; g. 80 cm²; h. 18 cm²; i. 112 cm². 2. $Fl_{AMC} = \frac{MC \cdot d(A; MC)}{2}$, $Fl_{ABM} = \frac{MB \cdot d(A; MC)}{2} \Rightarrow \frac{Fl_{AMC}}{Fl_{ABM}} = \frac{MC \cdot d(A; MC)}{2} \cdot \frac{2}{MB \cdot d(A; MC)} = \frac{MC}{MB} = 3 \Rightarrow Fl_{AMC} = 3 Fl_{ABM}$. 3. a. $Fl_{ABCD} = 96 \text{ cm}^2$; $U_{ABCD} = 40 \text{ cm}$; b. $Fl_{ABC} = 48 \text{ cm}^2$; c. $Fl_{AMD} = 24 \text{ cm}^2$; d. $Fl_{DMC} = 48 \text{ cm}^2$; e. $Fl_{DMP} = 12 \text{ cm}^2$; f. $Fl_{DCBM} = 72 \text{ cm}^2$. 4. $Fl_{ABC} = 18 \text{ cm}^2$; $Fl_{ABD} = 18 \text{ cm}^2$. 5. $Fl_{\triangle} = \frac{Hyp \cdot h}{2} = \frac{Hyp \cdot \frac{Hyp}{2}}{2} = \frac{Hyp^2}{4} = 25 \text{ cm}^2 \Rightarrow Hyp = 10 \text{ cm}$. 6. $\angle CBA = 45^\circ \Rightarrow h = 4 \text{ cm} \Rightarrow Fl_{ABCD} = 32 \text{ cm}^2$. 7. $Fl_{ABC} = \frac{AC \cdot d(B; AC)}{2} = 75 \text{ cm}^2 \Rightarrow Fl_{ABCD} = 150 \text{ cm}^2$. 8. Es sei $DP \perp AB$; $P \in AB$; $\triangle ADP$ rechtwinklig mit $\angle DPA = 90^\circ$; $\angle DAP = 30^\circ \Rightarrow DP = \frac{AD}{2} = 6 \text{ cm} \Rightarrow Fl_{ABCD} = AB \cdot DP = 42 \text{ cm}^2$. 9. $Fl_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 100 \text{ cm}^2$. 10. $Fl = 484 \text{ cm}^2$. 11. $Fl = \frac{d_1 \cdot 15}{2} = 135 \text{ cm}^2 \Rightarrow d_1 = 18 \text{ cm}$. 12. $Fl_{ABCD} = 4 \cdot Fl_{AOB} = 44 \text{ cm}^2$. 13. $Fl_{A_1A_6B_6B_1} = A_1A_6 \cdot A_1B_1 = 20 \text{ cm}^2$; $Fl_{A_1A_4B_6} = \frac{A_1A_4 \cdot A_6B_6}{2} = 6 \text{ cm}^2$, $Fl_{A_2B_4B_6A_6} = \frac{(A_2A_6 + B_4B_6) \cdot A_6B_6}{2} = 10 \text{ cm}^2$.

Selbstbewertung: 1. $Fl_{ABC} = 6 \text{ cm}^2$; 2. a. $Fl_{ABCD} = \frac{(DC + AB) \cdot d(B; DC)}{2} = \frac{(12 + 6) \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = 27 \text{ cm}^2$; b. $Fl_{ABC} = Fl_{ABCD} - Fl_{ADC} = 27 \text{ cm}^2 - 18 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$.

3. a. $U_{ABCD} = 40 \text{ cm}$; b. $Fl_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 96 \text{ cm}^2$; c. $Fl_{ABCD} = l \cdot h = 96 \text{ cm}^2 \Rightarrow h = 9,6 \text{ cm}$.

Einheit 5: Der Kreis

1. Lektion. Der Kreis. Sehnen und Bogen in einem Kreis. Eigenschaften

2. a. $\frac{3}{7}$; b. $\frac{2}{7}$; c. $\frac{5}{7}$; d. $\frac{2}{7}$. 3. a. $NO = OM$, $PO = OQ$, $\angle NOP \equiv \angle MOQ \Rightarrow \triangle NOP \equiv \triangle MOQ \Rightarrow NP = MQ$. b. $NP = OP = NO \Rightarrow \triangle NOP$ gleichseitig $\Rightarrow \angle NOP = 60^\circ = \widehat{NP} \Rightarrow \angle NMP = 30^\circ$. 4. Dreieck ABC gleichseitig, $\angle BCA = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120^\circ = \angle BOA$. 5. $\widehat{BC} = 20^\circ$, $\widehat{AD} = 160^\circ$. 6. $\widehat{AC} = \widehat{DB} = 50^\circ \Rightarrow AC \equiv DB$. $\widehat{AD} = \widehat{CB} = 130^\circ \Rightarrow AD \equiv CB$. 7. Wir konstruieren den Punkt T als Mittelpunkt der Strecke OA . Die Mittelsenkrechte der Strecke OA schneidet den Kreis in den Punkten B und C . 9. $AB = AC \Rightarrow A \in$ der Mittelsenkrechten der Strecke BC , M der Mittelpunkt der Strecke $BC \Rightarrow AM$

ist die Mittelsenkrechte der Strecke BC ; $BO = OC \Rightarrow O \in$ der Mittelsenkrechten der Strecke $BC \Rightarrow O, A, M$ kollinear. **10.** $CO = OQ$ und $EO = OP \Rightarrow CEQP$ Parallelogramm und, da $CQ = EP$, erhalten wir $CEQP$ – Rechteck (1). $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EB}$ und AB Durchmesser $\Rightarrow \angle COE = 90^\circ$ (2). Aus (1) und (2) $\Rightarrow CEPQ$ Quadrat. **11.** Die Halbgerade OD ist die Winkelhalbierende $\angle AOB \Rightarrow \angle AOD = 40^\circ = \widehat{AD}$, $\angle POQ = \widehat{PQ} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{PQ} = 40^\circ \Rightarrow AD \equiv PQ$. **12.** $OP = OQ$ (1) $\triangle OPB$ ist gleichschenkelig und rechtwinklig $\Rightarrow OP = BP = PA$ (2), $\triangle OQC$ ist gleichschenkelig und rechtwinklig $\Rightarrow OQ = QC = QA$ (3). Aus (1), (2) und (3) $\Rightarrow OP = OQ = AQ = PA$, $\angle A = 90^\circ \Rightarrow OPAQ$ Quadrat $\Rightarrow F_{\triangle OPAQ} = 72 \text{ cm}^2$.

Test: 1. 10 cm oder 2 cm. 3. $CD \perp AB$, $CD \cap AB = \{M\}$, $\angle MOA = \widehat{AC} = 60^\circ$, $\angle ACO = \frac{\widehat{AD}}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ACO$ ist gleichseitig $\Rightarrow AC = 10 \text{ cm}$; $CM = 5 \text{ cm}$.

2. Lektion. Umfangswinkel

1.a. F; b. W; c. F; d. F. 2.a. AOB ; b. OBA, OBC ; c. BAO, BAC ; d. DAB, BCD . 3.a. 14; b. 15; c. 19. 4. $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$, $\angle CDB = 50^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$. $\angle CDA = 90^\circ$, also ist AC Durchmesser, und A, O, C sind kollinear. 5. $\angle CPD = 90^\circ$, $\angle PCD = 55^\circ$, $\angle CPB = 45^\circ$, $\angle DPB = 45^\circ$, $\angle PBA = 10^\circ$, $\angle APD = 45^\circ$. 6. $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. 7.a. $\widehat{AB} = 45^\circ$, $\widehat{AC} = 90^\circ$, $\widehat{AD} = 135^\circ$, $\widehat{AE} = 180^\circ$; b. 45° ; c. $\widehat{AD} = \widehat{DG} = \widehat{GB} = \widehat{BE} = \widehat{EH} = \widehat{HC} = \widehat{CF} = \widehat{FA} = 135^\circ$, also $AD = DG = GB = BE = EH = HC = CF = FA$. 8.a. $BD \perp AC$, also ist BD die Mittelsenkrechte der Sehne AC , also $AD = CD$. b. BD ist die Mittelsenkrechte der Sehne AC , also $AB = CB$, also $\angle BAC = \angle ACB = \widehat{AB} : 2 = \angle ADB$. 9. Wenn $A \notin \widehat{BC}$, dann ist $\widehat{AC} = 180^\circ$, also $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 67^\circ$, $\angle C = 23^\circ$. Wenn $A \in \widehat{BC}$, dann ist $\widehat{AC} = 88^\circ$, also $\angle B = 44^\circ$, $\angle C = 23^\circ$, $\angle A = 113^\circ$. 10.a. $\angle AOD = \angle DOC = \angle BOC = 180^\circ : 3 = 60^\circ$, also $\triangle COD$ ist gleichseitig, und $r = CD = 4 \text{ cm}$. b. $\angle BAC = \widehat{BC} : 2 = 30^\circ$. c. MN ist der Durchmesser und $MD = MC$, also $\angle CDM = \angle DCM$. Daraus folgt $\angle CDM + \angle DCN = \angle DCM + \angle DCN = \angle MCN = 90^\circ$. 11. $\widehat{BA'} = 2 \cdot \angle BAA'$, also $\widehat{BA'} = 2 \cdot (90^\circ - \angle B) = 84^\circ$. Analog, $\widehat{CB'} = 60^\circ$, $\widehat{AC'} = 36^\circ$, $\widehat{A'B'} = 2 \cdot \widehat{CB'} = 120^\circ$, $\widehat{B'C'} = 2 \cdot \widehat{AC'} = 72^\circ$, $\widehat{C'A'} = 2 \cdot \widehat{BA'} = 168^\circ$. 12.a. $CD \parallel OA$ und $OA \perp BC$, also $CD \perp BC$, also ist BD Durchmesser, und B, O, D sind kollinear. b. $ABOC$ ist ein Rhombus mit $\angle BOC = 120^\circ$, also $\angle CAD = \widehat{CD} : 2 = \angle COD : 2 = 30^\circ$. c. $OCDE$ ist ein Rhombus mit $\angle COD = 60^\circ = \angle DOE$, also $\angle AOE = 180^\circ$, also sind A, O, E kollinear.

Test: 1. $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle ACB \in \{60^\circ, 120^\circ\}$. 2. $\angle ABD = 50^\circ$, $\angle BCD = 80^\circ$, $\angle ADC = 80^\circ$. 3. $\widehat{AB} = 64^\circ$, $\widehat{AD} = 116^\circ$, also $\widehat{BD} = 180^\circ$.

3. Lektion. Tangenten eines Kreises

3.a. 10 cm; b. 20 cm. 4. $F_{\triangle AOB} = 1152 \text{ cm}^2$. 5.a. $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$ (KK), also $OA = OB$. $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$, aus dem Kehrsatz des Lehrsatzes von Thales im Dreieck AOB folgt, dass $CD \parallel AB$. b. $\triangle AOM \equiv \triangle BOM$, also $\angle AOM = \angle BOM = 60^\circ$. Da $OC = OM = OD$ ist, sind die Dreiecke OCM und ODM gleichseitig und kongruent, also ist $ODMC$ ein Rhombus. 6. $\widehat{MN} = 240^\circ$, also der Winkel MON umfasst den kleinen Bogen $\widehat{MN}$, und $\angle MON = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$. a. Die Halbgerade OP ist die Winkelhalbierende des Winkels MON , also $\angle POM = \angle MON : 2 = 60^\circ$ und aus dem rechtwinkligen Dreieck POM folgt: $\angle MPO = 30^\circ$ und $OP = 2 \cdot OM = 4 \text{ cm}$. b. $\angle MPN = 2 \cdot \angle MPO = 60^\circ$ und $PM = PN$, also ist $\triangle MNP$ gleichseitig. 7.a. AB und BC sind Sekanten des Kreises und AC ist Tangente des Kreises. b. Es gibt zwei Lösungen. Wenn die Strecken BC und OA sich nicht schneiden, dann ist $OACB$ ein Rechteck und $BC = OA = 4 \text{ cm}$. Wenn die Strecken BC und OA sich schneiden, dann ist $OBAC$ ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkt (Zentrum) in Q , und $BC = 2 \cdot BQ = 2 \cdot \sqrt{OB^2 + OA^2} : 4 = 2\sqrt{13} \text{ cm}$. 8. C ist der Mittelpunkt des Bogens $\widehat{AB}$, also $OC \perp AB$. Sei d die Tangente in C an den Kreis. Da $OC \perp d$ und $OC \perp AB$, folgt, dass $AB \parallel d$. 9. Sei d die Tangente in N an den Kreis. Wir haben $ON \perp d$ und $d \parallel MP$, also $ON \perp MP$, also ist N der Mittelpunkt des Bogens $\widehat{MP}$. Daraus folgt $\widehat{MN} = \widehat{MP} : 2 = 42^\circ$. 10.a. $OA = OB$ und $QA = QB$, also ist OQ die Mittelsenkrechte der Strecke AB , also $OQ \perp AB$. b. $\triangle OBQ \equiv \triangle OAQ$ (SSS), also $\angle OBQ = \angle OAQ = 90^\circ$. 11.a. $\triangle APM \equiv \triangle BPM$ (SWS), also $AM = BM$. Wir haben $PA = PB$ und $\angle APB = 60^\circ$, also ist $\triangle APB$ gleichseitig und $\angle PAB = 60^\circ = \widehat{ASB} : 2$. $\angle AMB = \widehat{ASB} : 2 = 60^\circ$ und da $AM = BM$ ist, folgt daraus, dass $\triangle AMB$ ist gleichseitig ist. b. Aus den gleichseitigen Dreiecken AMB und APB ergibt sich $AM = AB = AP$, also ist $\triangle MAP$ gleichschenkelig. c. Die Halbgerade OP ist die Winkelhalbierende von AOB , also $\angle AOS = \widehat{ASB} : 2 = 60^\circ$ und da $OA = OS$, $\triangle OAS$ gleichseitig, also $AS = OA$. Daraus folgt, dass $BS = OB = OA$ ist, also ist $OASB$ ein Rhombus. 12. $\widehat{EF} = 2 \cdot \angle EDF = 120^\circ$, und AF und AE sind Tangenten an den Kreis, also $\angle AFE = \angle AEF = \widehat{EF} : 2 = 60^\circ$. Aus $\triangle AEF$ erhalten wir $\angle BAC = \angle EAF = 60^\circ$. In ähnlicher Weise ergibt sich, dass $\angle ABC = 20^\circ$, also $\angle ACB = 100^\circ$. 13. AF und AE sind Tangenten an einen Kreis. Wir bezeichnen $AE = AF = x$. Analog, $BD = BF = y$ und $CD = CE = z$. Da $AB = AF + FB$, ist, folgt $c = x + y$. Analog folgt $a = y + z$ und $b = x + z$. Addiert man die drei Gleichungen, so erhält man $2p = a + b + c = 2(x + y + z)$, also $p = x + y + z = x + a = y + b = z + c$. Daraus folgt, dass $x = p - a$, $y = p - b$ und $z = p - c$. 14.a. CD und AD sind Tangenten an den Kreis, also $DC = DA$. Analog folgt $EB = EC$, also $DE = DC + CE = AD + BE$. b. $\angle DOC = \angle FOC = 90^\circ - \angle FCO = \angle DCF$ und $\angle EOC = \angle GOC = 90^\circ - \angle GCO = \angle ECG$. Da AB ein Durchmesser ist, folgt daraus, dass $\angle ACB = 90^\circ$, also $\angle DCF + \angle ECG = \angle DCE - \angle ACB = 90^\circ$, also $\angle DOE = \angle DOC + \angle EOC = \angle DCF + \angle ECG = 90^\circ$. c. Die Halbgerade DO ist Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck ADC mit der Grundlinie AC , also $DO \parallel AC$, folglich $\angle CFO = 90^\circ$. Da $\angle FCG = \angle FOG = 90^\circ$ ist, ist das Viereck $OCFG$ ein Rechteck. 15. $O_1A_1 \perp A_1A_2$ und $O_2A_2 \perp A_1A_2$, also $O_1A_1 \parallel O_2A_2$. Daraus folgt analog, dass $O_1B_1 \parallel O_2B_2$. Da die Gerade, die die Mittelpunkte der Kreise enthält, durch das Innere von jedem Winkel geht, folgt, dass $\angle A_1O_1B_1 \equiv \angle A_2O_2B_2$. Also $\widehat{A_2C_2B_2} = \angle A_2O_2B_2 = \angle A_1O_1B_1 = \widehat{A_1C_1B_1}$ und $\widehat{A_1C_1B_1} + \widehat{A_2C_2B_2} = \widehat{A_1C_1B_1} + \widehat{A_1B_1} = 360^\circ$.

Test: 1. 16 cm. 2. 36° . 3. $2\sqrt{2} \text{ cm}$.

4. Lektion. Regelmäßige Vielecke, die dem Kreis einbeschrieben sind

2.a. 140° ; b. 144° ; c. 150° ; d. 156° ; e. 162° . 3.a. 40° ; b. 30° ; c. 20° ; d. 15° ; e. 12° . 4.a. 36; b. 18; c. 48; d. 40. 5. Jeder Winkel beträgt 20° . 6. Als Außenwinkel des Vielecks haben die Winkel PBC und PCB die Maße $(180 - k)^\circ$, wobei k° das Maß eines Winkels des Vielecks ist. Dann ist $\angle BPC = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) = (2k - 180)^\circ$. a. 36° ; b. 90° ; c. 108° . 7.a. 36 cm; b. $\widehat{BCE} = \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, also ist BE der Durchmesser, und analog dazu ist CF der Durchmesser. Die Diagonalen des Vierecks $BCEF$ sind kongruent und halbieren sich, also ist $BCEF$ ein Rechteck. c. $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle ACE = 60^\circ$, $\angle ACF = 30^\circ$. 8. Da $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA} = 120^\circ$ und $\widehat{MP} = \widehat{PQ} = \widehat{QM} = 120^\circ$, ergibt sich $\widehat{AP} = \widehat{MP} - \widehat{AM} = 60^\circ$, $\widehat{BP} = \widehat{AB} - \widehat{AP} = 60^\circ$ usw. Wir erhalten $\widehat{MA} = \widehat{AP} = \widehat{PB} = \widehat{BQ} = \widehat{QC} = \widehat{CM} = 60^\circ$, also $MA = AP = PB = BQ = QC = CM$. Das Sechseck $MAPBQC$ ist also einem Kreis einbeschrieben (aus der Voraussetzung), hat alle Seiten kongruent, also ist es ein regelmäßiges Sechseck. 9. $\widehat{AN} = \widehat{MN} - \widehat{AM} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, $\widehat{BN} = \widehat{AB} - \widehat{AN} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Wir gehen wie bei der vorherigen Aufgabe vor. 10. Wir bezeichnen $AB = 3a$, also $MN = PQ = RS = a$. Da $AR = AQ = a$ und $\angle RAQ = 60^\circ$ ist, ist das Dreieck AQR gleichseitig, also $QR = a$, $\angle QRS = 180^\circ - \angle ARQ = 120^\circ$ und $\angle PQR = 180^\circ - \angle AQR = 120^\circ$. Analog dazu sind die Dreiecke CNP und BMS gleichseitig; wir leiten ab, dass $NP = MS = a$ und $\angle QPN = \angle PNM = \angle NMS = \angle MSR = 120^\circ$. Das Sechseck $MNPQRS$ hat also alle Seiten kongruent und alle Winkel kongruent, es ist also regelmäßig. 11. Seien MAB ,

NBC , PCD , QDE , REF und SFA gleichseitige Dreiecke, die auf den Seiten des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ konstruiert sind. Da $\angle SAF + \angle FAB + \angle BAM + \angle SAM = 360^\circ$, folgt daraus, dass $\angle SAM = 120^\circ$ ist; analog dazu ist $\angle MBN = \angle NCP = \angle PDQ = \angle QER = \angle RFS = 120^\circ$. Wir leiten daraus ab, dass die Dreiecke SAM , MBN , NCP , PDQ , QER und RFS kongruent (SWS) sind, also $SM = MN = NP = PQ = QR = RS$ (1). Die Dreiecke SAM und MBN sind gleichschenkelig; wir erhalten $\angle AMS = \angle BMN = 30^\circ$, also $\angle SMN = \angle AMS + \angle AMB + \angle BMN = 120^\circ$. In ähnlicher Weise wird gezeigt, dass die anderen fünf Winkel des Sechsecks $MNPQRS$ das Maß 120° haben (2). Aus (1) und (2) folgt, dass $MNPQRS$ ein regelmäßiges Sechseck ist.

Test: 1. Man konstruiert die Mittelpunkte E, F, G, H der Bogen $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$. $AEBFCGDH$ ist ein regelmäßiges Achteck.

5. Lektion. Länge des Kreises und Flächeninhalt des Diskus

1.a. 24π cm; b. 7π cm; c. 17π cm. 2.a. 7 cm; b. 36 cm; c. $\frac{11}{6}$ cm. 3.a. $\frac{2\pi}{3}$ cm, $\frac{2\pi}{3}$ cm²; b. $\frac{3\pi}{2}$ cm, $\frac{9\pi}{2}$ cm²; c. $\frac{14\pi}{3}$ cm, $\frac{49\pi}{3}$ cm²; d. $\frac{11\pi}{2}$ cm, $\frac{121\pi}{4}$ cm². 4.a. 90° ; b. 126° ; c. 10° . 5. 28π cm². 6. 28 cm. 7. 81π cm². 8. Der Abstand d zwischen zwei benachbarten Bäumen beträgt ein Achtel der Länge des Kreises, also $d = \frac{2\pi r}{8} = 1,25 \cdot \pi$ Meter. Da $3,14 < \pi < 3,15$, leiten wir ab, dass $d > 1,25 \cdot 3,14$ Meter = 3,925 Meter $> 3,9$ Meter, bzw. $d < 1,25 \cdot 3,15$ Meter = 3,9375 Meter < 4 Meter. 9.a. 2; b. 4. 10.a. $U_1 = 16\pi$ cm, $F_1 = 16\pi$ cm²; b. $U_2 = 16\pi$ cm, $F_2 = 32\pi$ cm². 11. $50(\pi - 2)$ cm². 12. $8(4 - \pi)$ cm². 13. $18(\pi - 2)$ cm². 14. $L_{\text{Kreis}} = 12\pi$ cm, $F_{\text{Diskus}} = 36\pi$ cm², $L_{\text{ABC}} = 4\pi$ cm, $F_{\text{Sektor}} = 12\pi$ cm². 15. Die drei Pizzasorten haben die Form eines Diskus mit dem Radius 12 cm, 16 cm bzw. 20 cm. Die optimale Pizza ist die mit dem niedrigsten Preis pro cm². Da $\frac{40}{16^2\pi} < \frac{64}{20^2\pi} < \frac{28}{12^2\pi}$, sollte Tudor eine mittlere Pizza (32 cm Durchmesser) kaufen. 16. Der Reifen hat den Radius $R = 31,6$ cm = 0,316 m. Punkt A berührt den Boden. Bei jeder weiteren Berührung vergrößert sich die zurückgelegte Strecke um die Länge eines Kreises mit dem Radius R . Wenn also der Punkt A zum n -ten Mal den Boden berührt, beträgt die vom Auto zurückgelegte Strecke $d = (2n - 1)\pi R$ Meter. Man beachte, dass $\pi R < 3,15 \cdot 0,316 = 0,9954 < 1$. a. Wenn $n = 1000$, dann $d = 1999\pi R$ m < 1999 m < 2000 m = 2 km, also ist die Aussage falsch. b. Für $n = 50\,000$ beträgt die zurückgelegte Strecke $d = 99999\pi R < 100\,000 \cdot 3,15 \cdot 0,316 = 99540$ m < 100 km. Um 100 Kilometer zurückzulegen, muss Punkt A also mehr als 50 000 Mal den Boden berühren.

Selbstbewertung: 1. 8π cm, 16π cm², $\frac{20\pi}{3}$ cm. 2. 6π cm². 3. $225(4 - \pi)$ cm².

Einheit 6: Ähnlichkeit der Dreiecke

1. Lektion. Proportionale Strecken. Lehrsatz der äquidistanten Parallelen

1.a. 2; b. 0,5; c. 1; d. 3. 2.a. 4; b. 0,25; c. 1,25; d. 1,(6). 3.a. 1,5; b. 1,6; c. 1; d. 2,1. 4.a. 2; b. 1; c. $\frac{1}{2}$; d. 2. 5.a. 1; b. $\frac{1}{2}$; c. $\frac{1}{2}$; d. 2; e. 2. 6.a. $\frac{1}{4}$; b. $\frac{3}{4}$; c. $\frac{1}{3}$; d. $\frac{4}{3}$; e. $\frac{5}{3}$. 7. $AB = 6$ cm, $BC = 18$ cm. 8. $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 18$ cm. 9.a. $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE}$; b. Nein. 10.a. $B_1B_2 = 5$ cm, $B_1B_4 = 15$ cm, $B_2B_4 = 10$ cm, $B_3B_6 = 15$ cm. 11. Aus dem Lehrsatz der äquidistanten Parallelen folgt, dass $BP = PQ = QC$ ist, also ist SQ die Mittellinie in $\triangle CPR$ und $PR = 2SQ = 4$ cm. Da MR die Mittellinie in $\triangle ANS$ ist, haben wir $NS = 2MR = 2$ cm. Wir erhalten $MP = MR + RP = 5$ cm und $NQ = NS + SQ = 4$ cm. Da MP und NQ Mittellinien in den Trapezen $ABQN$ bzw. $CDMP$ sind, ist $AB = 2MP - NQ = 6$ cm und $CD = 2NQ - MP = 3$ cm. 12.a. Aus dem Lehrsatz der äquidistanten Parallelen folgt, dass $BQ = QR = RS = SC$, also ist R der Mittelpunkt der Strecke SQ . b. MQ ist die Mittellinie im Trapez $ABRN$, also $AB + NR = 2MQ = 28$ cm, und PS ist die Mittellinie des Trapezes $CDNR$, also $CD + NR = 2PS = 20$ cm. Wir erhalten $AB - CD = 8$ cm und $EF = NF - NE = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} = 4$ cm.

Test: 1.a. 3; b. 0,(3); c. 1,(3). 2. $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm. 3. 33 cm.

2. Lektion. Lehrsatz des Thales

1. $AC = 9$ cm, $DB = 8$ cm, $AB = 12$ cm. 2.a. $DB = 4$ cm, $AE = 4$ cm, $EC = 8$ cm; b. $AB = 7$ cm, $EC = 8$ cm, $AC = 14$ cm; c. $AD = 3$ cm, $AE = 4$ cm, $EC = 8$ cm. 3.a. $AB = 14$ cm, $FC = 5,(3)$ cm, $BC = 9,(3)$ cm; b. $BC = 20$ cm, $BE = 7,5$ cm, $AB = 12,5$ cm; c. $AE = 8$ cm, $FC = 4$ cm, $BC = 12$ cm. 4. $AC = 12$ cm, $MC = 16$ cm. 5. $NB = 5$ cm, $AC = \frac{50}{3}$ cm, $MC = \frac{25}{3}$ cm. 6. $AE = 8$ cm, $EB = 4$ cm, $AF = 12$ cm, $FC = 6$ cm. 7. $NC = 30$ cm, $AC = 50$ cm. 8.a. Nein; b. Ja; c. Ja; d. Nein. 9. $AF = 6$ cm, $FD = 18$ cm. 10.a. $\frac{3}{7}$; b. $BP = 12$ cm, $PC = 16$ cm. 12. $AO = 9$ cm, $OC = 15$ cm. 13. Durch Anwendung des Lehrsatzes von Thales im Dreieck ADB ergibt sich $\frac{AG}{AB} = \frac{AE}{AD}$. Im Dreieck DAB ergibt sich dann, wiederum nach dem Lehrsatz von Thales, dass $\frac{DF}{BD} = \frac{DE}{AD}$. Setzt man die beiden Beziehungen zusammen, erhält man die erforderliche Gleichheit. 14. 15 m. 15. Man wendet den Kehrsatz des Lehrsatzes von Thales an.

Test: 1. $AD = 7,5$ cm, $DB = 4,5$ cm, $AC = 16$ cm. 2. $BO = 10$ cm, $DO = 15$ cm. 3. Siehe Aufgabe 13.

3. Lektion. Ähnliche Dreiecke. Hauptsatz der Ähnlichkeit

1. $\angle C = \angle F = 85^\circ$, $\angle E = 50^\circ$, $\angle D = 45^\circ$. 2. $x = 6$, $y = 4$. 3. $MN = 2$ cm, $NP = 3$ cm. 4. $U_{ABC} = 28$ cm, $U_{MNP} = 84$ cm. 5. $DE = 20$ cm, $\angle D = 64^\circ$. 6.a. $AD = 5$ cm, $AE = 7$ cm, $EC = 14$ cm, $DE = 6$ cm; b. $AD = 16$ cm, $DB = 4$ cm, $AE = 24$ cm, $EC = 6$ cm; c. $AD = 12$ cm, $DB = 4$ cm, $EC = 6$ cm, $DE = 15$ cm. 7. $AD = 8$ cm, $DB = 12$ cm, $EC = 6$ cm, $AC = 10$ cm, $DE = 6$ cm. 8. Gleichseitig. 9. 81 cm. 10.a. Dina: 125 m, Eliza: 500 m; b. 75 m. **Selbstbewertung:** 1. $DE = 40$ cm, $\angle E = 52^\circ$. 2. $EC = 3$ cm, $DB = 2$ cm, $AB = 8$ cm, $BC = 16$ cm. 3. $AO = 14$ cm, $OC = 4$ cm, $BO = 21$ cm, $OD = 6$ cm.

4. Lektion. Ähnlichkeitskriterien der Dreiecke. Schätzen von Entfernungen im Alltag mithilfe der Ähnlichkeit

1.a. Ja (WW); b. Nein; c. Ja (SWS); d. Ja (SSS). 2.a. Ja (WW); b. Nein; c. Ja (SWS); d. Ja (SSS). 3.a. $MN = 12$ cm, $NP = 18$ cm; b. $\frac{1}{2}$. c. Direkte Berechnung. 4. $\angle BAC = \angle DBC = 36^\circ$, $\angle ACB = \angle DCB = 72^\circ$. 5. $\angle A = \angle D = 64^\circ$, $\angle C = \angle F = 58^\circ$. 6. Fall WW 7.a. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ und $\angle A \equiv \angle D$; b. $F_{ABC} = 24$ dm², $F_{DEF} = 216$ dm²; c. $\frac{F_{ABC}}{F_{DEF}} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. 8. $BO = 3 \cdot NO \Rightarrow BN = 2 \cdot NO \Rightarrow \frac{AM}{MO} = \frac{BN}{NO} \Rightarrow MN \parallel AB$. Aber $AB \parallel DC \Rightarrow MN \parallel DC \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OCD$. 9. $\angle ABD \equiv \angle CAD$ und $\angle BAD \equiv \angle ACD$. 10. $OC = 4,5$ cm, $AO = 13,5$ cm, $CD = 8$ cm. 11.a. $MP \parallel AB \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{BM}{BC}$. Aus $MN \parallel AC \Rightarrow$

$\frac{BM}{BC} = \frac{BN}{AB}$. Aus den beiden Beziehungen folgt die geforderte Gleichheit. **b.** Aus **a** ergibt sich $\frac{AP}{AC} = \frac{BN}{AB} \Rightarrow \frac{AP}{AC} + \frac{AN}{AB} = \frac{BN}{AB} + \frac{AN}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$. **12.a.** Aus $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ ergibt sich, dass $DE \parallel BC$ (Kehrsatz des Lehrsatzes von Thales). Daraus folgt nach dem Hauptsatz der Ähnlichkeit, dass $\triangle AED \sim \triangle ABC$; **b.** $DE \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ (Stufenwinkel). **13.a.** $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle PCQ$ (innere Wechselwinkel) und $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle CPQ$ (Scheitelwinkel); **b.** $\sphericalangle DCP \equiv \sphericalangle RBP$ (innere Wechselwinkel) und $\sphericalangle DPC \equiv \sphericalangle RPB$ (Scheitelwinkel); **14.** $\triangle MBN \sim \triangle DCN$ (WW) $\Rightarrow \frac{MB}{DC} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$. Man erhält $BN = 6$ m und $NC = 12$ m. Daraus folgt, dass die Dreiecke MBN und DCN gleichschenkelig und rechtwinklig sind. Man erhält $\sphericalangle MND = 90^\circ$.

Einheit 7: Metrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

1. Lektion. Orthogonale Projektionen auf einer Geraden. Der Höhensatz

3.a. W ; **b.** W ; **c.** F ; **d.** W ; **e.** F ; **f.** W . **4.** $\frac{A'M'}{M'N'} = \frac{P'C}{P'N'} = \frac{A'N'}{CN'} = 1$, $\frac{M'N'}{M'C} = \frac{1}{3}$, $\frac{A'C}{M'P'} = 2$. **5.b.** 14 cm und 21 cm. **6.a.** 10 cm; **b.** 18 cm; **c.** 4 cm; **d.** 4,8 cm; **e.** 100 dm²; **f.** $BD = 7$ cm, $DC = 28$ cm, $AD = 14$ cm. **7.** Man verwendet den Kehrwert des Höhensatzes. **8.** $12\sqrt{2}$ cm. **9.** 12 cm. **10.** 10 cm. **11.** $AM = 9$ cm, $U_{ABCD} = 52$ cm. **12.** Es sei $AN \perp DC$, $N \in DC$. Da $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez ist, folgt, dass $DN = MC = \frac{DC - AB}{2} = 2$ cm. **b.** $BM = 2\sqrt{3}$ cm. **13.** Mithilfe des Höhensatzes ist $PC = 9$ cm, also $DC = 25$ cm.

Test: **2.** 15 cm. **3.** $BD = 4$ cm, $DC = 16$ cm, $AD = 8$ cm.

2. Lektion. Der Kathetensatz

1.a. $AB = 15$; **b.** $EG = 20$; **c.** $MP = 60$; **d.** $XZ = 16\sqrt{3}$. **2.a.** 8 cm; **b.** 2 cm und 6 cm; **c.** $2\sqrt{3}$ cm; **d.** $4\sqrt{3}$ cm. **3.a.** 27 cm; **b.** 2 cm; **c.** $AB = 30$ cm, $AC = 30\sqrt{3}$ cm; **d.** $BC = 24$ cm, $AC = 12\sqrt{3}$ cm; **e.** $BD = 8$ cm, $DC = 28$ cm, $AB = 12\sqrt{2}$ cm, $AC = 12\sqrt{7}$ cm. **4.** $12\sqrt{5}$ cm. **5.** $72\sqrt{5} + 120$ mm. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** $16(\sqrt{2} + 1)$ cm.

Test: **1.** $BC = 24$ cm, $AB = 12\sqrt{3}$ cm. **2.a.** 3 cm und 9 cm; **b.** $AB = 6$ cm, $AC = 6\sqrt{3}$ cm. **3.** $20\sqrt{13} + 52$ cm.

3. Lektion Der Lehrsatz des Pythagoras

1.a. 5; **b.** 10; **c.** 15. **2.a.** 12; **b.** 10; **c.** 7. **3.a.** $4\sqrt{10}$ cm; **b.** 12 cm; **c.** 20 cm. **4.a.** $6\sqrt{2}$ cm; **b.** $8\sqrt{2}$ cm; **c.** $15\sqrt{2}$ cm; **d.** $20\sqrt{2}$ cm. **5.a.** $4\sqrt{2}$ cm; **b.** $9\sqrt{2}$ cm; **c.** $12\sqrt{2}$ cm; **d.** $25\sqrt{2}$ cm. **6.a.** $\sqrt{3}$ cm; **b.** $5\sqrt{3}$ cm; **c.** $9\sqrt{3}$ cm; **d.** $16\sqrt{3}$ cm. **7.** 42 cm. **8.** $BD = 40$ cm, $Fl_{ABCD} = 600$ cm². **9.a.** 7 cm; **b.** 15 cm. **10.** $MP = NQ = 4\sqrt{5}$ cm. **11.a.** 10 cm; **b.** 25 cm². **12.a.** 6 cm; **b.** $2\sqrt{13}$ cm. **13.** $BC = 6$ cm, $AB = 6\sqrt{3}$ cm. **14.a.** $AB = 5$ cm, $Fl_{ABCD} = 25$ cm²; **b.** $U_{ABC} = 5(2 + \sqrt{2})$ cm. **15.** $AC = BD = 8\sqrt{5}$ cm. **16.** $h = 9$ cm, $Fl_{ABC} = 27\sqrt{3}$ cm². **17.a.** Ja, $\sphericalangle A = 90^\circ$. **b.** Nein. **c.** Ja, $\sphericalangle B = 90^\circ$. **d.** Ja, $\sphericalangle C = 90^\circ$. **e.** Nein. **18.** $U_{ABCD} = 24$ cm. **19.** $U_{ABCD} = 44$ cm. **20.** $AB = 9$ cm. **21.** 4 cm. **22.a.** 9 cm; **b.** 108 cm².

Test: **1.** 10 cm. **2.a.** rechtwinklig, $\sphericalangle A = 90^\circ$; **b.** $2\sqrt{2}$ cm. **3.** 54 cm².

4. Lektion. Elemente der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

1.a. 5 cm; **b.** $\sin B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $\tan B = \frac{3}{4}$, $\cot B = \frac{4}{3}$; **c.** $\sin C = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{3}{5}$, $\tan C = \frac{4}{3}$, $\cot C = \frac{3}{4}$. **2.a.** $\sin B = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{3}{5}$, $\tan B = \frac{4}{3}$, $\tan C = \frac{3}{4}$; **b.** $\sin C = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{3}{5}$, $\tan B = \frac{3}{4}$, $\cot B = \frac{4}{3}$; **c.** $\cos B = \frac{3}{5}$, $\cot B = \frac{3}{4}$, $\cot C = \frac{4}{3}$. **3.a.** $AC = 4$ cm, $BC = 8$ cm; **b.** $2\sqrt{3}$ cm. **4.a.** $AB = 9$ cm, $AC = 3\sqrt{7}$ cm; **b.** $\cos C = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan C = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\cot C = \frac{\sqrt{7}}{3}$. **5.a.** $AC = 5$ cm, $BC = 13$ cm; **b.** $\sin B = \frac{5}{13}$, $\tan B = \frac{5}{12}$, $\cot B = \frac{12}{5}$. **6.a.** 36 cm; **b.** $\sin C = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{3}{5}$, $\tan C = \frac{4}{3}$, $\cot C = \frac{3}{4}$. **7.a.** 4 cm²; **b.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ cm. **8.** $24(\sqrt{3} + 1)$ cm. **9.a.** $AD = 6$ cm, $Fl_{ABC} = 18$ cm²; **b.** $6(\sqrt{5} + 1)$ cm; **c.** $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. **10.** $U_{ABC} = 24$ cm, $Fl_{ABC} = 24$ cm². **11.a.** $AC = 15$ cm, $AB = 11,25$ cm, $BC = 18,75$ cm; **b.** $\sin B + \cos B = 1,4$. **12.a.** $AD = 8\sqrt{3}$ cm, $BC = 8$ cm; **b.** $U_{ABCD} = 16(\sqrt{3} + 1)$ cm, $Fl_{ABCD} = 64\sqrt{3}$ cm²; **c.** $\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{1}{2}$. **13.b.** $Fl_{ABCD} = 384$ cm², $U_{ABCD} = 80$ cm; **c.** 19,2 cm. **14.a.** 48 cm²; **c.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **15.a.** $14\sqrt{3} + 6$ cm; **b.** $AC = 2\sqrt{21}$ cm, $BD = 12$ cm. **16.a.** $Fl_{ABCD} = x(x + 2)$ m²; **b.** $x = 4$; **c.** $BE = BC : 2$, also ist der Winkel DB 90 Grad, also

erstreckt sich das Rohr von D nach B . $d(D, BC) = BD = 4\sqrt{2}$ m, dann folgt die Anforderung der Aufgabe. **17.b.** $Fl_{ABC} = \frac{225\sqrt{3}}{2}$ m²; **c.** $\frac{225\sqrt{3}}{4}$ m².

Test: **1.** $AC = 20$ cm, $\sin B = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$, $\tan B = \frac{4}{3}$, $\cot B = \frac{3}{4}$. **2.a.** 24 cm; **b.** 4,8 cm. **3.a.** 120 cm; **b.** $AC = BD = 24\sqrt{3}$ cm.

5. Lektion. Lösen des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung von Elementen in regelmäßigen Vielecken. Schätzen der Entfernungen in praktischen Situationen mithilfe der metrischen Beziehungen

1. $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle C = 30^\circ$. **2.** $AB = 4$ cm, $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle B = 60^\circ$. **3.** $BC = 12\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45^\circ$. **4.a.** $AC = 16$ cm, $\sin B = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{3}{5}$; **b.** $BC = 20$ cm, $\sin B = \frac{3}{5}$, $\sin C = \frac{4}{5}$; **c.** $AB = 6$ cm, $\sphericalangle B = 30^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$; **d.** $AB = AC = 4\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle C = 45^\circ$. **5.** $AB = 20$ cm, $BC = 25$ cm, $\sin B = \frac{3}{5}$, $\sin C = \frac{4}{5}$. **6.** $AB = 2\sqrt{13}$ cm, $AC = 3\sqrt{13}$ cm, $\sin B = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\sin C = \frac{2\sqrt{13}}{13}$. **7.a.** $AB = 8\sqrt{3}$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 16$ cm, $\sphericalangle C = 60^\circ$; **b.** $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $AC = 12$ cm, $BC = 8\sqrt{3}$, $\sphericalangle B = 60^\circ$. **8.a.** $2\sqrt{2}$ cm; **b.** $a_4 = 1$ cm, $R = \sqrt{2}$ cm. **9.a.** $2\sqrt{3}$ cm; **b.** $U_3 = 12$ cm, $Fl_3 = 4\sqrt{3}$ cm²; **c.** $a_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm, $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. **10.a.** $24\sqrt{3}$ cm; **b.** $U_3 = 72 \cdot \sqrt{3}$ cm, $Fl_3 = 432\sqrt{3}$ cm²; **c.** $h_3 = 36$ cm, $R = 24$ cm. **11.** $R = 6$ cm, $a_6 = 3\sqrt{3}$ cm. **13.a.** $a_3 = \sqrt{3}$ cm, $R = 2\sqrt{3}$ cm, $Fl_3 = 9\sqrt{3}$ cm²; **b.** $l_4 = 4,5$ cm, $a_4 = 2,25$ cm, $R = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. **14.** $24\sqrt{3}$ cm². **15.a.** $3\sqrt{3}$ cm²; **b.** $2\sqrt{3}$ cm; **c.** $Fl_{Diskus} = 4\pi$ cm² > 12,56 cm²; $Fl_{ABCEDEF} = 6\sqrt{3}$ cm² < 10,44 cm². **16.a.** 30 m; **b.** 864 m²; **c.** $\frac{12}{5\sqrt{73}}$.

Selbstbewertung: **1.** $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 6$ cm, $\sphericalangle C = 60^\circ$. **2.** $AB = 4\sqrt{13}$ cm, $AC = 6\sqrt{13}$ cm, $BC = 26$ cm, $\sin B = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\sin C = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

3.a. $U_4 = 48\sqrt{2}$ cm, $Fl_4 = 288$ cm²; **b.** $Fl_3 = 108\sqrt{3}$ cm².

